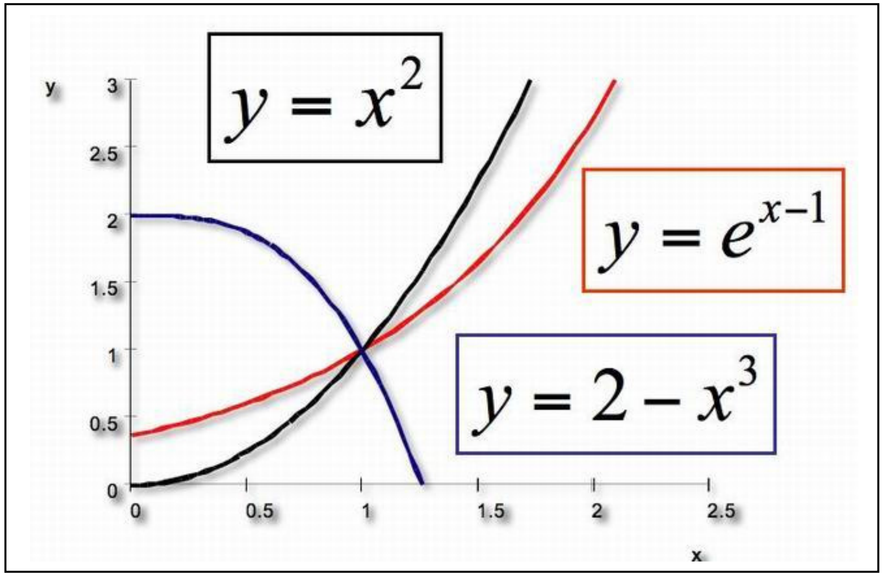
Abbiamo gia visto come il concetto di limite consente di gestire il problema della valutazione di una funzione. Non ci consente però di stimare la monotonia di una funzione (crescente o decrescente?) e di valutarne la velocità di variazione. Ad esempio per le tre funzioni riportate in figura si ha che il limite per x tendente a 1 è uguale a 1.

$$\boxed{\lim_{x \to 1} f(x) = 1}$$



La loro monotonia è ovviamente differente. In particolare una di esse è decrescente, le altre due sono crescenti. Queste ultime, inoltre, sembrano mostrare una differente "velocità di crescita".

Occorre dunque un "indice di variabilità" che consenta di:

1. Stabilire la monotonia di una funzione (puntuale).

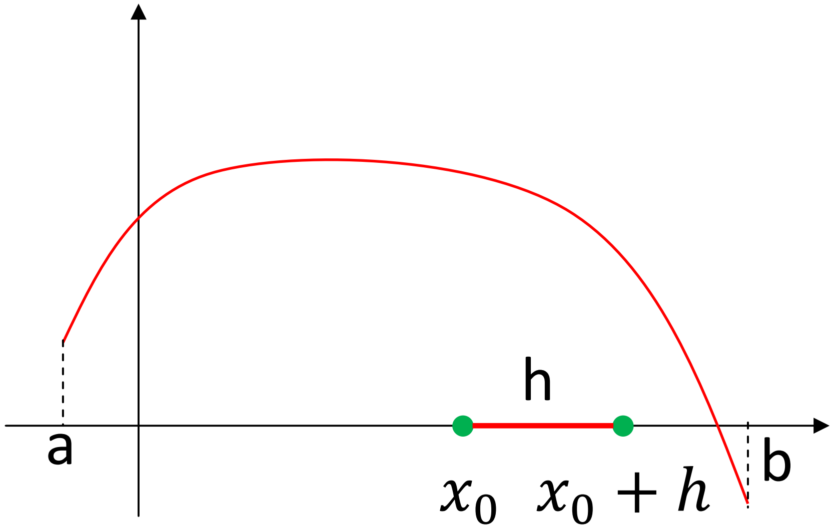
2. Quantificare la velocità di variazione (se la funzione è crescente "intorno" ai punti a e b del suo dominio, è possibile stabilire in quale punto la crescita è più veloce? Fra due funzioni, entrambe crescenti in un punto, è possibile quale delle due cresce più velocemente?).

Notiamo che per la funzione $y = \boldsymbol{m}x + \boldsymbol{n}$ sappiamo rispondere alle due domande precedenti:

1. la monotonia dipende dal coefficiente angolare $\boldsymbol{m}$ (se positivo, la funzione è crescente, se negativo decrescente)

2. fra due rette aventi coefficiente angolare positivo, quella con coefficiente angolare maggiore ha pendenza maggiore.

Sia assegnata una funzione $f(x)$ in un intervallo $[a, b]$ e sia $x_0$un fissato punto interno all'intervallo $[a, b]$. Si passi dal punto x_0 ad un altro punto interno all'intervallo $[a, b]$

