RETI ELETTRICHE IN CORRENTE CONTINUA

3.1 Caratteristica esterna dei bipoli elettrici

La tensione e la corrente di un bipolo elettrico sono legate da una relazione biunivoca che può essere espressa in forma analitica mediante le seguenti relazioni:

$$\Delta V = f(I) \tag{3.1}$$

$$I = g(\Delta V) \tag{3.2}$$

La curva che esprime graficamente sul piano cartesiano la relazione tensione-corrente prende il nome di caratteristica esterna. In figura 3.1 è riportato un generico bipolo elettrico e la sua caratteristica esterna.

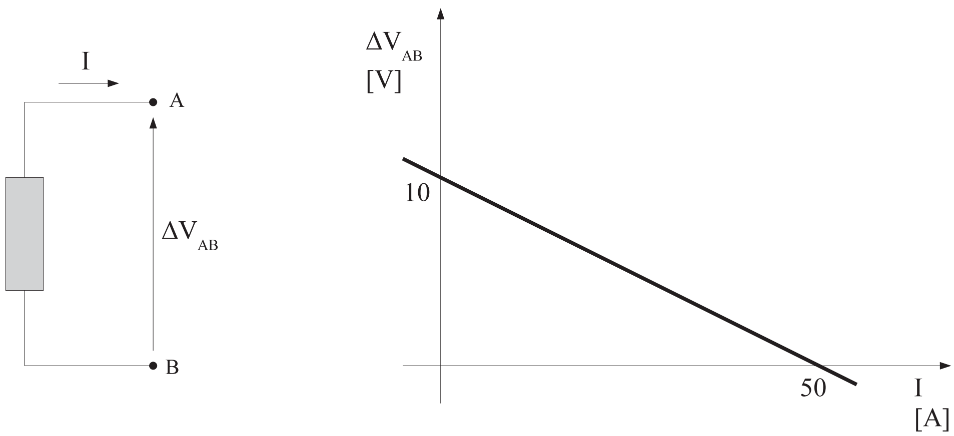


Figura 3.1: Caratteristica esterna di un bipolo elettrico.

Sull'asse delle ascisse è stata posta la corrente e sull'asse delle ordinate la tensione. In questo modo si è implicitamente optato di rappresentare la relazione $\Delta V = f(I)$. Nulla vieta di porre sull'ascissa la tensione e in ordinata la corrente in modo da rappresentare graficamente la relazione $I = g(\Delta V)$.

L'aggettivo esterna indica che il grafico descrive il comportamento del bipolo elettrico dal punto di vista esterno, ossia del circuito elettrico a cui è collegato, senza tener conto dei fenomeni che avvengono all'interno del bipolo. La caratteristica esterna può essere ottenuta sperimentalmente imponendo al bipolo una serie di valori di corrente, o di tensione, e misurando per ciascuno di essi la tensione e la corrente, che interessa il bipolo. Le coppie di valori (V,I) ottenuti vengono poi riportate su un diagramma.

La forma della caratteristica esterna permette di distinguere i bipoli elettrici in:

- bipoli lineari;
- bipoli non lineari.

La caratteristica dei bipoli lineari è una retta, mentre la caratteristica dei bipoli non lineari è una curva.

Un tipico esempio di bipolo non lineare è il diodo (Figura 3.2), un dispositivo elettronico realizzato con materiali semiconduttori.

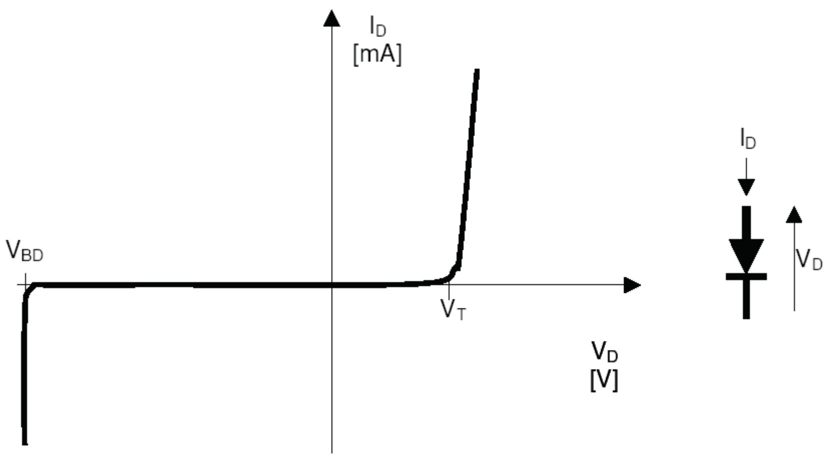


Figura 3.2: Caratteristica esterna di un diodo.

3.2 Tensione a vuoto e corrente di cortocircuito

Esaminando la caratteristica esterna di un bipolo elettrico è possibile definire le due seguenti grandezze:

Tensione a vuoto V_0. E' la tensione che si ha ai morsetti del bipolo quando è nulla la corrente che vi circola, ovvero quando i due morsetti del bipolo sono sconnessi dal sistema elettrico. Il suo valore è dato dalla tensione nel punto di intersezione della caratteristica esterna con l'asse delle tensioni (I = 0).

Corrente di cortocircuito I_{cc}. E' la corrente che si manifesta nel bipolo elettrico quando è nulla la tensione ai morsetti, ovvero quando i due morsetti del bipolo sono connessi direttamente tra di loro. Il suo valore è dato dalla corrente nel punto di intersezione della caratteristica esterna con l'asse delle correnti ($\Delta V = 0$).

In base ai valori assunti da V_0 e I_{cc} i bipoli elettrici si suddividono in:

- **bipoli passivi**, quando sia la tensione a vuoto che la corrente di cortocircuito sono entrambe e, di conseguenza, la caratteristica voltamperometrica passa per l'origine degli assi.
- **bipoli attivi**, quando sia la tensione a vuoto che la corrente di cortocircuito sono entrambe diverse da 0 e, di conseguenza, la caratteristica non passa per l'origine degli assi.

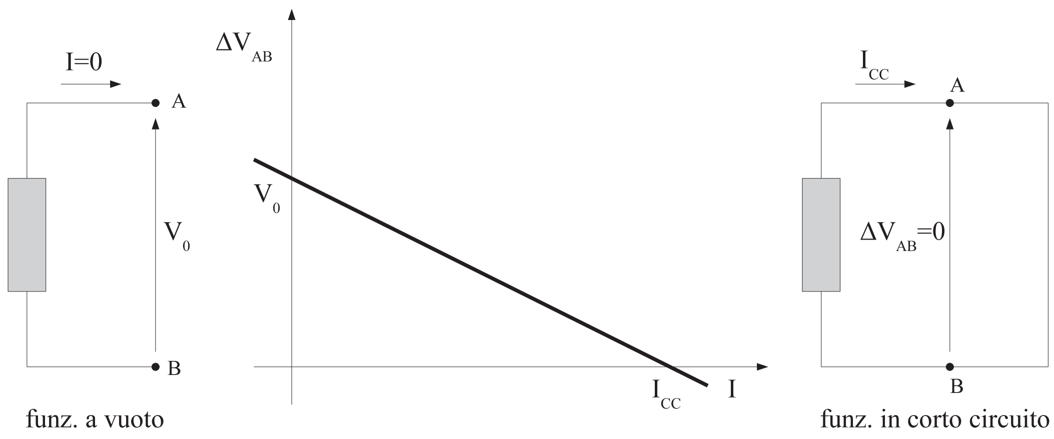


Figura 3.3: Tensione a vuoto e corrente di cortocircuito.

Esempi di bipolo passivo sono:

- il resistore: in esso avviene la trasformazione di energia elettrica in calore.
- il condensatore: in esso avviene la trasformazione di energia elettrica in energia potenziale elettrostatica.
- l'induttore: in esso avviene la trasformazione di energia elettrica in energia potenziale magnetica.

Esempi di bipolo attivo sono:

- il generatore a corrente continua[1]; in esso avviene la trasformazione di energia meccanica in energia elettrica.
- il motore a corrente continua: in esso avviene normalmente la trasformazione di energia elettrica in energia meccanica.
- La pila: essa trasforma energia chimica in energia elettrica.

Occorre tenere presente che sia il generatore che il motore a corrente continua sono due esempi di macchine elettriche, e come tali godono della proprietà di *reversibilità*. Ad esempio, se si impone la rotazione dell'albero di un motore a corrente continua ai capi dei due morsetti di alimentazione si rileva la presenza di una tensione; ciò significa che sta funzionando come un generatore. Se invece applichiamo una tensione ai capi di un generatore a corrente continua si nota che il suo albero inizia a muoversi, ovvero esso sta funzionando come motore.

Le pile generalmente non godono della proprietà di reversibilità, anche se nel caso delle pile ricaricabili si cerca di ottenere qualcosa di simile.

Da questa carrellata si può intuire che i bipoli attivi sono bipoli elettrici che sono in grado di funzionare sia da generatori che da utilizzatori, mentre i bipoli passivi possono funzionare solo da utilizzatori; infatti, quando vengono isolati dal resto del sistema elettrico attraverso un cortocircuito o aprendo il circuito (funzionamento a vuoto) non sono in grado nè di erogare corrente nè di mantenere autonomamente una tensione ai loro capi.

