Note sulla
meccanica dei fluidi

Questo file contiene una breve sintesi,
sotto forma di “slides”,
degli argomenti presentati nelle lezioni relative alla
“***meccania dei fluidi***”

Si consiglia di affiancarle
alla lettura dei “sommari delle lezioni”
(riportati alla fine di questo stesso file)
ed allo studio di un libro di testo.

- **punto materiale**
- sistemi di punti materiali
  - **sistemi discreti**
  - sistemi continui
    - fluidi
      - gas
        - **gas perfetti**
        - gas reali
      - liquidi
        - liquidi reali
        - **liquidi ideali**
    - solidi
      - solidi deformabili
        - solidi perfettamente elastici
        - solidi reali
      - **sistemi rigidi**

Fluidi

classificazione (semplicistica) dello stato di aggregazione

- solido:
  - rigido
  - deformabile
- fluido
  - liquido
  - gas

approccio lagrangiano:
descrivere il moto di ciascun volumetto dV di massa dm = ρ dV e velocità $\mathbf{v}(t)$

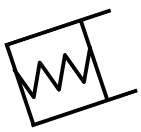
approccio euleriano:
descrivere ciò che accade in ciascun punto tramite il campo delle velocita $\mathbf{v}(\mathbf{r},t)$

dV: volumetto piccolo ma che contiene un gran numero di molecole

$\rho(\mathbf{r},t)$: densità (massa volumica), unità SI: kg/m^3

$$\rho = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}V}$$

Fluidi
pressione



$$p = \lim_{S\to 0} \frac{F_n}{S}$$

$$\mathrm{d}\vec{\mathbf{F}}_{\mathrm{press.}} = -p\hat{\mathbf{n}}\,\mathrm{d}S \quad \begin{pmatrix} \text{versore normale} \\ \text{uscente} \end{pmatrix}$$

La pressione non dipende dall'orientazione della superficie
=> la pressione è una grandezza scalare

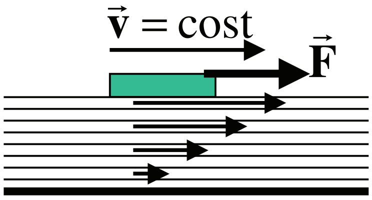
La pressione non tiene conto delle forze "di taglio" che possono anch'esse essere presenti in un fluido (viscosità)

La pressione è, in genere, funzione della posizione: $p(\vec{\mathbf{r}},t)$

Unità di misura SI: N/m^2 = Pa (pascal)

Unità non SI utilizzate: 1 bar = 10^5 Pa
1 atm = 1.013 10^5 Pa = 1.013 bar = 1013 mbar
1 torr = 1 mmHg = (1/760) atm

Fluidi
viscosità



$$\eta = \frac{F_t\, h}{S\, v}$$

La misura richiede che il moto del fluido sia "laminare"
=> ciascuno strato di fluido si muove senza mescolarsi con gli altri

Tramite la viscosità si tiene conto delle forze "di taglio" che sono presenti in un fluido (viscosità)

La viscosità è una caratteristica del fluido (e dipende dalla temperatura).

Unità di misura SI: Ns/m^2

Unità non SI utilizzata: $1\ P = 10^{-1}\ Ns/m^2$
(Poise)

A temperatura ambiente (20°C)

Idrogeno	$1.0\ 10^{-5}$	$N\ s/m^2$
Aria	$1.9\ 10^{-5}$	$N\ s/m^2$
Benzina	$3.5\ 10^{-4}$	$N\ s/m^2$
Acqua	$1.0\ 10^{-3}$	$N\ s/m^2$
Petrolio	$8.0\ 10^{-3}$	$N\ s/m^2$
Glicerina	1.5	$N\ s/m^2$