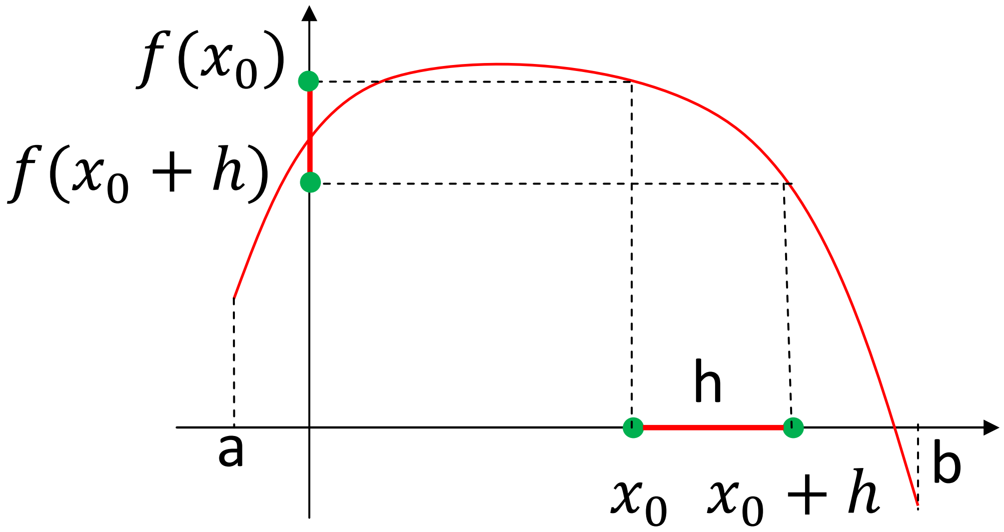


si fornisce cioè un certo incremento, che chiamiamo h, al valore x_0 in modo tale da trovarsi ancora nell'intervallo $[a, b]$.

se $h > 0$ ci si sposta alla destra di x_0

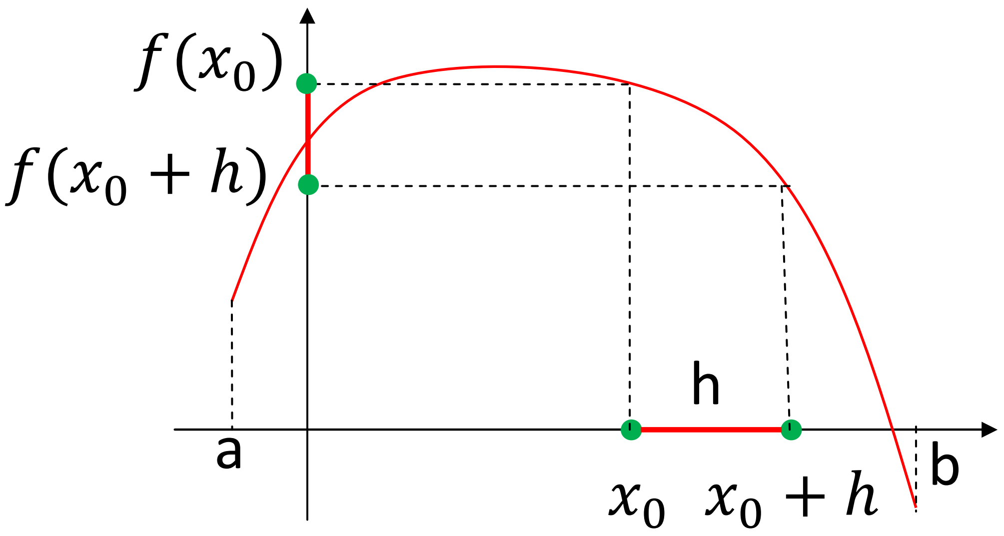
se $h < 0$ ci si sposta alla sinistra di x_0

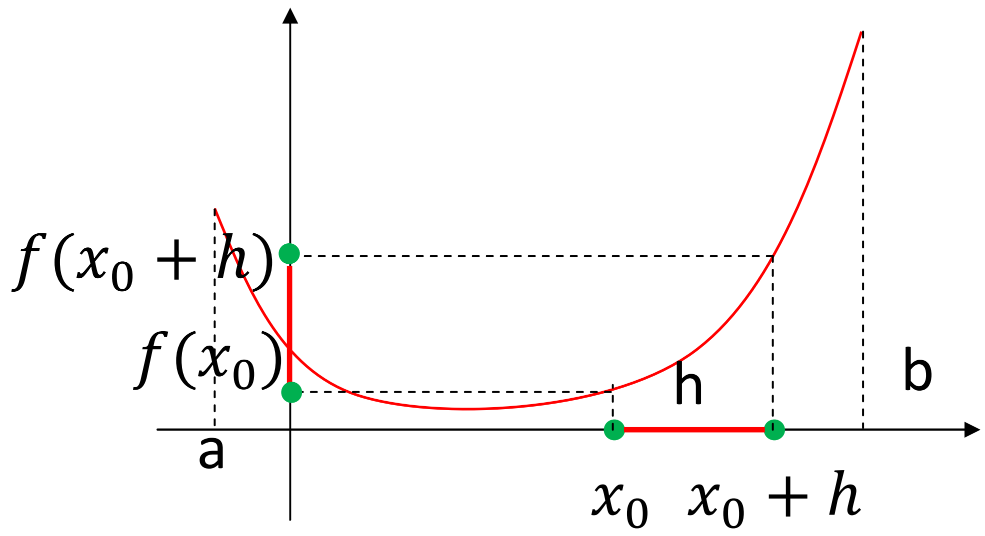
Il passaggio da x_0 ad $x_0 + h$ lungo l'asse delle ascisse viene detto incremento della variabile *x* e coincide col valore *h.*



Le immagini mediante f dei punti x_0 e x_0+h sono rispettivamente $f(x_0)$ e $f(x_0+h)$.
La differenza $f(x_0+h)-f(x_0)$ tra i valori che la funzione assume nel passare da x_0 ad x_0+h si chiama incremento della funzione f