Nei bipoli attivi, a differenza dei passivi, i due morsetti sono dotati di segno, o polarità. In particolare, quando essi funzionano da generatori il morsetto da cui fuoriesce la corrente è denominato morsetto positivo, mentre quando funzionano da utilizzatori il morsetto positivo è il morsetto da cui entra la corrente.

[1]Denominato comunemente *dinamo*

Riassumendo nei **bipoli passivi** avviene la trasformazione di energia elettrica in calore od in energia ancora di tipo elettrico, mentre nei **bipoli attivi** avviene la trasformazione di altra energia in energia elettrica oppure di energia elettrica in energia diversa dall'energia termica e dall'energia elettrica.

La determinazione sperimentale della caratteristica esterna di un bipolo attivo funzionante come generatore può essere effettuata con l'ausilio di un reostato R (figura 3.4), ovvero un bipolo passivo dotato di una resistenza variabile in funzione della posizione di una presa intermedia mobile, denominata *cursore*.

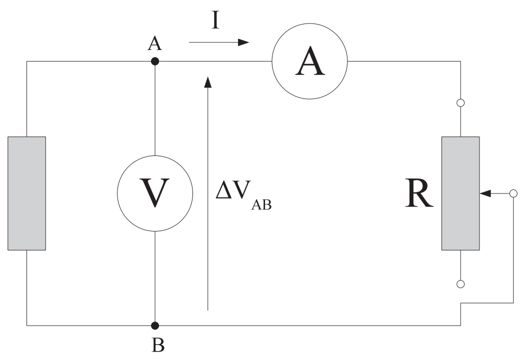


Figura 3.4: Determinazione sperimentale della caratteristica esterna di un bipolo attivo.

Variando la posizione del cursore si ottengono diverse coppie di valori di tensione e corrente rilevati rispettivamente dall'amperometro A e dal voltmetro V. Se il bipolo attivo si comporta in modo lineare tutti i punti individuati dalle le coppie di valori (V,I) devono appartenere alla stessa retta.

Da un punto di vista pratico il funzionamento in cortocircuito è di difficile rilevazione perché ad esso dovrebbe corrispondere una corrente enorme, la quale, a causa dell'effetto Joule, può portare ad un eccessivo riscaldamento dei componenti del circuito di misura. Il funzionamento a circuito aperto, invece, non presenta i pericoli del funzionamento in cortocircuito. Esso si ottiene disinserendo il reostato.

3.3 Bipoli ideali

Lo studio dei sistemi elettrici impone la modellizzazione di alcuni componenti elettrici reali come il generatore elettrico, i carichi resistivi, i conduttori di collegamento, ecc., mediante degli elementi aventi dei comportamenti ben definiti e soggetti a determinate ipotesi semplificative. Per questo motivo vengono introdotti i bipoli elettrici ideali, i quali sono dei bipoli lineari astratti dalla cui composizione possiamo ottenere la modellizzazione di sistemi elettrici anche complessi.

3.3.1 Generatore ideale di tensione

E' un bipolo attivo che mantiene ai suoi morsetti una tensione costante per qualunque corrente erogata. La tensione si indica con E ed è denominata **forza elettromotrice** o **tensione impressa**. La sua equazione caratteristica è:

$$\Delta V = E$$

Il simbolo del bipolo e la sua caratteristica esterna sono rappresentati in figura 3.5.

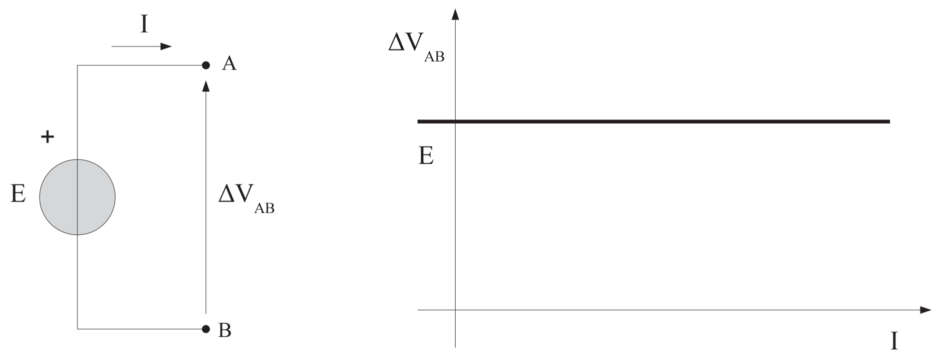


Figura 3.5: Generatore ideale di tensione.

3.3.2 Generatore ideale di corrente

E' un bipolo attivo che eroga dai suoi morsetti una corrente costante a qualunque tensione. La corrente si indica con I_0 ed è denominata **corrente impressa**. La sua equazione caratteristica è:

$$I = I_0$$

Il simbolo del bipolo e la sua caratteristica esterna sono rappresentati in figura 3.6.

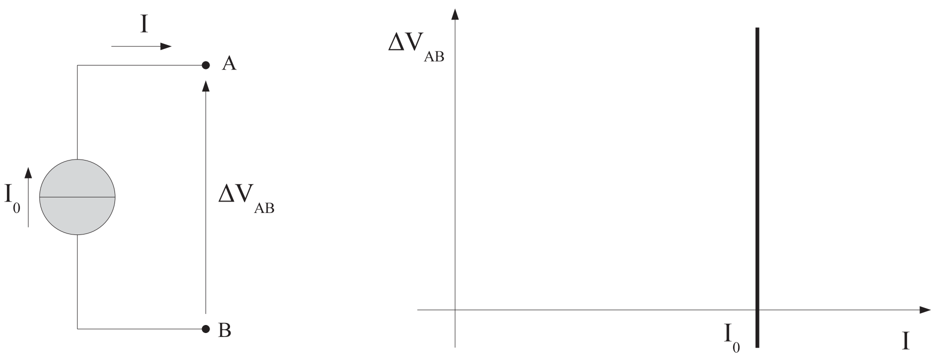


Figura 3.6: Generatore ideale di corrente.

3.3.3 Resistore ideale

E' un bipolo passivo che mantiene un valore di resistenza costante qualunque siano i valori della tensione e della corrente. La sua equazione caratteristica deriva dalla legge di Ohm:

$$\Delta V_{AB} = R \cdot I \qquad I = G \cdot \Delta V_{AB}$$

La caratteristica esterna è una retta passante per l'origine, in conformità al fatto che è un bipolo passivo, avente inclinazione dipendente dal valore di R o di G.

Questo bipolo approssima il comportamento dei resistori reali, nei quali il valore della resistenza dipèende dalla temperatura e da altre cause. Esistono diverse tipologie di resistori, anche molto diverse tra loro, che si differenziano principalmente per la potenza elettrica che sono in grado di dissipare senza subire danni.

3.3.4 Cortocircuito ideale

E' un bipolo passivo che mantiene ai suoi morsetti una tensione nulla per qualunque valore della corrente che lo attraversa. Pertanto la sua equazione è semplicemente:

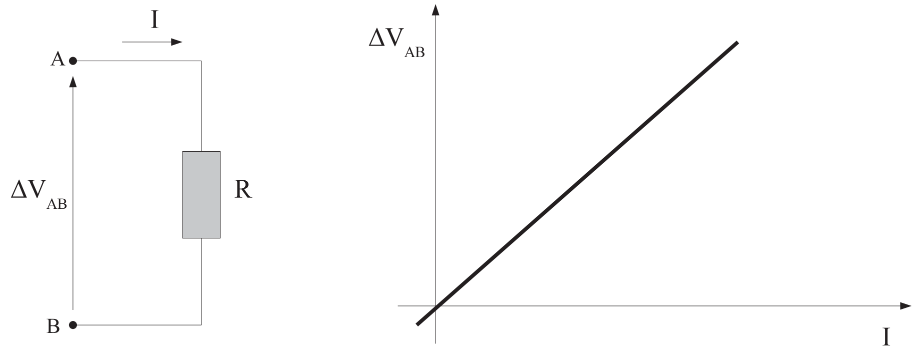


Figura 3.7: Resistore ideale.

$$\Delta V_{AB} = 0$$

Il cortocircuito si rappresenta con una linea. In sostanza possono essere assimilati a cortocircuiti tutti i conduttori di collegamento tra un bipolo e l'altro. Il cortocircuito ideale è assimilabile a un resistore ideale di resistenza nulla per il quale si ha sempre:

$$\Delta V_{AB} = 0 \cdot I = 0$$

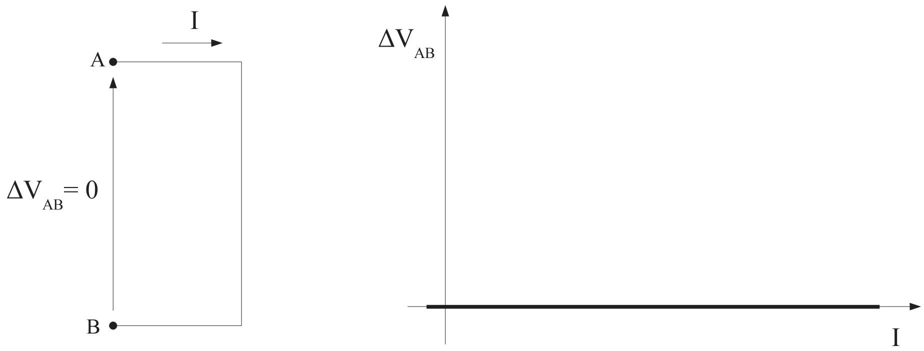


Figura 3.8: Cortocircuito ideale.

