Dinamica
(dei sistemi)

Studio delle cause del moto
(dei sistemi)

Lezione 3
Rotazione dei sistemi rigidi

Gli argomenti discussi in questa lezione sono trattati, in gran parte, nel cap 10 (Moti di rotazione) del testo di riferimento (Ferrari-Luci-Mariani-Pelissetto, Fisica 1).

Punto materiale	Sistema rigido (rotazioni)
Vettore posizione del p.m.	Posizione angolare (intorno asse di rot.)
Velocità del p.m.	Velocità angolare (intorno asse di rot.)
Accelerazione del p.m.	Accelerazione angolare (intorno asse di rot.)
Massa del p.m.	Momento di inerzia (rispetto asse di rot.)
Forza agente sul p.m.	Risultante dimomenti delle forze
Quantità di moto del p.m.	Momento della quantità di moto totale
2o principio della dinamica	Secondaa equaz. cardinale della dinamica
Energia cinetica del p.m.	Energia cinetica di rotazione del s.r.

Annotazioni

Momento di inerzia rispetto all'asse di rotazione

$$I_{\mathrm{a}} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sum_{i=1}^{N} m_i h_i^2$$

Il momento di inerzia dipende dalla massa totale, ma anche da come essa è distribuita rispetto all'asse di rotazione: le masse vicine all'asse contano meno di quelle lontane.

Annotazioni

Posizione angolare

$$\vartheta_a(t)$$

Un sistema rigido, rispetto al proprio c.m., può solo avere un moto di tipo rotatorio.

Se l'asse di rotazione è noto, la posizione è univocamente individuata da un solo angolo (posizione angolare).

Annotazioni

Velocità ed accelerazione angolare

$$\omega_a \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d\vartheta_a}{dt}$$

$$\alpha_a \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d\omega_a}{dt}$$

Poiché il c.m. è fermo rispetto a sè stesso,ed i punti dell'asse di rotazione sono i soli a restare fermi, l'asse di rotazione deve passare per il c.m..

Annotazioni

Momento risultante

$$\vec{M}_{tot} \stackrel{\text{def}}{=}$$

$$\sum \vec{r}_i \times f_i^{(\text{int})} + \sum \vec{r}_i \times f_i^{(\text{est})}$$

$$\sum \vec{r}_i \times f_i^{(\text{int})} = 0$$

$$\vec{M}_{tot} = \sum \vec{r}_i \times f_i^{(\text{est})} = \vec{M}_{tot}^{(\text{est})}$$

Il momento risultante delle forze agenti sul sistema tiene conto anche dei punti di applicazione delle singole forze (es-terne), ma può essere visto co-me prodotto da una singola „coppia di forze“.

È opportuno che il polo apparten-ga all'asse di rotazione.

Annotazioni

Momento assiale

$$M_{tot\,\mathrm{a}} \stackrel{\text{def}}{=} \vec{M}_{tot} \cdot \hat{u}_{\mathrm{a}}$$

$$M_{tot\,\mathrm{a}}^{(\mathrm{est})} \stackrel{\text{def}}{=} \vec{M}_{tot}^{(\mathrm{est})} \cdot \hat{u}_{\mathrm{a}}$$

Il momento risultante delle forze agenti sul sistema è una grandezza vettoriale, ma se l'asse di rotazione è fisso, interessa solo la componente parallela a tale asse.

Annotazioni

Momento della quantità di moto (momento angolare)

$$\vec{L}_{tot} \stackrel{\text{def}}{\equiv} \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i$$

$$L_{tot\,\mathrm{a}} \stackrel{\text{def}}{\equiv} \vec{L}_{tot} \cdot \hat{u}_{\mathrm{a}}$$

Il „*momento della quantità di moto*“ (o, con termine anglosassone, „*momento angolare*“) è una grandezza vettoriale, ma spes-so ci interessa solo la sua componente lungo l'asse di rotazione.

Annotazioni

Seconda equazione cardinale della dinamica

$$\vec{M}_{tot}^{(est)} = \frac{d\vec{L}_{tot}}{dt} + \vec{v}_{\Omega} \times \vec{P}$$

„*Seconda equazione cardinale della dinamica*“ nella sua forma più generale.

$$M_{tot\,a}^{(est)} = I_a \frac{d\omega_a}{dt}$$

„*Seconda equazione cardinale della dinamica*“ per asse fisso e polo sull'asse.

Annotazioni

Energia cinetica di rotazione

$$K_{tot} \overset{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

$$K_{rot} = \frac{1}{2} I_a \omega_a^2$$

L'energia cinetica totale del sistema è definita come la somma delle energie cinetiche dei punti che lo costituiscono, ma si dimostra che, per una rotazione dipende dal momento di inerzia.

Annotazioni

Teorema di Koenig

$$K_{tot} = K_{\text{c.m.}} + K'$$

$$K_{\text{c.m.}} = \frac{1}{2} M_{tot} v_{\text{c.m.}}^2$$

$$K' = \sum \frac{1}{2} m_i v'^2_i$$

Si dimostra che l'energia cinetica totale del sistema è data dalla somma di due termini

- Energia cinetica del c.m.
- Energia cinetica rispetto al c.m.

Annotazioni

Energia cinetica di un sistema rigido

$$K_{tot}^{(\mathrm{s.rigido})} = K_{\mathrm{trasl.}} + K_{\mathrm{rot.}}$$

$$K_{tot}^{(\mathrm{s.rigido})} =$$
$$\frac{1}{2} M_{tot} v^2_{\mathrm{c.m.}} + \frac{1}{2} I_{\mathrm{a}} \omega^2_{\mathrm{a}}$$

L'energia cinetica del c.m. è sempre energia cinetica di traslazione.

L'energia cinetica rispetto al c.m. è, per un sistema rigido, energia cinetica di rotazione.

Annotazioni

Sistema rigido come punto materiale

Il centro di massa di un sistema si comporta in maniera analoga ad un punto materiale di massa pari alla massa totale del sistema, cui sia applicato il risultante delle forze esterne, a patto che l'energia cinetica di rotazione sia trascurabile (sia piccola rispetto all'energia cinetica totale).

Annotazioni

Casi particolari interessanti

Statica: il sistema rigido è fermo e resta fermo (la velocità del c.m. e la velocità angolare sono costantemente nulle).

Rotolamento: il punto di contatto tra il sistema rigido ed il vincolo è, in ogni istante, fermo rispetto al vincolo medesimo.

Annotazioni

Rotazione dei sistemi rigidi

Annotazioni