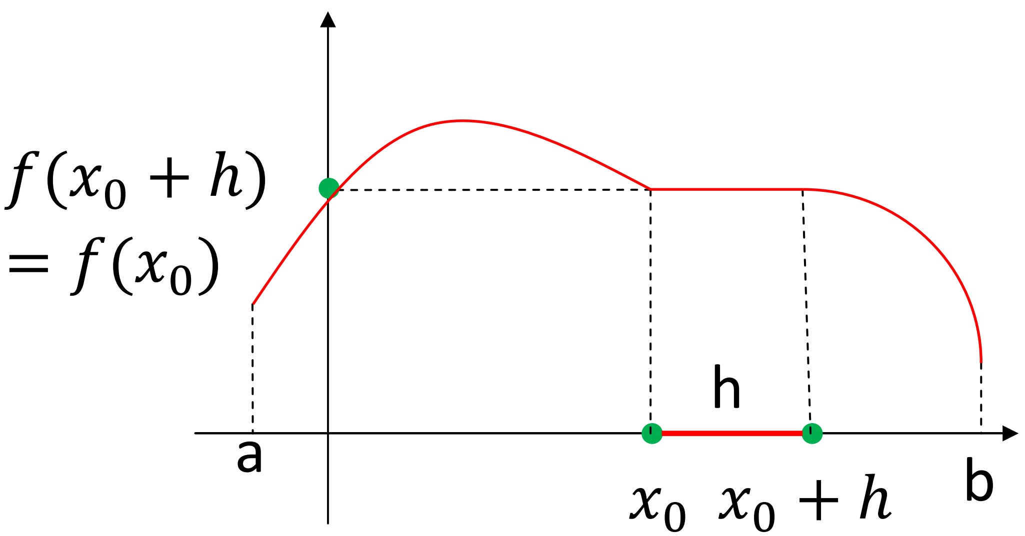
Il valore dell'incremento della funzione può essere positivo, negativo o nullo





negativo se f decresce passando da x_0 a x_0+h

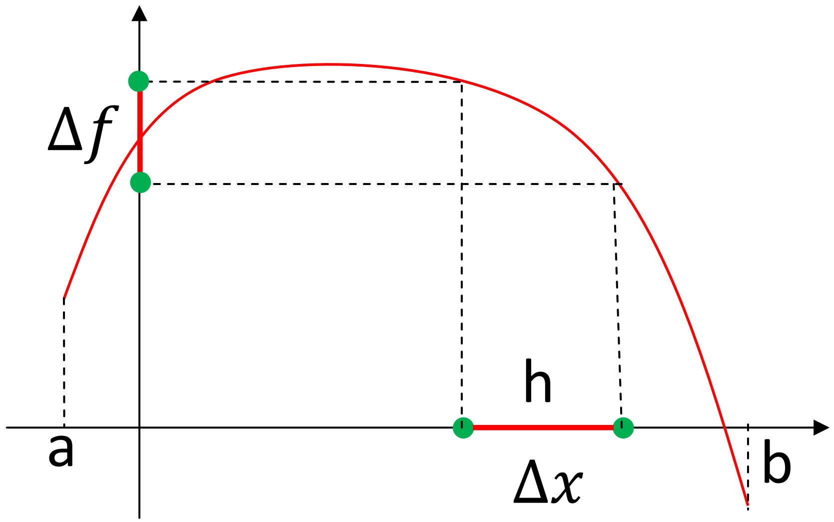
positivo se f cresce passando da x_0 a x_0+h



nullo se f è costante passando da x_0 a x_0+h

L'incremento della variabile *x* viene indicato col simbolo Δx

L'incremento della funzione *f* viene indicato col simbolo Δf



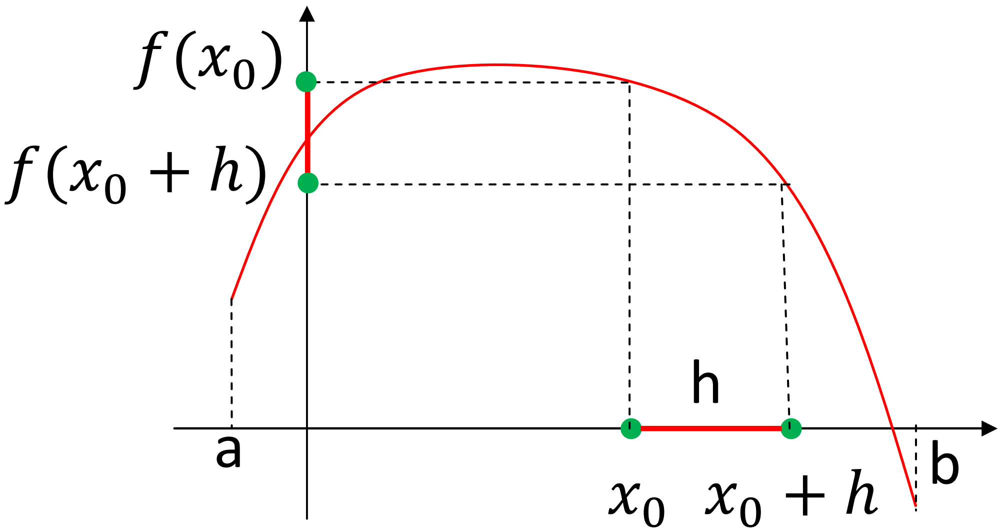
$$\Delta x = x_0 + h - x_0$$

$$\Delta f = f(x_0 + h) - f(x_0)$$

Il rapporto tra l'incremento della variabile *x* nel passaggio da x_0 ad $x_0 + h$ e l'incremento della funzione f viene detto rapporto incrementale della funzione *f* relativo al passaggio da x_0 ad $x_0 + h$

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Il rapporto incrementale esprime la "variabilità di *f*" relativamente ad un certo intervallo.