3.3.5 Circuito aperto ideale

E' un bipolo passivo interessato da corrente nulla per qualunque valore di tensione posto ai suoi capi. La sua equazione consiste semplicemente in:

$$I = 0$$

Questo bipolo approssima un qualsiasi circuito aperto, come ad esempio un interruttore aperto. Gli interruttori, in realtà, quando sono sottoposti a d.d.p. molto elevate possono essere interessati dal fenomeno dell'arco elettrico. Il circuito aperto ideale può essere considerato anche una resistenza di valore infinito.

Esercizio proposto 3.3.1. *Per ciascuna delle seguenti caratteristiche esterne, espresse in forma analitica, disegnare la loro rappresentazione grafica ed indicare a quale tipo di bipolo appartengono.*

1. $\Delta V = 12 \cdot I$.

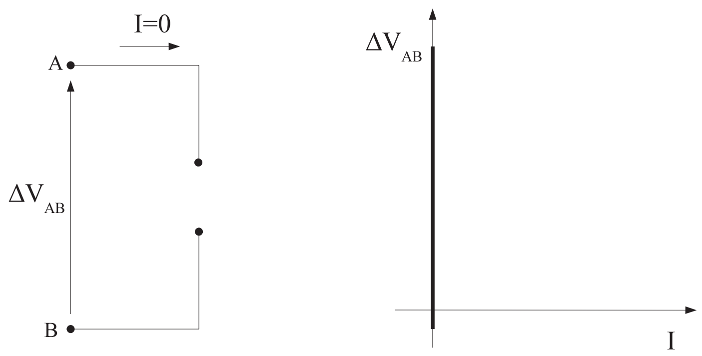


Figura 3.9: Circuito aperto ideale.

2. $I = 10A$.
3. $\Delta V = 5V$.
4. $I = 0A$.

3.4 Bipoli collegati in serie e in parallelo.

Si considerino due bipoli elettrici collegati come in figura 3.10.

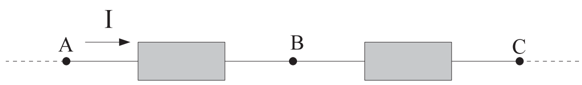


Figura 3.10: Due bipoli in serie.

Il collegamento dei due bipoli della figura è denominato *collegamento in serie*. Esso è tale per cui la corrente che interessa il bipolo con d.d.p V_{AB} è la stessa che interessa il bipolo con d.d.p. V_{BC}. In generale **due o più bipoli elettrici sono collegati in serie quando sono soggetti alla stessa corrente**.

Nella figura 3.11 i bipoli elettrici sono collegati in *parallelo*. In questo caso ciò che li caratterizza è l'essere sottoposti alla stessa differenza di potenziale.

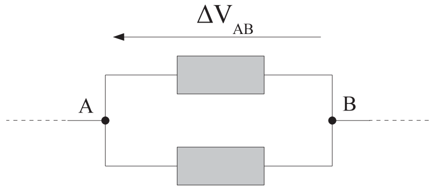


Figura 3.11: Due bipoli in parallelo.

In generale **due o più bipoli elettrici sono collegati in parallelo quando sono sottoposti alla stessa differenza di potenziale**.

3.5 Convenzioni e proprietà delle differenze di potenziale

La differenza di potenziale esistente tra due punti A ed B di un sistema elettrico si può rappresentare con il simbolo V_{AB}, omettendo il simbolo Δ, dove gli indici inferiori (A ed B) indicano tra quali punti del sistema si intende riferita la d.d.p..

$$V_{AB} = V_A - V_B$$

Si rammenta che:

- se $V_A > V_B \quad \Rightarrow \quad V_{AB} > 0$;
- se $V_B > V_A \quad \Rightarrow \quad V_{AB} < 0$.

Occorre prendere bene confidenza con le convenzioni e le proprietà delle d.d.p. per poter risolvere in seguito abbastanza agevolmente sistemi elettrici anche complessi.

Si prendono in considerazione i quattro casi elementari riportati in figura 3.12. Per ciascuno di essi si è indicata la d.d.p. tenendo conto di quanto esposto nel paragrafo 3.3.

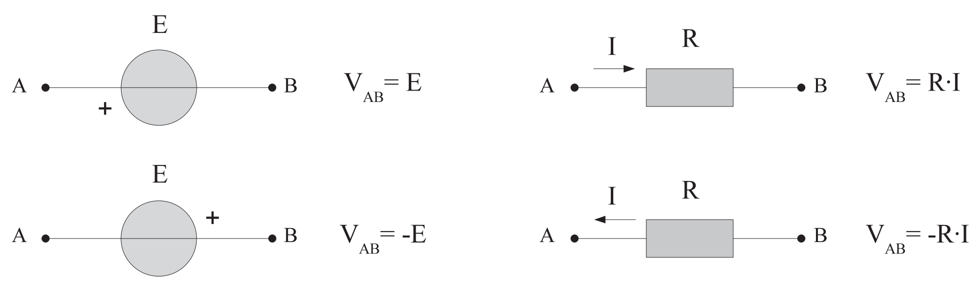
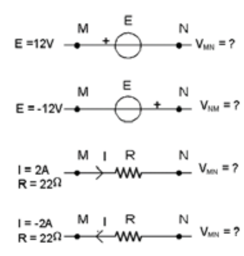


Figura 3.12: d.d.p. in quattro casi elementari.

I casi del generatore ideale di corrente e del circuito aperto non sono stati presi in considerazione perché la d.d.p. ai loro capi dipende dai vincoli imposti dal sistema elettrico in cui essi vengono inseriti.

Esempio 3.5.1. *si determinino le seguenti differenze di potenziale*



Soluzione.

Le d.d.p. calcolate prima sono relative a casi elementari; in generale, però, i punti A e B comprendono più bipoli elettrici. In tale caso è utile ricordare la proprietà fondamentale delle differenze di potenziale: il principio di addittività delle d.d.p.

3.6 Principio di additività delle d.d.p.

Si riprendano in considerazione i due bipoli elettrici collegati in serie della figura 3.10. La differenza di potenziale tra i due estremi A e C si ottiene facendo la somma delle differenze di potenziale ai capi di ciascun bipolo.

Infatti si ha che:

$$V_{AC} = V_A - V_C = V_A - V_B + V_B - V_C = V_{AB} + V_{BC}$$

Le cose non cambiano se si è in presenza di tre o più bipoli collegati in serie (figura 3.13). In generale vale il seguente principio: **la differenza di potenziale ai capi di n bipoli collegati in serie è pari alla sooma delle differenze di potenziale ai capi di ciascun bipolo elettrico**.

$$V_T = V_1 + V_2 + \ldots + V_n \tag{3.3}$$

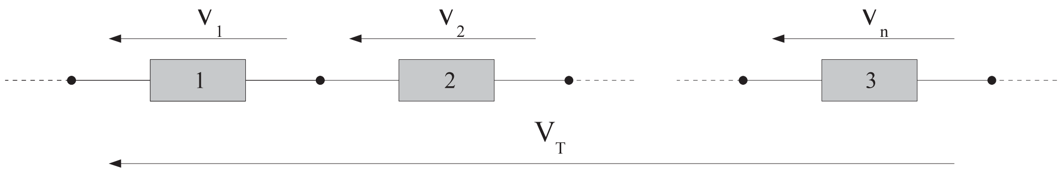
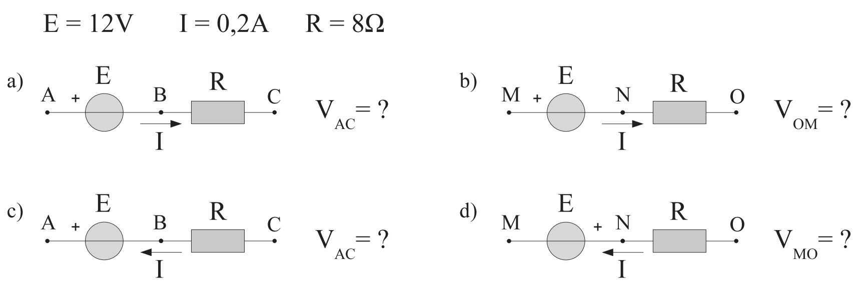


Figura 3.13: d.d.p. per n bipoli in serie.

Esso è conosciuto con il nome di principio di additività delle differenze di potenziale.