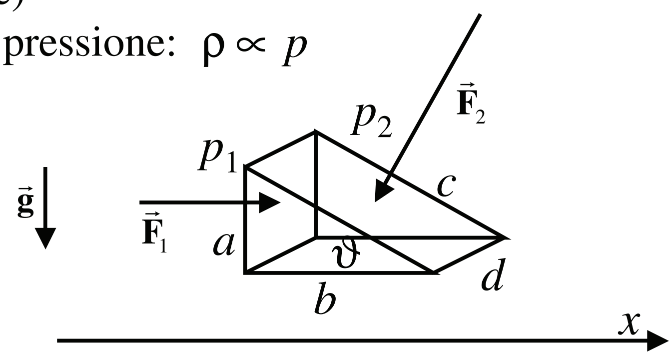
Fluidi
in condizioni stazionarie

Liquido *perfetto* (o *ideale*)
- incomprimibile: ρ non dipende da p
- non viscoso: non esercita forze "di taglio" (coeff. viscosità nullo)

Gas *perfetto* (a temperatura costante)
- la densità è proporzionale alla pressione: $\rho \propto p$

In condizioni stazionarie:

- la pressione non dipende dall'orientamento della superficie



$$\vec{\mathbf{F}}_1 + \vec{\mathbf{F}}_2 + \cdots = \mathrm{d}\, m\, \vec{\mathbf{a}}$$

$$\vec{\mathbf{F}}_1 + \vec{\mathbf{F}}_2 + \cdots = 0$$

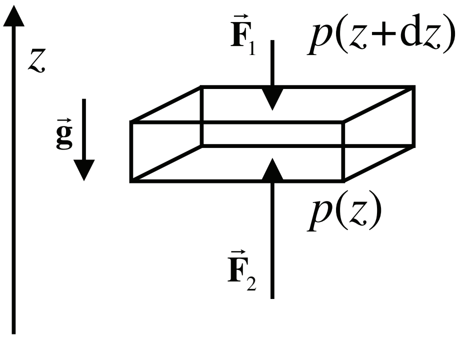
$$\vec{\mathbf{F}}_1 = -p_1 \left(ad\right) \hat{\mathbf{n}}_1 \qquad \vec{\mathbf{F}}_2 = -p_2 \left(cd\right) \hat{\mathbf{n}}_2$$

$$F_{1x} = +p_1 ad \qquad F_{2x} = -p_2 cd \sin\vartheta = -p_2 ad$$

$$p_1 ad - p_2 ad = 0 \quad \Rightarrow \quad p_1 = p_2$$

Fluidi
Legge di Stevino

In presenza di forze di volume la pressione dipende dalla posizione



$$\vec{\mathbf{F}}_1 + \vec{\mathbf{F}}_2 + \vec{\mathbf{F}}_p + \cdots = \mathrm{d}m\,\vec{\mathbf{a}}$$

$$\vec{\mathbf{F}}_1 + \vec{\mathbf{F}}_2 + \vec{\mathbf{F}}_p + \cdots = 0$$

$$F_{1z} = -p(z+\mathrm{d}z)\,\mathrm{d}S \qquad F_{2z} = +p(z)\,\mathrm{d}S$$

$$F_{pz} = -g\,\mathrm{d}m = -g\,\rho\,\mathrm{d}V = -g\,\rho\,\mathrm{d}S\,\mathrm{d}z$$

$$-p(z+\mathrm{d}z)\,\mathrm{d}S + p(z)\,\mathrm{d}S - g\,\rho\,\mathrm{d}S\,\mathrm{d}z = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{p(z+\mathrm{d}z)-p(z)}{\mathrm{d}z} = -g\,\rho \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$$

Legge di Stevino: $\mathrm{d}p = -\,\rho\,g\,\mathrm{d}z$

Fluidi
applicazioni della legge di Stevino

Liquido ideale: (densità indipendente dalla pressione)

$$\Delta p = \int_{p_0}^{p} \mathrm{d}p = -\int_{z_0}^{z} \rho g\,\mathrm{d}z = -\rho g \int_{z_0}^{z} \mathrm{d}z = -\rho g\,(z_0 - z)$$

$\boxed{p(z) = p_0 - \rho g z}$ $\quad p_0$: pressione alla quota $z = 0$

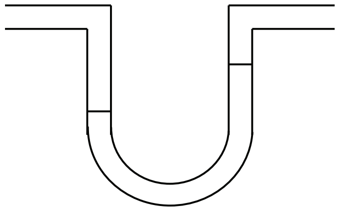
Gas perfetto (densità proporzionale alla pressione)

$$\mathrm{d}p = -\rho g\,\mathrm{d}z = -\rho_0 \frac{p}{p_0} g\,\mathrm{d}z \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}p}{p} = -\frac{\rho_0}{p_0} g\,\mathrm{d}z \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}p}{p} = -\frac{\mathrm{d}z}{z^*} \quad \text{con } z^* = \frac{p_0}{g\rho_0}$$