$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} < 0$$

<0

>0

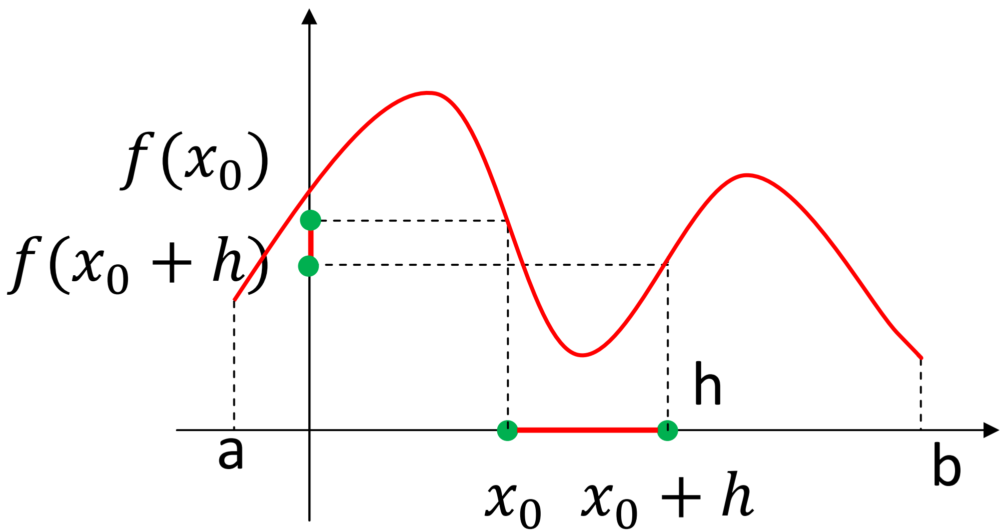
Rapporto incrementale negativo

la funzione $f(x)$ decresce passando da x_0 a x_0+h

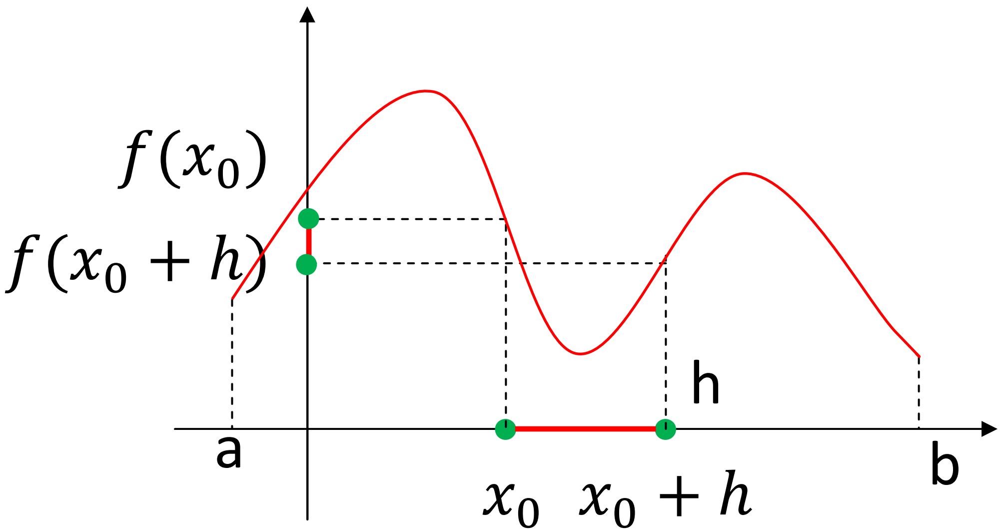
la funzione $f(x)$ è decrescente in $[x_0\,, x_0+h]$

Esempio

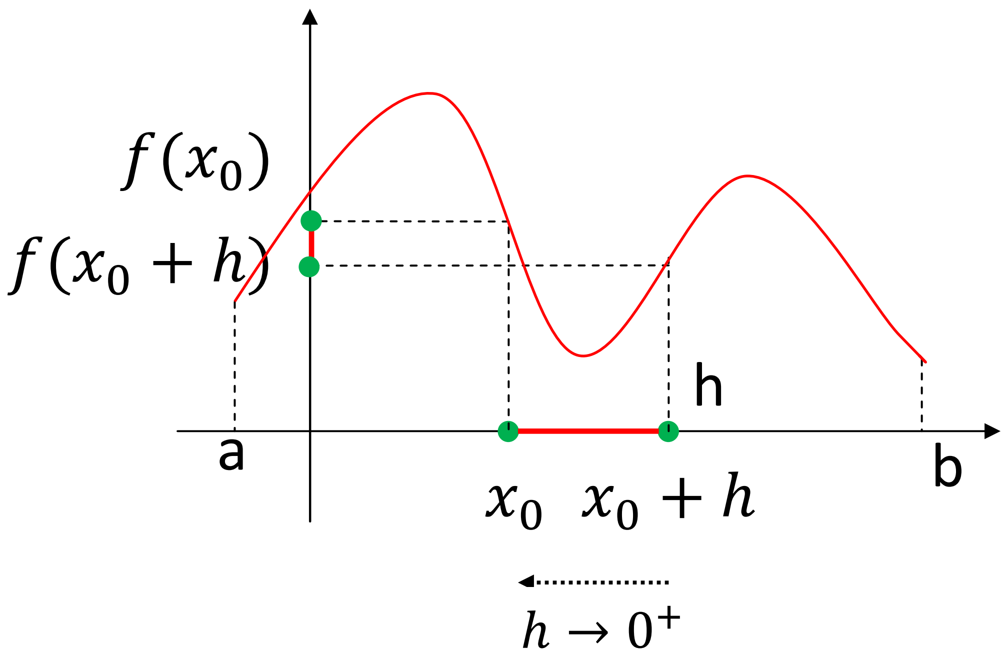
Dal grafico che segue si vede chiaramente che il rapporto incrementale della funzione considerata nel passaggio da x_0 a $x_0 + h$ è negativo. Quindi la funzione considerata sicuramente decresce nel passaggio da x_0a $x_0 + h$ ma non decresce in tutto l'intervallo $[x_0\,, x_0 + h]$ (dove infatti è prima decrescente e poi crescente).