Esempio 3.6.1. *Determinare le differenze di potenziale indicate nei seguenti casi.*



Soluzione.

Caso a)

$$V_{AC} = V_{AB} + V_{BC} = E + R \cdot I = 12 + 8 \cdot 0,2 = 13,6\ V$$

Caso b)

$$V_{OM} = V_{ON} + V_{NM} = (-R \cdot I) + (-E) = -8 \cdot 0,2 - 12 = -13,6\ V$$

3.7 Reti elettriche

Per *rete elettrica si intende un sistema elettrico comunque complesso, realizzato utilizzando componenti elettrici, in cui circolano una o più correnti elettriche.*

Il sistema elettrico completo ed autonomo più semplice possibile è il *circuito elettrico*. L'esempio più elementare di circuito elettrico è già stato visto in precedenza quando sono stati introdotti i concetti di generatore ed utilizzatore.

In figura 3.14 è riportato un circuito elettrico composto solo da un generatore di tensione collegato ad un bipolo resistivo.

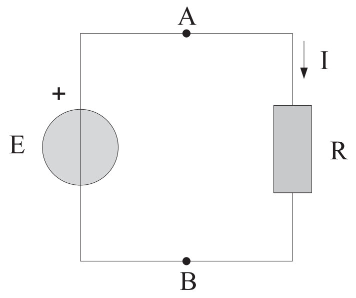


Figura 3.14: Circuito elettrico elementare.

Il circuito è attraversato da una corrente I il cui valore si può determinare agevolmente poiché si sa che la tensione V_{AB} ai capi del bipolo resistivo è pari alla f.e.m. E del generatore ideale di tensione.

Applicando la prima legge di Ohm si ottiene:

$$I = \frac{V_{AB}}{R} = \frac{E}{R}$$

I circuiti elettrici possono avere una complessità maggiore, come ad esempio quello riportato in figura 3.15.

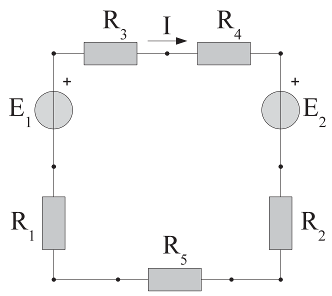


Figura 3.15: Circuito elettrico complesso.

Per quanto possa essere complesso un circuito elettrico, si intuisce che tutti gli elementi che lo compongono sono attraversati dalla stessa corrente elettrica.

Un ulteriore elemento di complicazione è la presenza di eventuali biforcazioni (figura 3.16). In questo caso non si parla non più di circuiti elettrici ma, più propriamente di *reti elettriche*.

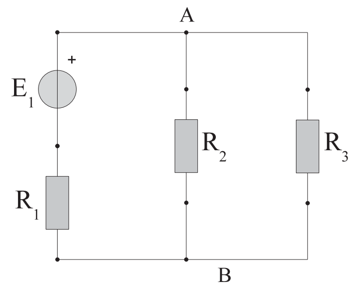


Figura 3.16: Esempio di rete elettrica

Nella rete di figura 3.16 si possono individuare diversi *elementi topologici* [2].
Una rete elettrica è costituita dalla composizione dei seguenti tipi di elementi topologici:

- **maglia**: un possibile percorso chiuso della rete elettrica
- **ramo**: un tronco della rete elettrica, compreso tra due nodi, percorso da una sola corrente.
- **nodo**: punto di confluenza tra tre o più rami.

Ad esempio nella rete di figura 3.16 sono presenti rispettivamente 3 maglie, 2 nodi e 3 rami.

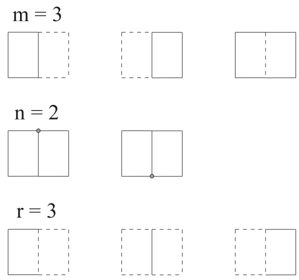


Figura 3.17: Maglie, nodi e rami in una rete elettrica.

Esercizio proposto 3.7.1. *Disegnare una o più reti elettriche e determinare il numero* ***n*** *di nodi, il numero* ***m*** *di maglie ed il numero* ***r*** *di rami presenti in esse.*

3.8 Principi di Kirchhoff

Nello studio delle reti elettriche capita di dover determinare alcune grandezze elettriche incognite (effetti) in base al valore assunto da altre grandezze elettriche note (cause). Per risolvere questo problema è necessario disporre di equazioni che mettano in relazione le cause con gli effetti. Lo scienziato tedesco Gustav Robert Kirchhoff (1824-1887) ricavò i due principi fondamentali per lo studio delle reti elettriche che permettono di scrivere tali equazioni. Egli dedusse i suoi principi da due leggi fisiche generali che non riguardano solo le reti elettriche.

3.8.1 Primo principio di Kirchhoff

Si consideri il nodo riportato in figura 3.18 appartenente ad una generica rete elettrica. In esso convergono diversi rami, ognuno percorso da una corrente elettrica avente il verso convenzionale è indicato in figura.

Si può ragionevolmente ritenere che la corrente totale che esce dal nodo sia uguale alla corrente totale che entra in esso. D'altronde se ciò non accadesse si avrebbe un accumulo od una rarefazione progressiva di cariche elettriche a seconda del termine che risulta maggiore. In pratica si ritiene costante la carica totale presente in ciascuna parte di una rete elettrica ovvero si ritiene valido il *principio di stazionarietà della carica elettrica*.

In regime stazionario la carica elettrica presente nel nodo deve rimanere costante e quindi, in uno stesso intervallo di tempo, alla carica che entra nel nodo deve corrispondere una uguale quantità di carica in uscita da esso.

Quanto appena affermato costituisce ***il primo principio di Kirchhoff***.

[2]Il termine topologico deriva dal greco topòs che significa luogo.

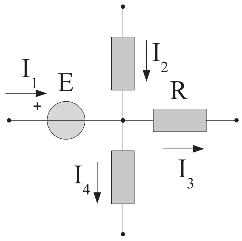


Figura 3.18: Primo principio di Kirchhoff

In un nodo la somma delle correnti entranti è uguale alla somma delle correnti uscenti.

$$\sum I_{entranti} = \sum I_{uscenti} \tag{3.4}$$

Considerando positive le correnti entranti e negative le correnti uscenti il primo principio di Kirchhoff può essere espresso nel seguente modo:

In un nodo la somma algebrica delle correnti è nulla.

$$\sum \pm I = 0 \tag{3.5}$$

Applicando il primo principio di Kirchhoff a ciascun nodo di una rete elettrica si ottiene un numero di equazioni lineari pari al numero **n** di nodi. Queste equazioni sono denominate *equazioni di nodo*.

Esempio 3.8.1. *Determinare la corrente I_2 entrante nel nodo di figura sapendo che $I_1 = 2,2A$, $I_3 = 0,1A$ e $I_4 = 470mA$.*

Soluzione. Dal primo principio di Kirchhoff si ha:

$$I_1 + I_2 = I_3 + I_4$$

Per cui:

$$I_2 = I_3 + I_4 - I_1 = 0,1 + 0,47 - 2,2 = -1,63\ A$$

Il segno negativo indica che il verso effettivo della corrente I_2 è opposto a quello riportato in figura, per cui in realtà I_2 è una corrente uscente.

3.8.2 Secondo principio di Kirchhoff

Il campo elettrico, così come quello gravitazionale è di tipo conservativo. Ciò implica che la variazione di energia potenziale subita da una carica di prova q per passare da un punto a un altro della rete non dipende dal percorso seguito. Vediamo cosa comporta questo aspetto.

Si consideri una maglia presente all'interno di una generica rete elettrica (Figura 3.19).

Vogliamo determinare la differenza di potenziale V_{AE}. Applicando il principio di addittività delle d.d.p. possiamo però affermare che:

$$V_{AE} = V_{AB} + V_{BC} + V_{CD} + V_{DE}$$

oppure, in modo equivalente, scegliendo l'altro percorso

$$V_{AE} = V_{AG} + V_{GF} + V_{FE}$$

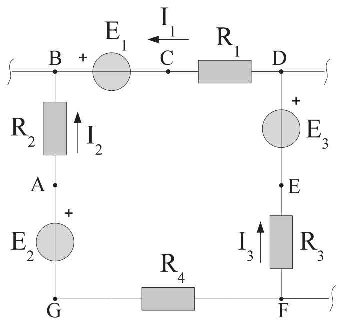


Figura 3.19: Secondo principio di Kirchhoff

Essendo il campo elettrico conservativo è evidente che la differenza di potenziale V_{AE} calcolata nel primo modo è uguale alla differenza di potenziale calcolata nel secondo modo. Mettendo insieme le due relazioni si ottiene

$$V_{AB} + V_{BC} + V_{CD} + V_{DE} = V_{AG} + V_{GF} + V_{FE}$$

Da cui, dopo semplici passaggi:

$$V_{AB} + V_{BC} + V_{CD} + V_{DE} + V_{EF} + V_{FG} + V_{GA} = 0$$

Si intuisce che tensioni precedentemente elencate non possono assumere tutte solo un valore positivo o solo negativo, ma, in base al regime di funzionamento della rete, alcune di esse saranno positive, altre saranno positive. Pertanto la somma toria precedente non è una soomatoria aritmetica ma algebrica.

