Equazione della retta tangente al grafico di una funzione

Abbiamo già visto che in un sistema di assi cartesiani ortogonali, è possibile determinare l'equazione di una retta *r* non parallela agli assi coordinati, conoscendo:

- le coordinate di due suoi punti

- il suo coefficiente angolare e le coordinate di un suo punto

In particolare

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

è l'equazione della retta passante per $P(x_0, y_0)$ e di coefficiente angolare m.

Data una funzione $f(x)$ definita in un intervallo [a,b] e fissato un punto x_0 interno all'intervallo [a,b] in cui f ammette derivata, allora l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto di coordinate $\left(x_0, f(x_0)\right)$ è:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

Cosa succede graficamente quando una funzione f non è derivabile in un punto?

Esempio 1.

Sia data la funzione

$$f(x) = |x|$$

Tale funzione è definita e continua in tutto *R.* Quindi, in particolare, è definita e continua nel punto $x_0 = 0$ Verifichiamo ora se $f(x)$ è anche derivabile nel punto $x_0 = 0$.
Costruiamone il rapporto incrementale in $x_0 = 0$:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = (essendo\ f(x) = |x|) = \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \frac{|x|}{x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x} = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{|x|}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} 1 = 1 \\ \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{|x|}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-} -\dfrac{x}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-} -1 = -1 \end{cases}$$

La funzione ammette nel punto $x_0 = 0$ derivata destra e derivata sinistra finite ma diverse tra loro

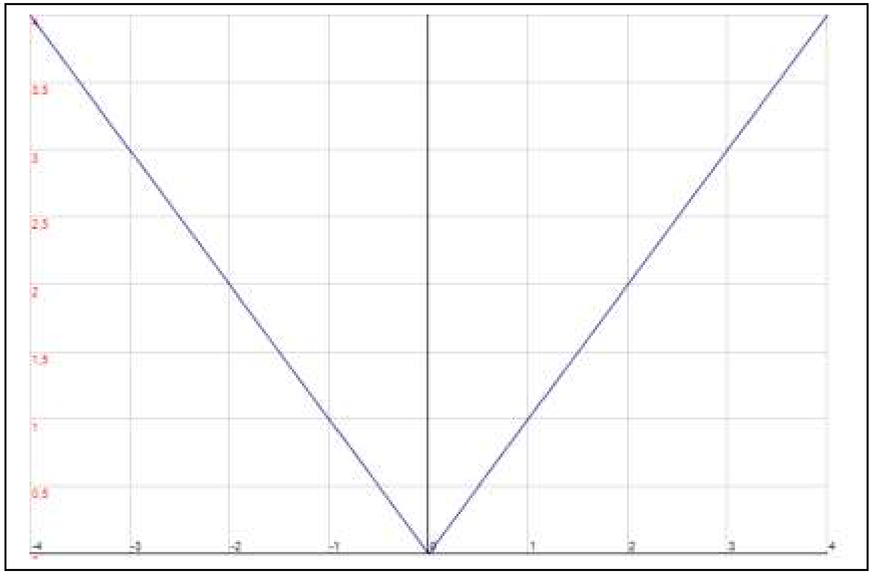
$$f'_+(0) = 1 \quad e \quad f'_-(0) = -1$$

La funzione $f(x) = |x|$ non è derivabile in $x_0 = 0$ (pur essendo ivi continua) ed il punto $x_0 = 0$ è detto

punto angoloso

Def. Sia assegnata una funzione $f(x)$ definita in un intervallo [a,b] e sia x_0 un fissato punto interno all'intervallo [a,b]. Se f ammette in x_0 derivata destra e derivata sinistra finite ma diverse tra loro, allora f non è derivabile in x_0 e si dice che il punto x_0 è una punto angoloso.