Quindi: il rapporto incrementale fornisce informazioni circa la crescita di una funzione solo relativamente al passaggio da x_0 a $x_0 + h$. Non fornisce informazioni circa la monotonia intorno ad un singolo punto (nell'esempio precedente, intorno al punto x_0 la funzione è decrescente mentre intorno al punto $x_0 + h$ la funzione è crescente).



Un'informazione puntuale in un punto x_0 circa la monotonia richiede che si consideri un " intervallo $[x_0, x_0 + h]$ molto piccolo" che si ottiene quando il punto $x_0 + h$ si avvicina al punto x_0 e cioè quando l'incremento h diventa sempre più piccolo $(h \to 0)$

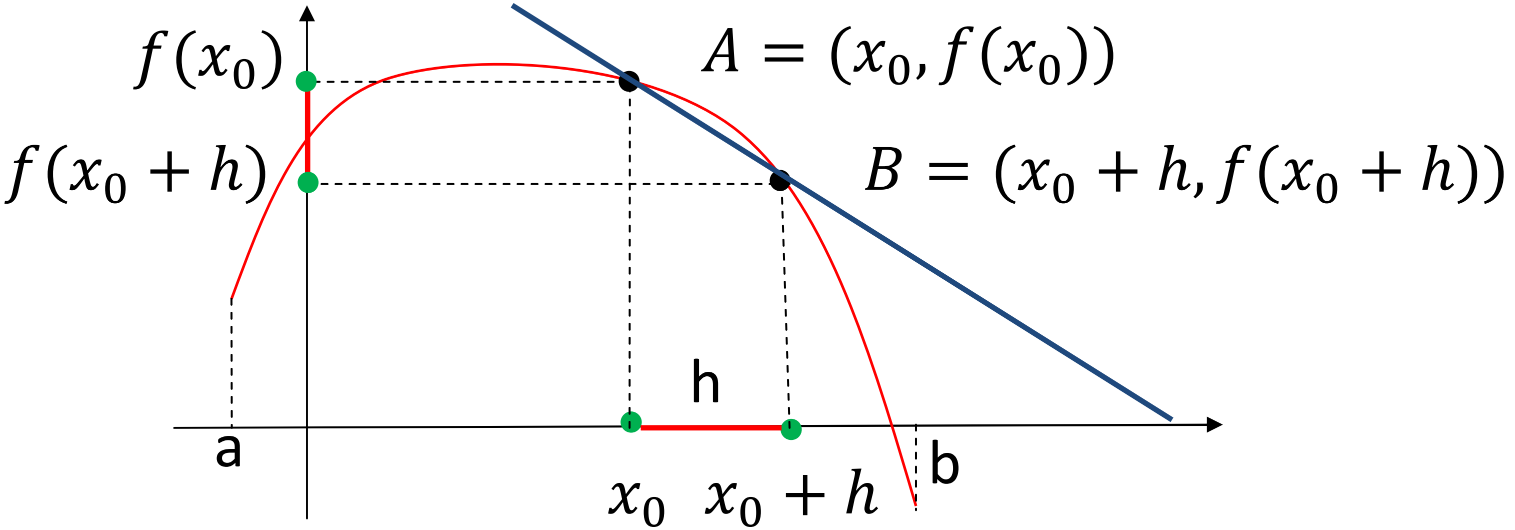


Sia assegnata una funzione *f* (*x*) in un intervallo [*a*,*b*] e sia x_0 un fissato punto interno all'intervallo [*a*,*b*].

Def. Si definisce derivata della funzione *f* (*x*) nel punto x_0 il limite, se esiste ed è finito, del rapporto incrementale di *f* nel passaggio da x_0 ad $x_0 + h$, al tendere a zero dell'incremento *h* della variabile indipendente *x*

$$\boxed{D\big(f(x_0)\big) = f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}}$$

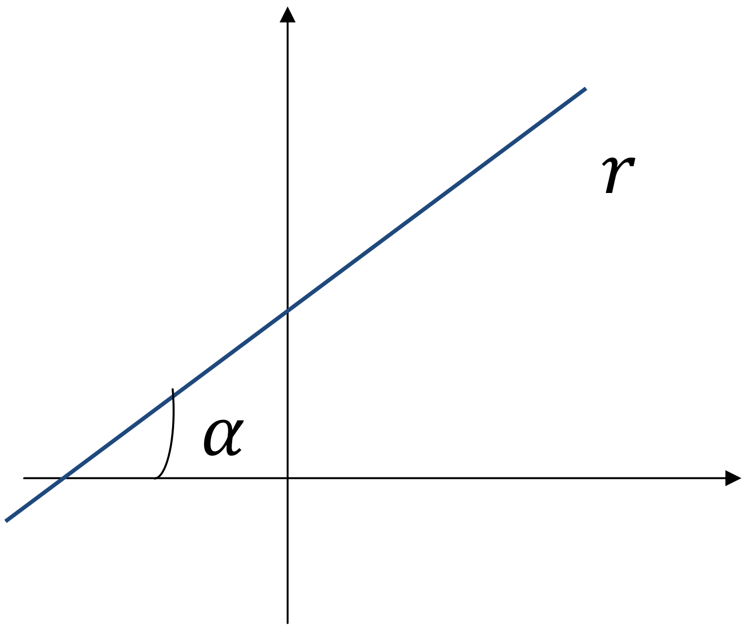
Significato geometrico del rapporto incrementale



$$\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Il rapporto incrementale è il coefficiente angolare della retta passante per A e per B