Possiamo affermare in termini generali il secondo principio di Kirchhoff nel seguente modo:

In una maglia la somma algebrica delle tensioni è uguale a zero.

La precedente affermazione può essere espressa con un linguaggio matematico mediante la seguente espressione analitica:

$$\sum \pm V_i = 0$$

Per ogni maglia presente in una rete elettrica il secondo principio di Kirchhoff permette di determinare una equazione, denominata (*equazione di maglia*).

Per scrivere correttamente le equazioni di maglia possono essere di aiuto le seguenti regole pratiche:

- fissare un verso di percorrenza
- considerare positive le f.e.m. che hanno il verso concorde con il verso di percorrenza e negative le f.e.m. che hanno il verso discorde con il verso di percorrenza
- considerare positive le cadute di tensione date da correnti concordi con il verso di percorrenza e negative le cadute di tensione date da correnti con il verso concorde con il verso di percorrenza.

Esempio 3.8.2. *Scrivere l'equazione di maglia relativa alla maglia di figura 3.19.*

Soluzione. Utilizzando le regole pratiche appena esposte e fissando il verso di percorrenza orario si ottiene la seguente equazione:

$$E_1 - R_1 \cdot I_1 + E_3 - R_3 \cdot I_3 + R_4 \cdot I_2 - E_2 + R_2 \cdot I_2 = 0$$

Rimaneggiando l'equazione dell'esempio 3.8.2 si ottiene la seguente espressione:

$$E_1 - E_2 + E_3 = R_1 \cdot I_1 - R_2 \cdot I_2 + R_3 \cdot I_3 - R_4 \cdot I_2$$

Questa espressione suggerisce il seguente modo di enunciare il secondo principio di Kirchhoff.

In una maglia, la somma algebrica delle forze elettromotrici uguaglia la somma algebrica delle cadute di potenziale.

All'enuciato precedente corrisponde la seguente espressione analitica:

$$\sum \pm E = \sum \pm R \cdot I \tag{3.6}$$

Esercizio proposto 3.8.1. *Determinare tutte le equazioni di maglia relative alla rete elettrica di figura 3.20.*

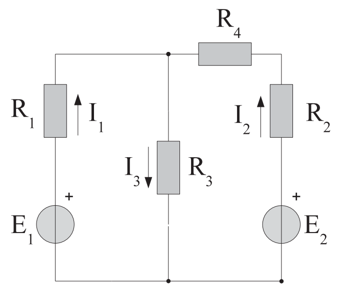


Figura 3.20: Esercizio proposto 3.8.1.

Esercizio proposto 3.8.2. *Per la rete di figura determinare la tensione V_{AB}, la tensione V_{AD}, la tensione V_{AC}, la corrente I_2, le equazioni ai nodi e le equazioni di maglia.*

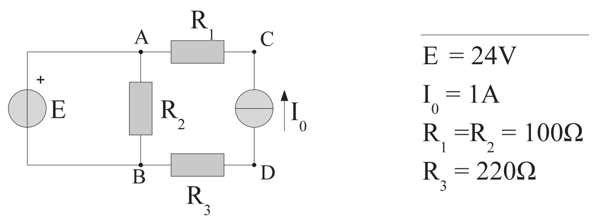


Figura 3.21: Esercizio proposto 3.8.2.

3.9 Reti elettriche con una sola maglia

Le reti elettriche composte da una sola magliaI sono denominate anche circuiti elettrici. In essi non sono presenti nodi, pertanto vi circola una sola corrente I e i bipoli sono connessi in serie.

Iniziamo da un esempio. Si consideri il circuito elettrico riportato in figura 3.22. Per l'azione del generatore di tensione scorre una corrente I che provoca due cadute di tensione su R_1 e su R_2.

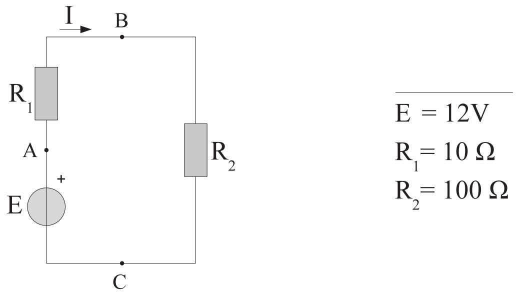


Figura 3.22: Soluzione di un circuito elettrico

Risolvere questo circuito elettrico equivale a determinare il valore della corrente I che circola in esso. Il verso della corrente è stato fissato tenendo conto che in un generatore la corrente esce dal morsetto positivo.

Applichiamo il secondo principio di Kirchhoff scegliendo il verso orario e partendo dal punto

$$V_{AB} + V_{BC} + V_{CD} = 0$$

Sostituendo, si ha:

$$R_1 \cdot I + R_2 \cdot I + (-E) = 0$$

$$E = (R_1 + R_2) \cdot I$$

Da cui si ottiene:

$$I = \frac{E}{R_1 + R_2} = \frac{12}{10 + 100} \cong 0,109A$$

Analizziamo ora un caso più complesso.

Esempio 3.9.1. *Determinare la corrente I che circola attraverso il seguente circuito.*

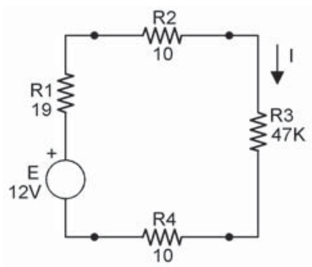


Figura 3.23: Esempio 3.9.1

Soluzione. Applicando Kirchhoff si ottiene:

$$I = \frac{E_1 - E_2}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{12 - 60}{0,2 + 0,3 + 19,5} = -2,4A$$

Il segno negativo indica che la corrente scorre effettivamente nel verso opposto. Questo aspetto poteva essere intuito subito considerando che la f.e.m. E_2 prevale sulla f.e.m. E_1 e quindi è essa che impone il verso alla corrente.

Osservando le espressioni trovate per la corrente I negli esempi precedenti possiamo enunciare quella che è comunemente conosciuta come *legge di Ohm per un circuito chiuso*.

La corrente circolante in un circuito chiuso è data dal rapporto tra la somma algebrica delle f.e.m. del generatore e la resistenza totale del circuito

---

Esercizio proposto 3.9.1. *Nell'esempio 3.9.1 il verso della corrente I è stato fissato tenendo conto della polarità del generatore di tensione E_1. Cosa sarebbe successo se avessimo scelto il verso opposto ?*

Esercizio proposto 3.9.2. *Determinare la d.d.p. V_{EC} dell'esempio 3.9.1.*

3.10 Bipoli equivalenti

*Un bipolo si dice **equivalente** ad una rete elettrica, vista da due punti A e B, quando applicando al bipolo equivalente la stessa differenza di potenziale V_{AB} applicata alla rete si ottiene la stessa corrente I.*

In pratica se si sostituisce la porzione di rete designata con il suo bipolo equivalente la rete elettrica esterna alla rete designata non modifica il suo comportamento.

Una prima applicazione del concetto di bipolo equivalente si rende disponibile con le reti di resistori, ovvero reti elettriche in cui sono presenti solo resistori.

Definizione di resistenza equivalente

*Una resistenza si dice **equivalente** di una rete di resistori vista da due punti A e B quando applicando alla resistenza la stessa differenza di potenziale V_{AB} applicata alla rete si ottiene la stessa corrente I.*

La seguente figura mostra una rete di resistori e la sua resistenza equivalente rispetto ai punti A e B.

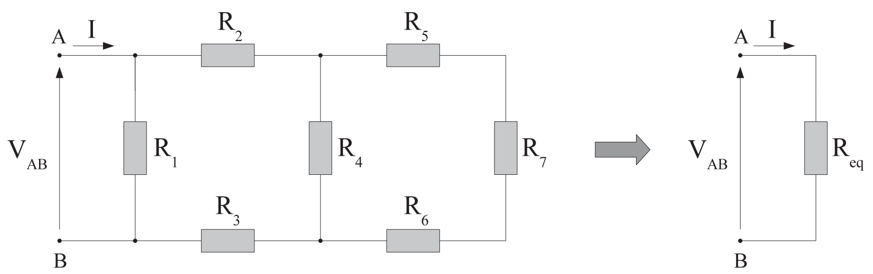


Figura 3.24: Resistenza equivalente di una rete di resistori

La resistenza equivalente si può ottenere operativamente calcolando la corrente I che attraversa la rete elettrica in funzione della d.d.p. V_{AB} ed effettuando poi il rapporto tra V_{AB} e l'espressione I. Si noterebbe che, immancabilmente, la tensione V_{AB} presente sia al numeratore che al denominatore si semplifica ottenendo così un'espressione dipendente dai soli valori delle resistenze.

In realtà, per ottenere la resistenza equivalente di una rete di resistori si segue un algoritmo in cui è di grande aiuto considerare la rete elettrica come una composizione di resistori in serie e in parallelo.