Da un punto di vista grafico, possiamo affermare che il grafico di una funzione ammette in un punto angoloso x_0 due rette tangenti (da destra e da sinistra) non parallele all'asse delle ordinate.



$$f(x) = |x|$$

$$f(x) = |\sin x| + \cos x$$

Osservazione

In generale, ogni funzione che presenta il valore assoluto nella propria espressione analitica non è derivabile nei punti *x* in cui si annulla l'argomento del valore assoluto. E tali punti sono punti angolosi.

Esempio 2.

Sia data la funzione

$$f(x) = \sqrt[3]{x-1}$$

Tale funzione è definita e continua in tutto *R.* Quindi, in particolare, è definita e continua nel punto $x_0 = 1$ Verifichiamo ora se $f(x)$ è anche derivabile nel punto $x_0 = 1$. Costruiamone il rapporto incrementale in $x_0 = 1$:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\sqrt[3]{x-1} - \sqrt[3]{1-1}}{x-1} = \frac{\sqrt[3]{x-1}}{x-1}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x-1}}{x-1}=\begin{cases}\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\sqrt[3]{x-1}}{x-1}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{\sqrt[3]{x-1}}{x-1}=+\infty\end{cases}$$

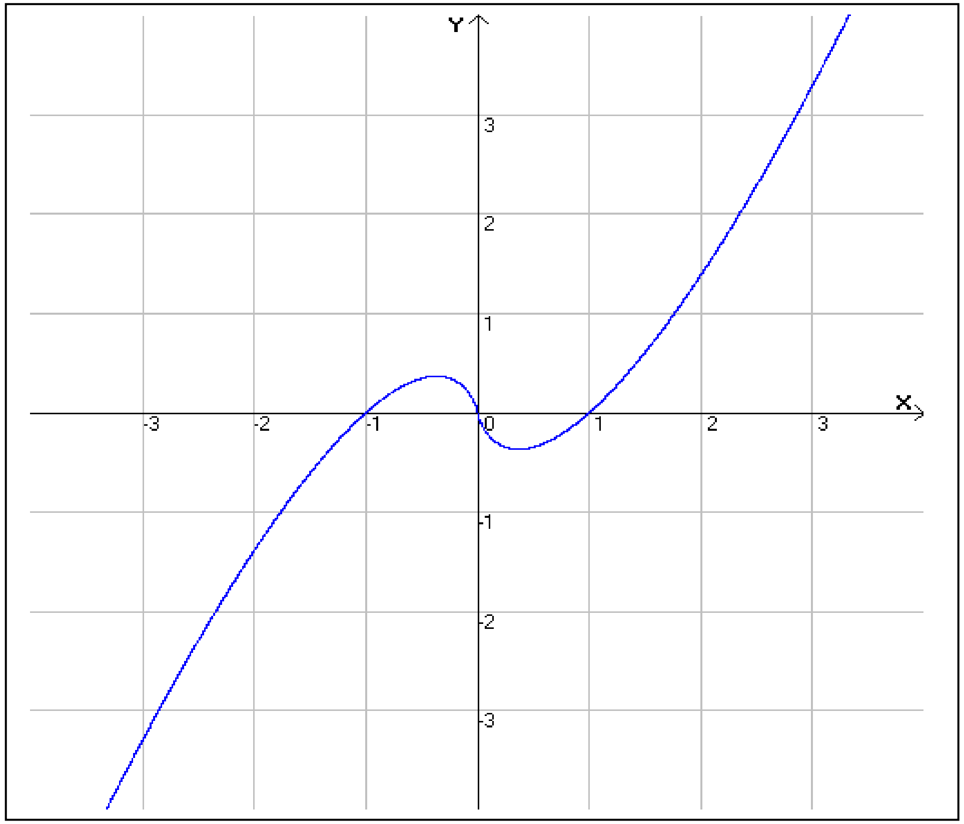
Tali limiti pur essendo uguali non sono finiti.