$\boxed{p(z) = p_0\,\mathrm{e}^{-z/z^*}}$ $\quad p_0, z^*$: costanti

Applicazioni

$$\boxed{p(z) = p_0 - \rho g z}$$



Misura della pressione

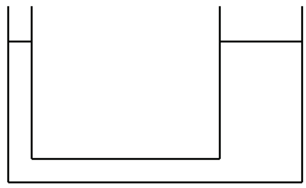
Misura della differenza di pressione

Barometro di Torricelli

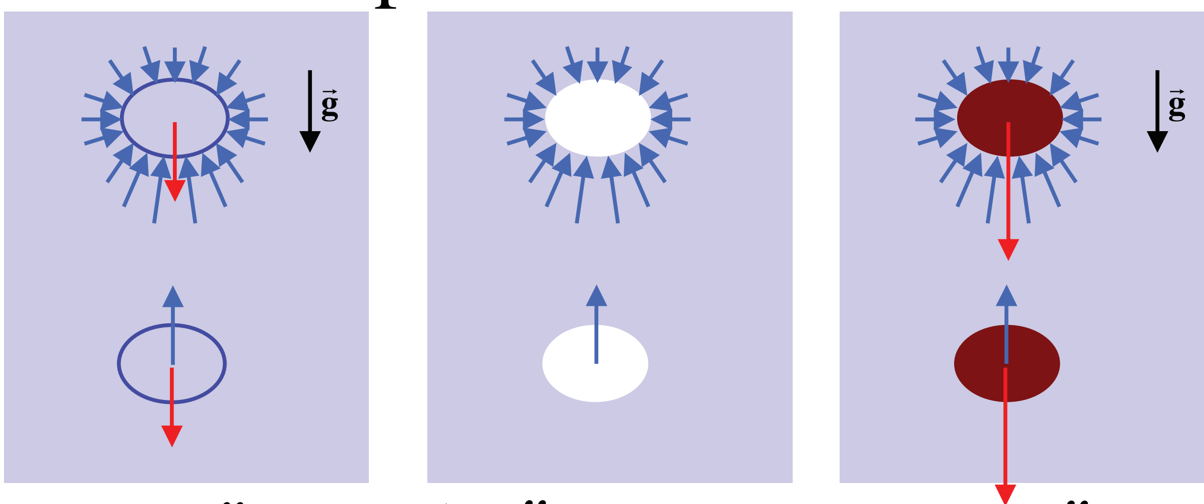
Principio di Pascal

in un fluido incomprimibile le variazioni di pressione hanno lo stesso valore in tutti i punti del fluido

Leva idraulica ($\Delta p_1 = \Delta p_2 \Rightarrow F_2/F_1 = S_2/S_1$)



Spinta idrostatica



$$\vec{\mathbf{F}}_{tot} = m_{fluido}\,\vec{\mathbf{g}} + \iint_S p\hat{\mathbf{n}}\,\mathrm{d}s = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\iint_S p\hat{\mathbf{n}}\,\mathrm{d}s = -m_{fluido}\,\vec{\mathbf{g}}$$

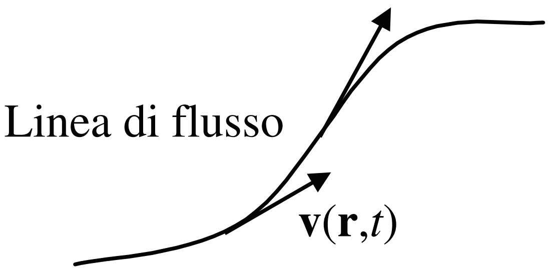
$$\vec{\mathbf{F}}_{tot} = \iint_S p\hat{\mathbf{n}}\,\mathrm{d}s = -m_{fluido}\,\vec{\mathbf{g}}$$