3.10.1 Resistori in serie

Vogliamo determinare la resistenza equivalente di n resistori collegati in serie. Consideriamo, a tale scopo, gli n resistori della figura , a cui è applicata la tensione V_{AB} ed attraversati dalla corrente I.

Applichiamo il secondo principio di Khirchhoff al circuito di figura:
Sapendo che la resistenza equivalente di ottiene facendo il rapporto tra V_{AB} ed I otteniamo che:
Nel caso di tre resistori in serie, utilizzando lo stesso procedimento otteniamo:
Generalizzando ad **n** resistori in serie si ha:
Osservazioni
Le formule precedenti ci permettono di fare le seguenti osservazioni:

- La resistenza equivalente di più resistori in serie è sempre più grande della più grande delle resistenze.
- La serie di due resistenze uguali è pari al doppio del valore della singola resistenza

3.10.2 Resistori in parallelo

Due o più dipoli sono in parallelo quando sono connessi tra loro in modo tale da essere sottoposti alla stessa differenza di potenziale. Vogliamo determinare la resistenza equivalente di due resistori in parallelo.

Applichiamo il primo principio di Khirchhoff al nodo A della rete di figura:
Applicando la legge di Ohm ai resistori R_1 e R_2 si ha:
Sostituendo nell'espressione di I si ottiene:
da cui, sapendo che la resistenza equivalente di ottiene facendo il rapporto tra V_{AB} ed I:
Nel caso di tre resistori in parallelo, utilizzando lo stesso procedimento otteniamo:
Generalizzando ad **n** resistori in parallelo si ha:

3.10.3 Resistori in serie-parallelo

3.10.4 Resistori collegati a stella e a triangolo

3.11 Reti elettriche con un solo generatore

Le reti elettriche in cui vi è presente un solo generatore che *vede* una rete resistiva più o meno complessa possono essere risolte applicando un algoritmo composto dai seguenti passi

- individuazione dei bipoli resistivi collegati in serie, in parallelo, a stella e a triangolo;
- riduzione della rete resistiva ad un unico resitore equivalente;
- determinazione della corrente erogata dal generatore di tensione;
- determinazione delle differenze di potenziale e delle correnti relative a ciascun resistore;

Esempio 3.11.1. *Si determinino le correnti circolanti nei rami e le tensioni ai capi di ciascun bipolo passivo della rete elettrica di figura 3.25* ($R_1 = R_2 = 10\Omega, R_3 = 15\Omega, E_1 = 60V$)

Soluzione. Si determina innanzitutto la resistenza totale R_{eq} vista dalla f.e.m. E_1.

$$R_{eq} = R_1 + \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3} = 70\Omega$$

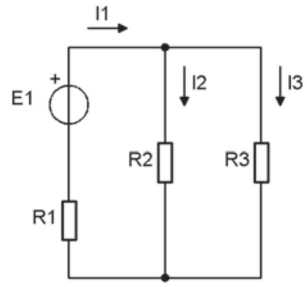


Figura 3.25:

Quindi si determina I_1

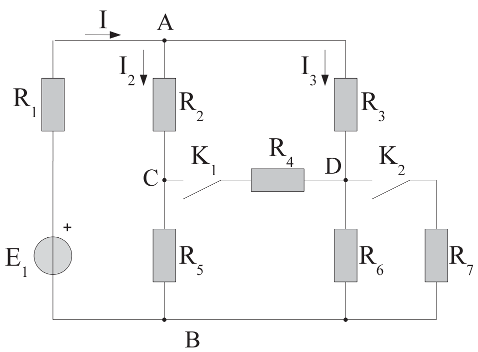
$$I_1 = \frac{E}{R_{eq}} \cong 0.857A$$

e poi I_2 e I_3, applicando la regola del partitore di corrente:

$$I_2 = \frac{R_3}{R_2 + R_3} \cdot I_1 \cong 0.6 \cdot 0.857 = 0.514A$$

$$I_3 = \frac{R_2}{R_2 + R_3} \cdot I_1 \cong 0.4 \cdot 0.857 = 0.343A$$

Esempio 3.11.2. *Data la rete elettrica di figura*



$E_1 = 10V$
$R_1 = 15\ \Omega$
$R_2 = R_3 = R_4 = 10\ \Omega$
$R_5 = R_6 = R_7 = 20\ \Omega$

determinare le seguenti grandezze elettriche:

- *la resistenza equivalente R_{AB} vista dalla serie di E_1 ed R_1;*
- *la corrente I;*
- *la d.d.p. V_{AB};*
- *la d.d.p. V_{CD};*
- *le correnti I_2 e I_3.*

considerando prima K_1 aperto e K_2 aperto, poi K_1 chiuso e K_2 aperto ed infine K_1 chiuso e K_2 chiuso:

Soluzione.

3.12 Reti elettriche con più maglie

E' evidente che una rete elettrica dotata di più maglie, come ad esempio quella riportata in figura 3.8.1, è sicuramente dotata di due o più nodi e di tre o più rami. Larisoluzione di una rete elettrica consiste nella *determinazione delle correnti circolanti in ciascun ramo.*

Dal valore assunto da ciascuna corrente di ramo si risale facilmente alle tensioni applicate a ciascun bipolo applicando le equazioni caratteristiche di ciascuno bipolo, come ad esempio la legge di Ohm.

In realtà non sempre è richiesta la soluzione completa della rete elettrica, a volte è richiesta la determinazione della corrente in un solo ramo o della tensione ai capi di un certo bipolo. In tale caso si parla di risoluzione parziale della rete elettrica.

Una rete elettrica è lineare quando tutti i bipoli elettrici che la compongono sono lineari. L'ipotesi di linearità permette di applicare per la soluzione completa o parziale di una rete elettrica una serie di metodi e di teoremi che facilitano notevolmente il compito. In seguito verranno esposti tali strumenti.

Si è già visto che quando vi è presente un solo generatore si è in grado di risolvere completamente la rete elettrica applicando quello che può essere definito il *metodo della resistenza equivalente.* Ma quando i generatori sono più di uno il metodo precedente non è più applicabile. In questo caso è necessario ricorrere a metodi di soluzione completa più sistematici. Il primo di essi è il metodo di Kircchoff.

3.12.1 Metodo di Kirchhoff

Poiché le incognite sono in numero di r, occorre disporre di un sistema di r equazioni indipendenti. Queste possono essere determinate con l'ausilio del primo e del secondo principio di Kirchhoff mediante l'applicazione del seguente metodo.

1. Assegnazione dei versi alle correnti di ciascun ramo.
2. Scrittura di n - 1 equazioni di nodo.
3. Scelta di r - (n - 1) maglie indipendenti e del loro verso di percorrenza.
4. Scrittura di r - (n - 1).
5. Risoluzione del sistema di r equazioni.
6. Interpretazione dei segni delle correnti convenzionali ottenute per stabilire il verso effettivo delle correnti.

Una maglia è indipendente quando non risulta da nessuna composizione delle maglie indipendenti già scelte.

Esempio 3.12.1. *Si determinino le correnti circolanti nei rami e le tensioni ai capi di ciascun bipolo passivo della rete elettrica di figura 3.26* ($R_1 = R_2 = 10\Omega, R_3 = 15\Omega, E_1 = 60V, E_2 = 40V$)

Soluzione.

Esercizio proposto 3.12.1. *Data la rete elettrica di figura 3.12.1 determinare:*

1. *la resistenza equivalente* R_{AB} *vista dalla serie di* E_1 *e* R_1 *in parallelo a* I_{02}*;*
2. *le correnti di ramo;*

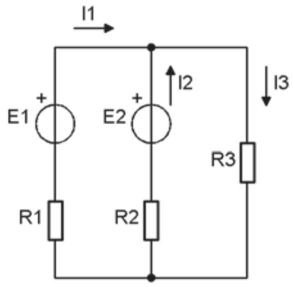
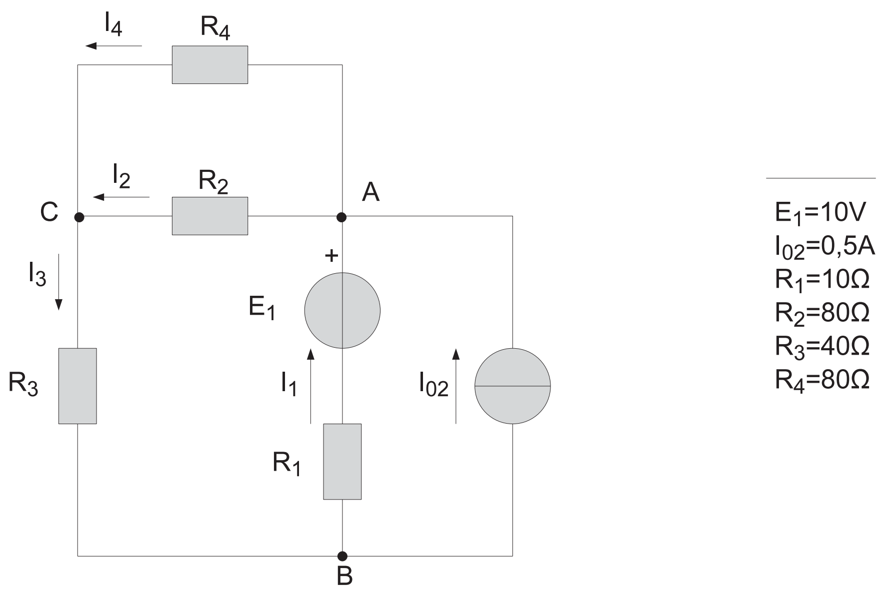


Figura 3.26:

3. *la d.d.p V_{AB};*
4. *la d.d.p V_{AC};*
5. *giustificare se E_1 funziona da generatore o da utilizzatore attivo;*
6. *giustificare se I_{02} funziona da generatore o da utilizzatore attivo;*



3.13 Generatore elettrico reale

In precedenza sono stati introdotti due bipoli attivi ideali, ovvero il generatore ideale di tensione ed il generatore ideale di corrente.