La funzione $f(x)=\sqrt[3]{x-1}$ non è derivabile in $x_0=1$ (pur essendo ivi continua) ed il punto $x_0=1$ è detto

<u>flesso a tangente verticale</u>

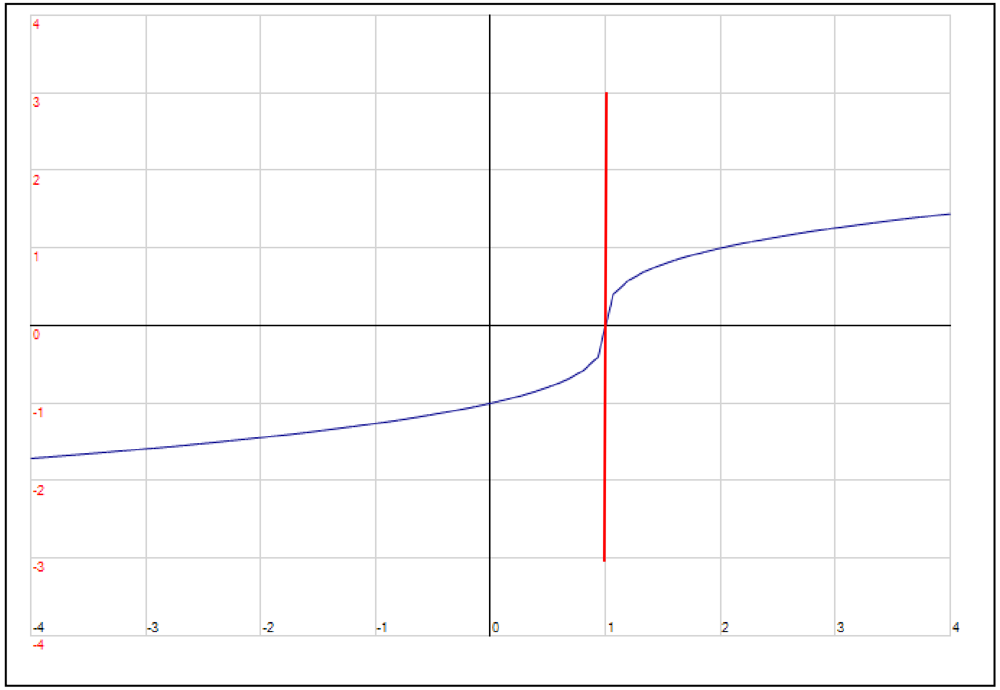
Def. Sia assegnata una funzione $f(x)$ definita in un intervallo [*a*,*b*] e sia x_0 un fissato punto interno all'intervallo [*a*,*b*]. Se *f* ammette in x_0 limite destro e limite sinistro del rapporto incrementale uguali tra loro ma infiniti (cioè entrambi uguali a $+\infty$ o a $-\infty$), allora *f* non è derivabile in x_0 e si dice che il punto x_0 è un flesso a tangente verticale.

Da un punto di vista grafico, possiamo affermare che il grafico di una funzione ammette in un punto di flesso a tangente verticale x_0 retta tangente parallela all'asse delle ordinate.



$$\lim_{x \to x_0^{\pm}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = -\infty$$

$$f(x) = x \log|x|$$



$$\lim_{x \to x_0^{\pm}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty$$

$$f(x) = \sqrt[3]{x - 1}$$

Esempio 3.

Sia data la funzione

$$f(x) = \sqrt[3]{|x|}$$

Tale funzione è definita e continua in tutto *R*. Quindi, in particolare, è definita e continua nel punto $x_0 = 0$
Verifichiamo ora se $f(x)$ è anche derivabile nel punto $x_0 = 0$.
Costruiamone il rapporto incrementale in $x_0 = 0$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\sqrt[3]{|x|} - \sqrt[3]{0}}{x - 0} = \frac{\sqrt[3]{|x|}}{x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{|x|}}{x}=\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sqrt[3]{|x|}}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sqrt[3]{x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to 0^-}\frac{\sqrt[3]{|x|}}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{-\sqrt[3]{x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}-\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}=-\infty\end{cases}$$

