

35. Derivata di funzioni composte.



Regole di calcolo delle derivate

Abbiamo già visto come si comporta l'operazione di derivazione rispetto alle operazioni algebriche di somma, differenza, prodotto e quoziente.

Vediamo ora come si comporta l'operazione di derivazione rispetto alle operazioni di composizione e di inversione.

Teorema derivate funzioni composte

Sia assegnata la funzione composta $f(g(x))$ mediante le due funzioni $f(x)$ e $g(x)$.

Sia la funzione g derivabile in x e
sia la funzione f derivabile in $g(x)$



anche la funzione composta $f(g(x))$ è
derivabile e vale la seguente formula:

$$(f \circ g)' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Derivata funzione composta: esempi

$$\text{sia } f(x) = (3x + 1)^2$$

$$\implies f'(x) = 2 \cdot (3x + 1)^{2-1} \cdot 3$$

Esempio 2:

$$\text{sia } f(x) = (1 + 2x^2)^3$$

$$f'(x) = 3(1 + 2x^2)^{3-1} \cdot [2 \cdot 2x^{2-1}]$$

$$f'(x) = 3(1 + 2x^2)^2 \cdot [4x] = 12x \cdot (1 + 2x^2)^2$$

Derivata funzione composta: esempi

$$\text{sia } f(x) = \sqrt{(4x+3)} \quad f(x) = (4x+3)^{1/2}$$

$$f'(x) = 1/2 \cdot (4x+3)^{1/2-1} \cdot 4$$

$$f'(x) = 2 \cdot (4x+3)^{-1/2} = \frac{2}{\sqrt{4x+3}}$$

Esempio:

$$\text{sia } f(x) = \log(x^2)$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x^2} \cdot 2x = \frac{2}{x}$$

Regole di derivazione

Così, a partire da dal teorema sulla derivazione delle funzioni composte ed inverse e dalle derivate delle funzioni elementari, si deduce che:

$$\bullet D[f(x)]^\alpha = \alpha f(x)^{\alpha-1} \cdot f'(x)$$

$$\bullet D\sqrt{f(x)} = \frac{1}{2\sqrt{f(x)}} \cdot f'(x)$$

$$\bullet D\frac{1}{f(x)} = -\frac{1}{f^2(x)} \cdot f'(x)$$

Regole di derivazione

$$\bullet D a^{f(x)} = a^{f(x)} \log a \cdot f'(x)$$

$$\bullet D e^{f(x)} = e^{f(x)} \cdot f'(x)$$

$$\bullet D \log_a f(x) = \frac{1}{f(x)} \cdot \frac{1}{\log a} \cdot f'(x)$$

$$\bullet D \log f(x) = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x)$$