Se si prende in considerazione il comportamento reale di un generatore elettrico reale, come ad esempio una batteria d'auto od un alimentatore da banco, si deve osservare che il generatore ideali di tensione è un modello eccessivamente semplificato di esso. In particolare, introducendo i generatori ideali non si è tenuto conto di due aspetti fondamentali:

- Una parte della potenza generata viene persa all'interno dello stesso generatore elettrico a causa di fenomeni dissipativi di origine elettrica, magnetica e meccanica.

- In generatori reali non sono mai *solo di tensione* o *solo di corrente*. Essi, in realtà, forniscono contemporaneamente sia una tensione che una corrente.

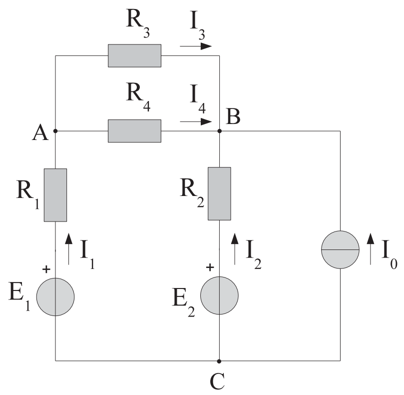
Per rappresentare un generatore elettrico reale si possono utilizzare due modelli che rispecchiano più fedelmente i due aspetti appena menzionati:

- generatore reale di tensione, formato dalla serie tra un generatore ideale di tensione E, denominato anche f.e.m, e una resistenza R_i, denominata anche resistenza interna;
- generatore reale di corrente, formato dal parallelo tra un generatore ideale di corrente I, denominato anche corrente impressa, e una resistenza R_i, denominata anche resistenza interna;

3.13.1 Generatore reale di tensione

Esercizio proposto 3.13.1. *Data la rete elettrica di figura 3.13.1 determinare:*

1. *le correnti di ramo;*
2. *la d.d.p V_{AB};*
3. *la d.d.p V_{AC};*
4. *giustificare se il generatore reale $E_1 - R_1$ funziona da generatore o da utilizzatore attivo;*
5. *disegnare la caratteristica esterna del generatore reale $E_1 - R_1$ riportando con precisione il punto di lavoro;*
6. *giustificare se il generatore reale $E_2 - R_2$ funziona da generatore o da utilizzatore attivo;*
7. *disegnare la caratteristica esterna del generatore reale $E_2 - R_2$ riportando con precisione il punto di lavoro;*
8. *giustificare se I_0 funziona da generatore o da utilizzatore attivo;*



$E_1 = 40V$
$E_2 = 10V$
$I_0 = 1A$
$R_1 = R_2 = 5\ \Omega$
$R_3 = 200\ \Omega$
$R_4 = 20\ \Omega$

3.13.2 Generatore reale di corrente

3.13.3 Equivalenza tra il generatore reale di tensione ed il generatore reale di corrente

Il generatore reale di tensione ed il generatore reale di corrente sono due modelli dello stesso sistema elettrico, il generatore elettrico.

Le condizioni di equivalenza tra il generatore reale di tensione e il generatore reale di corrente si determinano sottoponendo entrambi i gneratori allo stesso carico e imponendo che la corrente I_C e la tensione V_C presenti sul carico siano uguali.

3.14 Bilancio energetico di una rete elettrica

3.15 Sovrapposizione degli effetti

3.16 Generatori equivalenti di Thevenin e Norton

Nello studio delle reti elettriche affrontato fino ad ora diverse volte si è provveduto a sostituire parti di reti elettriche in altri bipoli o reti elettriche, come nelle seguenti trasformazioni:

- resistenza equivalente;
- trasformazione da stella a triangolo;
- trasformazione da triangolo a stella;
- da generatore reale di tensione a generatore reale di corrente;
- da generatore reale di corrente a generatore reale di tensione.

Tutte queste operazioni di trasformazione soddisfano il *principio di equivalenza agli effetti esterni* che ora enunciamo in modo esplicito e circostanziato.

3.16.1 Teorema di Thevenin

3.16.2 Teorema di Norton

Data una rete elettrica lineare vista da due morsetti, applichiamo al generatore equivalente di Thevenin la trasformazione da generatore reale di tensione a generatore reale di corrente. In questo modo si ottiene un generatore di corrente equivalente alla rete di partenza, denominato comunemente *generatore equivalente di Norton*.

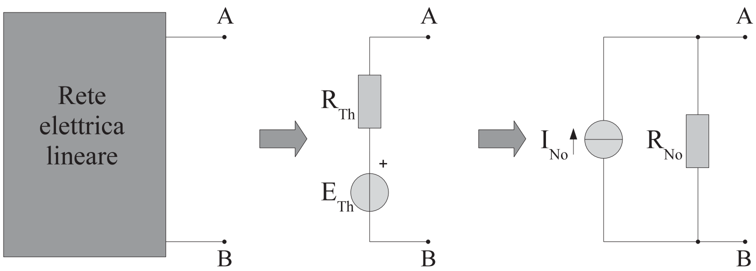


Figura 3.27: Rete equivalente di Norton.

Con brevi passaggi si dimostra che la corrente impressa I_{No} del generatore di Norton è pari alla corrente di cortocircuito. Infatti:

$$I_{No} = \frac{E_{Th}}{R_{Th}} = \frac{V_0}{\frac{V_0}{I_{cc}}} = I_{cc}$$

Il teorema di Norton afferma che:

Una rete elettrica lineare comunque complessa, presa in considerazione tra due morsetti A e B, è equivalente agli effetti esterni ad un generatore reale di corrente con corrente impressa I_{No} pari alla corrente di cortocircuito tra i morsetti A e B e con resistenza interna R_{No} pari alla resistenza equivalente vista sempre dai morsetti A e B dopo avere annullato tutti i bipoli attivi di tensione e di corrente della rete.

Tale teorema è equivalente al teorema di Thevenin ma è meno utilizzato. Infatti nella maggioranza dei casi i generatori presenti nelle reti elettriche sono di tensione e ricavare una rete equivalente in cui sia presente un generatore di corrente non offre particolari vantaggi.

Esempio 3.16.1. *Determinare il valore della tensione ai capi del carico R_L della rete di figura 3.16.1 utilizzando il teorema di Norton.*

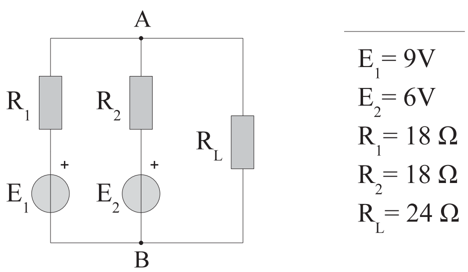


Figura 3.28: Esempio 3.16.1

Soluzione.

I due generatori reali di tensione $E_1 - R_1$ e $E_2 - R_2$ sono equivalenti a due generatori reali di corrente con correnti impresse I_{01} e I_{02} rispettivamente di valore:

$$I_{01} = \frac{E_1}{R_1} = \frac{9}{18} = 0,5\ A$$

$$I_{02} = \frac{E_2}{R_2} = \frac{6}{18} = 0,333\ A$$

Si ottiene allora la seguente rete:

3.17 Partitori di tensione e corrente

3.17.1 Partitori di tensione

Il partitore di tensione è una rete elettrica, composta da due resistori in serie e da una forza elettromotrice, schematizzabile nella sua forma più semplice come in figura.

Scopo del partitore di tensione è ***ottenere una tensione di uscita*** $\boldsymbol{V_O}$ ***di valore inferiore della tensione di alimentazione*** $\boldsymbol{V_{IN}}$ ***del partitore stesso***.

Si possono distinguere due situazioni

Partitore ohmico a vuoto (IO = 0)

Partitore ohmico sotto carico (IO ≠ 0)

3.17.2 Partitori di corrente

Il partitore di corrente è una rete elettrica, composta da due resistori in parallelo, schematizzabile nella sua forma più semplice come in figura.

Scopo del partitore di corrente è di ***erogare al carico una corrente*** $\boldsymbol{I_{RL}}$ ***di valore inferiore alla corrente di alimentazione I del partitore stesso***.