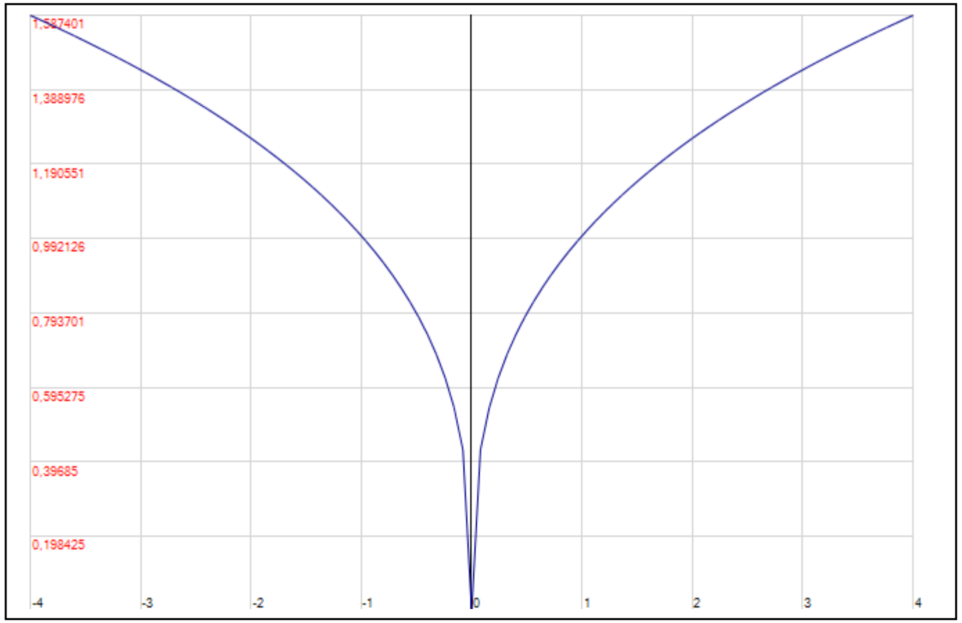
Tali limiti non sono uguali tra loro e non sono finiti.

La funzione $f(x)=\sqrt[3]{|x|}$ non è derivabile in $x_0=0$ (pur essendo ivi continua) ed il punto $x_0=0$ è detto