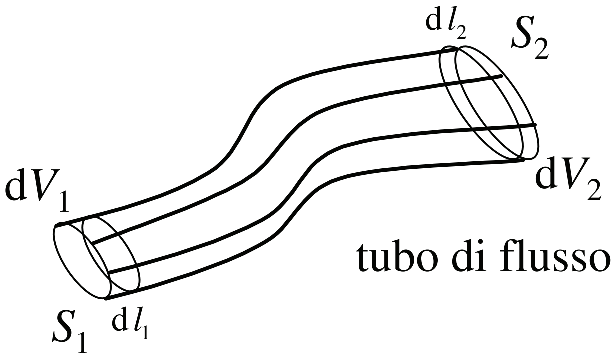
versore $\hat{\mathbf{n}}$ entrante

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{F}}_{tot} &= m_{\text{solido}}\,\vec{\mathbf{g}} + \iint_S p\hat{\mathbf{n}}\,\mathrm{d}s \\ &= m_{\text{solido}}\,\vec{\mathbf{g}} - m_{\text{fluido}}\,\vec{\mathbf{g}} \\ &= m_{\text{solido}}\,\vec{\mathbf{g}} - \vec{\mathbf{F}}_A\end{aligned}$$

Le forze di superficie, dovute alla pressione del fluido circostante, sono le stesse nei tre casi e producono una forza detta “spinta idrostatica” o “forza di Archimede”: $\boxed{\vec{\mathbf{F}}_A = \iint_S p\hat{\mathbf{n}}\,\mathrm{d}s = -m_{\text{fluido}}\,\vec{\mathbf{g}} = -\rho_{\text{fluido}}\,V_{\text{fluido}}\,\vec{\mathbf{g}}}$

Dinamica dei fluidi





liquido ideale (incomprimibile) $\mathrm{d}V_1 = \mathrm{d}V_2$ $\quad Q_1 = Q_2$

Attraverso una “sezione” del tubo di flusso

Portata massica: $\mathrm{d}m/\mathrm{d}t$

Portata volumica: $Q = \mathrm{d}V/\mathrm{d}t$

$\mathrm{d}V = Sv\mathrm{d}t$

$Q = Sv = \mathrm{cost}$

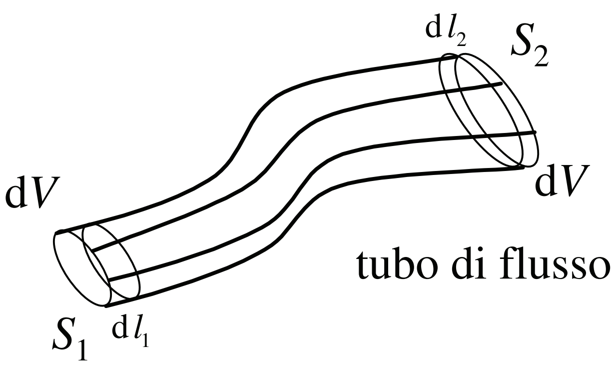
Nota: la velocità aumenta nelle “strozzature”

Teorema di Bernoulli

all’interno di un tubo di flusso
ovvero
lungo una linea di flusso

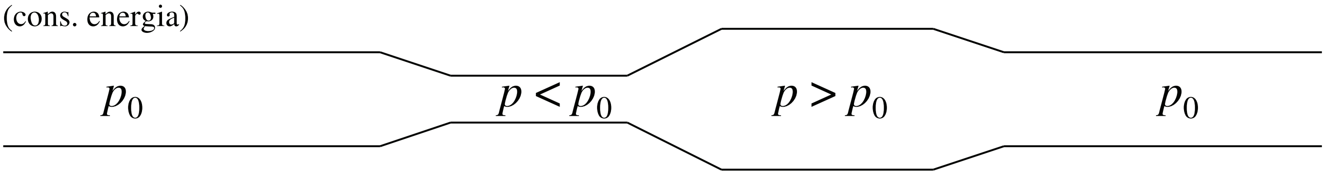
$$\boxed{\tfrac{1}{2}\rho v^2 + p + \rho g z = \mathrm{cost}}$$

in un liquido ideale
(incomprimibile, viscosità trascurabile)