Il coefficiente angolare di una retta non parallela all'asse delle ordinate di equazione $y = mx + q$ è uguale alla tangente geometrica dell'angolo che la retta stessa forma con il semiasse positivo delle ascisse.



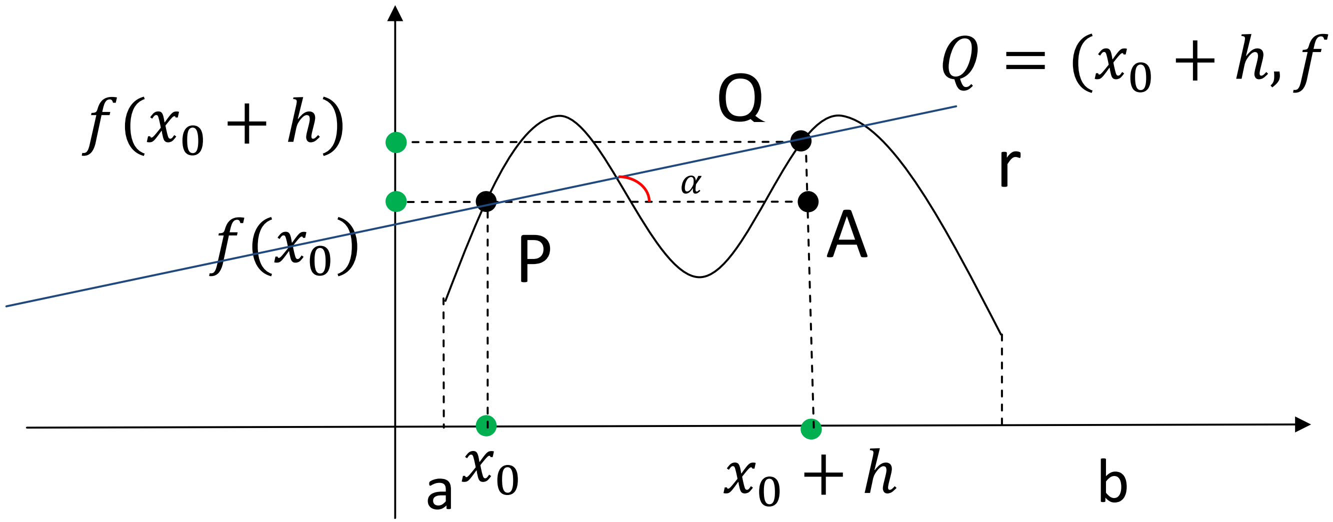
$$\boxed{r: y = mx + q}$$

$$\boxed{\tan\alpha = m}$$

Sia assegnata una funzione $f(x)$ derivabile in un intervallo $[a,b]$ e sia x_0 un fissato punto interno all'intervallo $[a,b]$. Si passi dal punto x_0 ad un altro punto $x_0 + h$ interno all'intervallo $[a,b]$ in modo tale da potere considerare i corrispondenti valori di f

$P = (x_0, f(x_0))$

$Q = (x_0 + h, f(x_0 + h))$



$$PA = x_0 + h - x_0 = h \; incremento \; della \; x$$

$$AQ = f(x_0 + h) - f(x_0) \; incremento \; della \; funzione$$

$$\frac{AQ}{PA} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

rapporto incrementale

Consideriamo il triangolo rettangolo APQ rettangolo in A. Si ha $A\hat{P}Q = \alpha$ e dai teoremi sui triangoli rettangoli segue che:

$$\boxed{\begin{aligned} PA &= PQ\cos\alpha \\ AQ &= PQ\sin\alpha \end{aligned}}$$