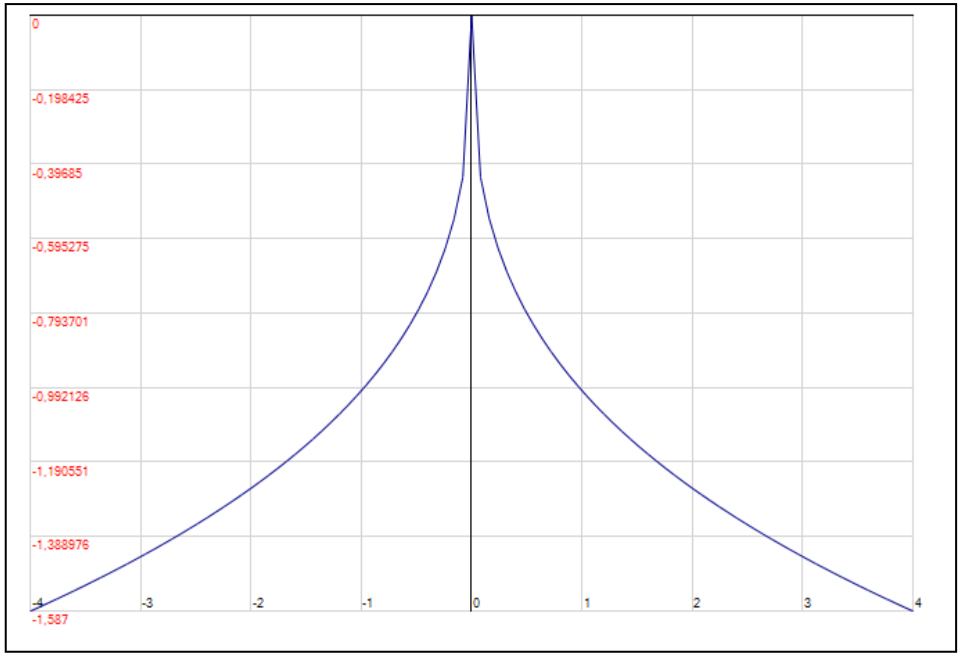
<u>cuspide</u>

Def. Sia assegnata una funzione $f(x)$ definita in un intervallo [*a*,*b*] e sia x_0 un fissato punto interno all'intervallo [*a*,*b*]. Se *f* ammette in x_0 limite destro e limite sinistro del rapporto incrementale diversi tra loro e infiniti (cioè l'uno uguale a $+\infty$ e l'altro uguale a $-\infty$ o viceversa), allora *f* non è derivabile in x_0 e si dice che il punto x_0 è una cuspide.

Da un punto di vista grafico, possiamo affermare che il grafico di una funzione ammette in un punto di cuspide x_0 retta tangente parallela all'asse delle ordinate.



$$\lim_{x\to x_0^{\pm}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \pm\infty$$



$$\lim_{x\to x_0^{\pm}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \mp\infty$$

Continuità e derivabilità

Assegnata $f : (a, b) \rightarrow R$.

f è derivabile in x_0

$$\Downarrow \quad \not\Uparrow$$

f è continua in x_0

Esempio

$$f(x) = |x|$$

è continua in $x_0 = 0$ ma non è ivi derivabile!

dim. f è continua in x_0 vuol dire

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0}\big(f(x) - f(x_0)\big) = 0$$

$$f(x) - f(x_0) = \underset{\substack{\downarrow \\ f'(x_0)}}{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} \cdot \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{(x - x_0)}$$

$per\ x \to x_0$

quindi $\lim_{x\to x_0}\big(f(x) - f(x_0)\big) = 0$

Derivate delle funzioni elementari

Sia data la funzione costante $f(x) = k$.

Calcoliamone la derivata $\forall x \in R$ seguendo la definizione

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{k-k}{h} = \frac{0}{h} = 0$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 0$$

$$\boxed{Dk = 0, \forall x \in R}$$

Il risultato appena trovato ha un’interpretazione geometrica: il grafico della funzione costante $f(x) = k$ è una retta parallela all’asse delle ascisse. In ogni punto la retta tangente coincide con il grafico della funzione. Il coefficiente angolare della retta tangente è $m_t = 0, \forall x \in R$ (infatti $\tan 0 = 0$).

Sia data la funzione bisettrice $f(x) = x$.

Calcoliamone la derivata $\forall x \in R$ seguendo la definizione

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{x + h - x}{h} = \frac{h}{h} = 1$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 1$$

$$\boxed{Dx = 1, \forall x \in R}$$

Il risultato appena trovato ha un'interpretazione geometrica: il grafico della funzione $f(x) = x$ è la retta bisettrice del I e III quadrante. In ogni punto la retta tangente coincide con il grafico della funzione. Il coefficiente angolare della retta tangente è $m_t = 1, \forall x \in R$ (infatti $\tan\frac{\pi}{4} = 1$).

Sia data la funzione $f(x) = x^n$ con $n \in N$. Si verifica che

$$\boxed{Dx^n = nx^{n-1}, \forall x \in R \; e \; \forall n \in N}$$

Esempio

$$f(x) = x^3 \Longrightarrow f'(x) = 3x^2$$

In particolare per $x_0 = 2$ si ha

$$f'(x_0) = f'(2) = 3 \cdot 4 = 12$$

Tale risultato si può generalizzare al caso $n \in Z$...