3.18 Domande

1. Esprimere la definizione di circuito elettrico.
2. Che cos'è la forza elettromotrice ?
3. Che differenza c'è tra un generatore elettrico reale e la f.e.m. ?
4. Perché il motore elettrico viene considerato un bipolo attivo alla stregua di un generatore di tensione ?
5. Disegnare e spiegare la caratteristica esterna del generatore reale di tensione.
6. Che cos'é la tensione a vuoto di un bipolo ?
7. Scrivere le espressioni delle potenze e del rendimento del generatore reale di tensione.
8. Definire cosa si intende per nodo, ramo e maglia di una rete elettrica.
9. Cosa si intende per bipoli attivi e passivi ?
10. Quando due o più resistori sono collegati in parallelo ?
11. Quando due o più resistori sono collegati in serie ?
12. Quando due reti di resistori sono equivalenti ?
13. Dimostrare che, collegando in serie due resistori R_1 e R_2 aventi rispettivamente resistenza R e 2R, le tensioni sui due bipoli sono rispettivamente sono 1/3 e 2/3 di quella totale.
14. Enunciare il teorema di Millman, disegnare una rete di almeno quattro lati e due bipoli attivi e applicare ad essa il teorema.
15. Mostrare con un esempio perché il principio di sovrapposizione degli effetti non è applicabile a reti elettriche non lineari.
16. Enunciare il principio di equivalenza agli effetti esterni.

3.19 Esercizi

1. Data la rete elettrica riportata in figura 3.32 determinare per ogni nodo e per ogni maglia le corrispondenti equazioni di Kirchhoff.

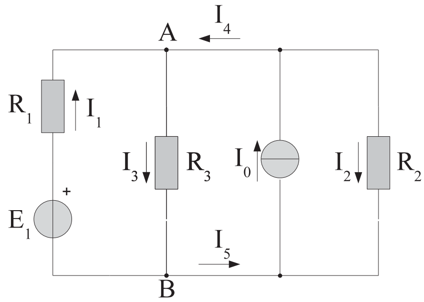


Figura 3.29: Esercizio 1

2. Nell'ipotesi che nella rete di figura 3.32 $E_1 = 12V$, $R_1 = 10\Omega$, $R_2 = 100\Omega$, $R_3 = 10\Omega$ e $I_1 = 1A$, determinare V_{AB} e tutte le altre correnti.

3. Dato il circuito elettrico riportato in figura 3.30 , dopo aver assegnato il verso convenzionale della corrente elettrica, determinare:

   (a) l'equazione di maglia;
   (b) l'espressione algebrica della corrente elettrica I che lo attraversa;
   (c) il valore numerico della corrente elettrica I;
   (d) La differenza di potenziale V_{DA}.

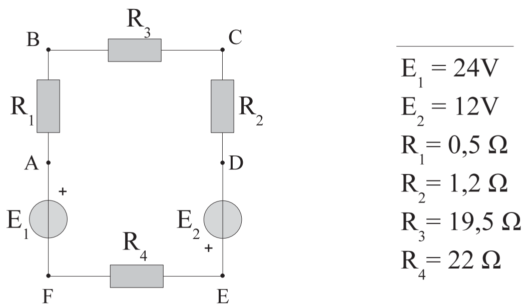


Figura 3.30: Esercizio 3.

4. . Dato il circuito di figura 3.31 determinare:

   (a) L'espressione algebrica ed il valore numerico della corrente I che lo attraversa.
   (b) Le differenze di potenziale V_{FB} e V_{AD}
   (c) La potenza totale dissipata da tutti i resistori.
   (d) La potenza totale erogata da tutti i generatori di tensione.

5. Per la rete elettrica di figura 3.32 si determini:

   (a) Dopo aver indicato i versi, le correnti e le tensioni di ognuno dei bipoli resistivi.
   (b) La tensione V_{AE}

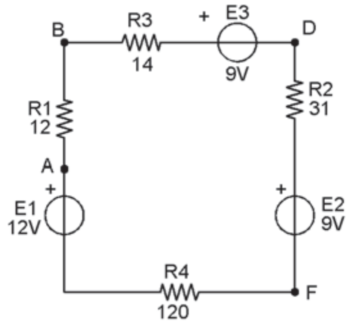


Figura 3.31: Esercizio 4.

(c) La potenza generata, la potenza persa e la potenza utile.
(d) Il rendimento del generatore
(e) La resistenza di carico vista dal generatore reale.
(f) Una coppia di valori R_2 e R_6 per cui il rendimento percentuale assume un valore pari al 50%
(g) La resistenza di carico vista dal generatore reale qualora si sostituisca il cortocircuito tra i punti A e B con bipolo resistivo da 100 Ω

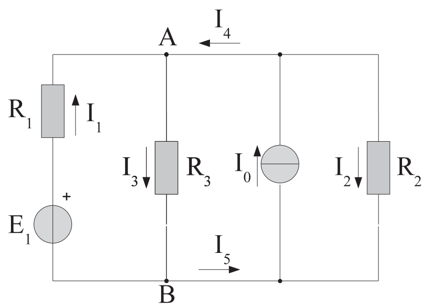


Figura 3.32: Esercizio 5.

6. Per la rete elettrica di figura 3.33 si determini:
   (a) La conduttanza di carico vista dal generatore reale.
   (b) Dopo aver indicato i versi, le correnti e le tensioni di ognuno dei bipoli resistivi.
   (c) La tensione V_{AE}
   (d) La potenza generata, la potenza persa e la potenza utile.
   (e) Il rendimento del generatore
   (f) Le equazioni di nodo.
   (g) Una coppia di valori R2 e R6 per cui il rendimento percentuale assume un valore pari al 50.
   (h) La resistenza di carico vista dal generatore reale qualora si sostituisca il cortocircuito tra i punti B e D con un bipolo resistivo da 100Ω.

7. Per la rete elettrica di figura 7 si determini:
   (a) La conduttanza di carico vista dal generatore reale.

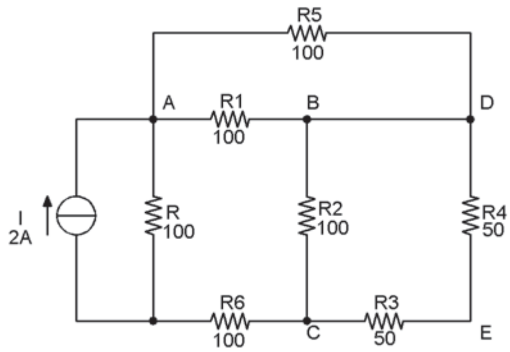


Figura 3.33: Esercizio 6.

(b) La tensione V_C e la corrente I_C applicate al carico.

(c) Le correnti e le tensioni applicate ad ognuno dei bipoli resistivi.

(d) La tensione V_{AD}

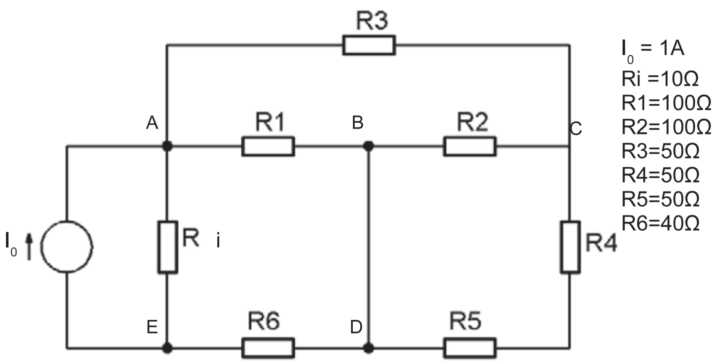
(e) La potenza generata, la potenza persa e la potenza utile.

(f) Il rendimento del generatore

(g) Le equazioni di nodo.

(h) Una coppia di valori R1 e R6 per cui il rendimento percentuale assume un valore pari al 50.

(i) La resistenza di carico vista dal generatore reale qualora si sostituisca il cortocircuito tra i punti B e D con un bipolo resistivo da 100Ω.



8. Data la rete elettrica lineare di figura 8:

   (a) Determinare le correnti di ramo utilizzando il metodo delle correnti di maglia.

   (b) Determinare le correnti di ramo utilizzando il metodo dei potenziali ai nodi.

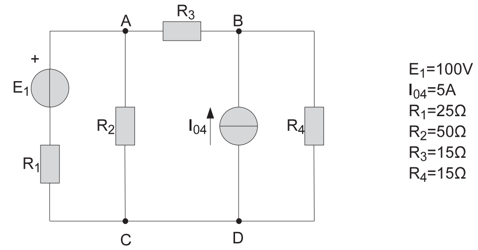
   (c) Eseguire il bilancio delle potenze

9. Data la rete elettrica lineare di figura 9, applicando uno o più dei seguenti metodi di soluzione parziale:

   (a) teorema di Millman.

   (b) principio di sovrapposizione degli effetti.

   (c) generatore equivalente di Thevenin



(d) generatore equivalente di Norton

determinare:

(a) la corrente I_3.
(b) la tensione V_{AC}.
(c) la potenza erogata dal generatore $E_1 - R_1$