$$\Rightarrow$$

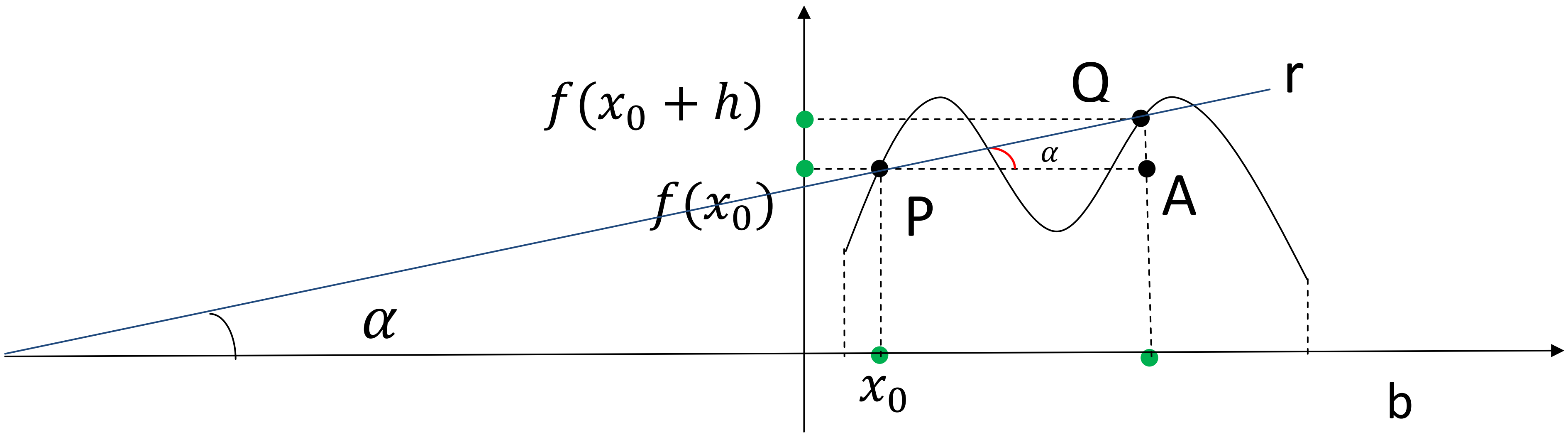
$$\boxed{\frac{AQ}{PA} = \frac{\cancel{PQ}\sin\alpha}{\cancel{PQ}\cos\alpha} = \tan\alpha}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\frac{AQ}{PA} = \tan\alpha = m}$$

coefficiente angolare della retta r

N.B. α è l'angolo che la retta r forma con il semiasse positivo delle x



$$\frac{AQ}{PA} = \tan\alpha = m_r$$

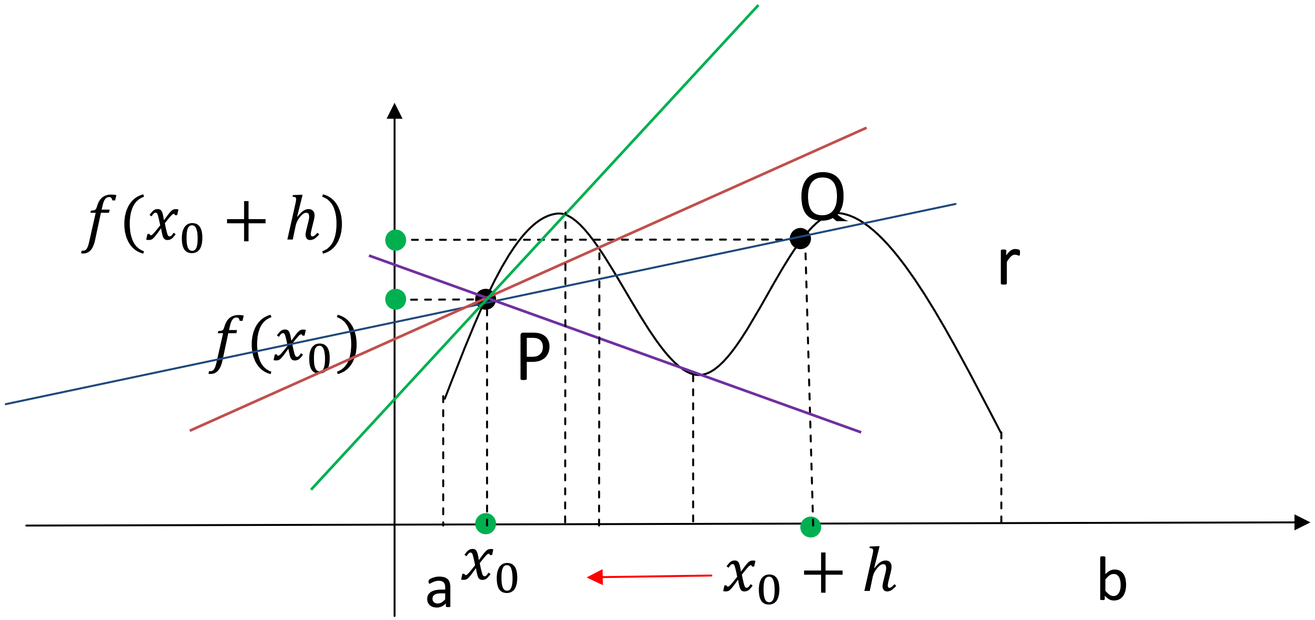
Il rapporto incrementale della funzione f nel passaggio da x_0 ad $x_0 + h$ è il coefficiente angolare della retta passante per