Esempio

$$f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1} \Longrightarrow f'(x) = -1x^{-1-1} = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$

Quindi

$$\boxed{D\frac{1}{x} = -\frac{1}{x^2}, \forall x \in R}$$

...e al caso $n \in Q$

Esempio

$$f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \Longrightarrow f'(x) = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Quindi

$$\boxed{D\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \forall x \in R^{+}}$$

Allo stesso modo si può verificare che

$$\boxed{Da^x = a^x \log a}$$

$$\boxed{De^x = e^x}$$

$$\boxed{D \log_a x = \frac{1}{x} \log a}$$

$$\boxed{D \log x = \frac{1}{x}}$$

$$\boxed{D \sin x = \cos x}$$

$$\boxed{D \cos x = -\sin x}$$

Regole di calcolo delle derivate

Vediamo ora come si comporta l'operazione di derivazione rispetto alle operazioni algebriche (somma, differenza, prodotto, quoziente) e alle operazioni di composizione e di inversione.

Teorema

Se $f:(a,b)\to R$ e $g:(a,b)\to R$ sono due funzioni entrambe derivabili in (a,b)

$$\Downarrow$$

$$f \pm g, f\cdot g, \frac{f}{g}\ (con\ g\neq 0)$$

sono derivabili in (a,b) e valgono le seguenti formule:

$$(f\pm g)' = f' \pm g'$$

$$(f\cdot g)' = f'\cdot g + f\cdot g' \Longrightarrow (k\cdot f)' = k\cdot f'$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'\cdot g - f\cdot g'}{g^2} \Longrightarrow \left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}$$

Dalla regola di derivazione del rapporto segue che:

$$D\tan x = D\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{(\cos x)^2} =$$

$$\frac{(\cos x)^2 + (\sin x)^2}{(\cos x)^2} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Quindi

$$\boxed{D\tan x = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x}$$

Teorema

Sia assegnata la funzione composta $(f \circ g)(x)$ mediante le due funzioni $f(y)$ e $g(x)$. Sia la funzione g derivabile in x e sia la funzione f derivabile in $g(x)$. Allora anche la funzione composta $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ è derivabile e vale la seguente formula:

$$(f \circ g)'(x) = f'\big(g(x)\big) \cdot g'(x)$$

Esempio 1.

$$f(x) = (\sin x)^3$$

$$f'(x) = 3(\sin x)^2 \cos x$$

Esempio 2.

$$f(x) = \log \sin x$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sin x} \cos x = \cot x$$

Esempio 3.

$$f(x) = \cos(\log^3 x)$$

$$f'(x) = -\sin(\log^3 x) \cdot 3 \log^2 x \cdot \frac{1}{x} = -\frac{3}{x} \sin(\log^3 x) \cdot \log^2 x$$

Esempio 4.

$$f(x) = 6^{\cos x}$$

$$f'(x) = 6^{\cos x} \log 6 \cdot (-\sin x) = -\log 6 \cdot \sin x \cdot 6^{\cos x}$$

Derivata della funzione inversa

Assegnata $f:(a,b)\to R$ continua e invertibile in (a,b), sia $g=f^{-1}$ l'inversa definita in $f\big((a,b)\big)$. Supponiamo inoltre che esista $x_0\in(a,b)$ tale che $f'(x_0)\neq 0$. Allora g é derivabile in $y_0=f(x_0)$ e si ha

$$g'(y_0)=\frac{1}{f'(x_0)}=\frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$

Derivata delle inverse delle funzioni trigonometriche

$$D \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

dim.

$$y = \arcsin x \Longrightarrow x = \sin y$$

$$D \arcsin x = \frac{1}{D \sin y} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$D \arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

dim.

$$y = \arccos x \Longrightarrow x = \cos y$$

$$D\arccos x = \frac{1}{D\cos y} = \frac{1}{-\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y}}$$
$$= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$D\arctan x = \frac{1}{1+x^2}$$

dim.

$$y = \arctan x \Longrightarrow x = \tan y$$
$$D\arctan x = \frac{1}{D\tan y} = \frac{1}{1+\tan^2 y} = \frac{1}{1+x^2}$$