$P = (x_0, f(x_0))$ e $Q = (x_0 + h, f(x_0 + h))$

Cosa succede all'uguaglianza

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \tan\alpha = m_r$$

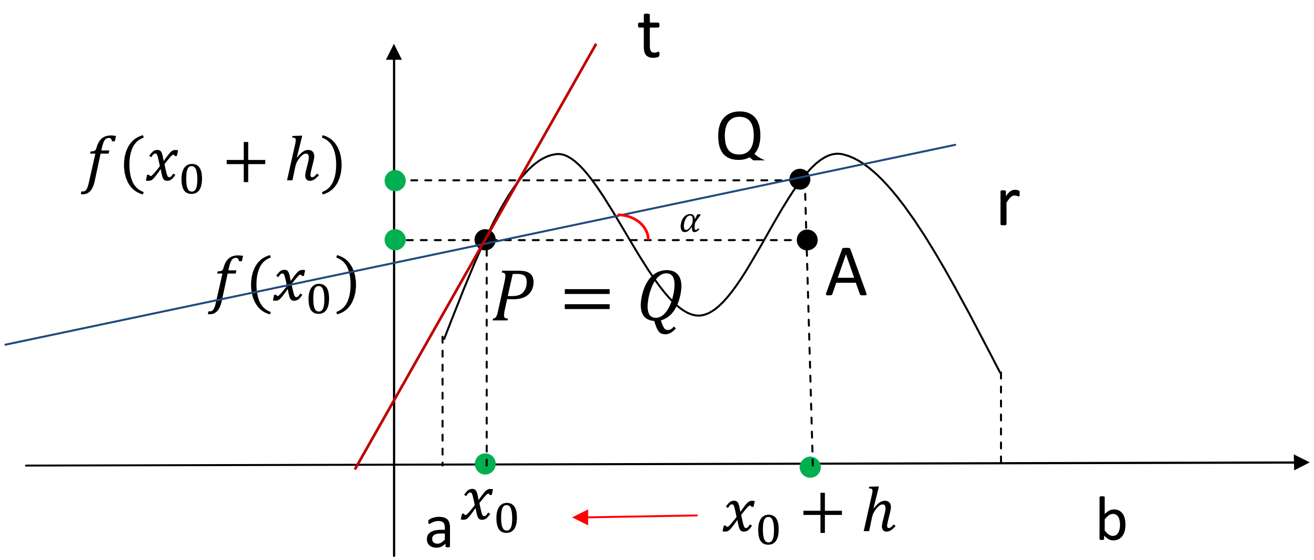
quando $h \to 0$?

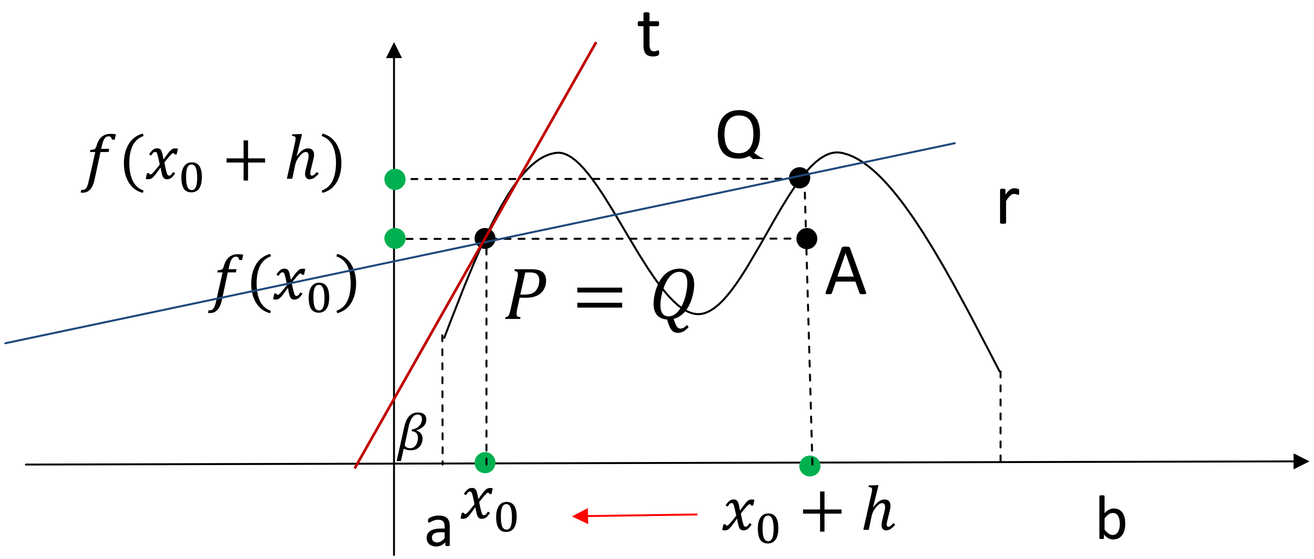


Il punto P rimane fisso mentre il punto Q si muove verso il punto P lungo la curva che rappresenta il grafico di f

Contemporaneamente varia la retta PQ ed in particolare la sua pendenza (coefficiente angolare)

Tali variazioni per $h \to 0$ terminano quando il punto *Q* raggiunge il punto *P* e cioè quando la retta per *P* e *Q* si assesta su una posizione limite che è individuata dalla retta tangente *t* al grafico della funzione *f* nel punto di ascissa x_0 (cioè il punto *P*)





Quindi, indicando con β l'angolo che la retta tangente forma col semiasse positivo delle x e con m_t il suo coefficiente angolare:

$$\boxed{\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0}\tan\alpha=\lim_{h\to 0}m_r}$$

$$f'(x_0) = \tan\beta = m_t$$

La derivata $f'(x_0)$ della funzione f nel punto x_0 è uguale al coefficiente angolare m_t della retta tangente al grafico della funzione f nel punto $P = (x_0, f(x_0))$.

Da ciò segue immediatamente che l’esistenza della derivata di una funzione f in un punto x_0 è legata:

• all’esistenza della retta tangente al grafico di f nel punto di ascissa x_0

• al fatto che il coefficiente angolare della retta tangente deve essere finito, essendo $f'(x_0) = m_t$

Essendo $f'(x_0) = \tan\beta = m_t$ richiedere che il coefficiente angolare della retta tangente t al grafico di f sia finito, equivale a richiedere che sia

$$\beta \neq \frac{\pi}{2}\ (se\ \beta \to \frac{\pi}{2}\ allora \tan\beta \to \pm\infty)$$

$$\Downarrow$$

Affinché la funzione f sia derivabile in x_0 la retta tangente al grafico della funzione f nel punto $P = (x_0, f(x_0))$ non può essere parallela all'asse delle ordinate.