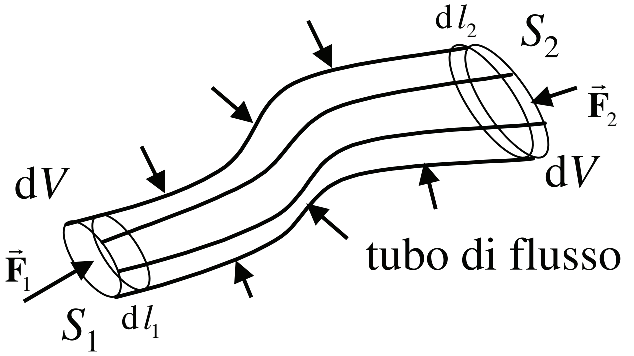


In un condotto orizzontale attraversato da un liquido ideale

(cons. massa, incompr. fluido)	se la sezione diminuisce	se la sezione aumenta
$Q = Sv = \mathrm{cost} \longrightarrow$	- la velocità aumenta	- la velocità diminuisce
$\tfrac{1}{2}\rho v^2 + p = \mathrm{cost} \longrightarrow$ (cons. energia)	- la pressione diminuisce	- la pressione aumenta



Teorema di Bernoulli
dimostrazione



$$W = \Delta K$$

$$W_{\text{f.peso}} = -\left(U_2 - U_1\right) = -\left(\mathrm{d}m_2 g z_2 - \mathrm{d}m_1 g z_1\right)$$
$$= -\left(\rho\,\mathrm{d}V_2 g z_2 - \rho\,\mathrm{d}V_1 g z_1\right) = \rho\,\mathrm{d}V g\left(z_1 - z_2\right)$$

$$W_{\text{f.press.}} = p_1 S_1\,\mathrm{d}l_1 - p_2 S_2\,\mathrm{d}l_2 = p_1\,\mathrm{d}V_1 - p_2\,\mathrm{d}V_2$$
$$= \mathrm{d}V\left(p_1 - p_2\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} K_1 = \frac{1}{2}\mathrm{d}m_1 v_1^2 = \frac{1}{2}\rho\,\mathrm{d}V_1 v_1^2 \\ K_2 = \frac{1}{2}\mathrm{d}m_2 v_2^2 = \frac{1}{2}\rho\,\mathrm{d}V_2 v_2^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \Delta K = \frac{1}{2}\rho\,\mathrm{d}V_2 v_2^2 - \frac{1}{2}\rho\,\mathrm{d}V_1 v_1^2 = \frac{1}{2}\rho\,\mathrm{d}V\left(v_2^2 - v_1^2\right)$$

$$W_{\text{f.peso}} + W_{\text{f.press.}} = \Delta K$$
$$\rho\,\mathrm{d}V g\left(z_1 - z_2\right) + \mathrm{d}V\left(p_1 - p_2\right) = \frac{1}{2}\rho\,\mathrm{d}V\left(v_2^2 - v_1^2\right)$$
$$\rho g\left(z_1 - z_2\right) + \left(p_1 - p_2\right) = \frac{1}{2}\rho\left(v_2^2 - v_1^2\right)$$
$$\rho g z_1 + p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = \rho g z_2 + p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$
$$\rho g z + p + \frac{1}{2}\rho v^2 = \text{cost}$$

$$\rho g z + p + \frac{1}{2}\rho v^2 = \text{cost}$$

$\rho g z$	pressione idrostatica
p	pressione (piezometrica)
$\frac{1}{2}\rho v^2$	pressione cinetica

Sommari delle lezioni di

meccanica dei fluidi

del corso/modulo di

Fisica Generale I

(Docente: F. Bloisi)

Fluidi*

Come si è detto un fluido è caratterizzato dal fatto che è possibile modificare con facilità la posizione reciproca delle molecole e questo ha come conseguenza che, a livello macroscopico, un fluido non ha una forma propria. Inoltre un gas non ha neanche un volume proprio. Pertanto è poco utile caratterizzare la quantità di fluido tramite la massa, ma è preferibile utilizzare la densità ρ (costante) ed il volume V per un liquido ed il *peso molecolare* P_M ed il *numero di moli* n per un gas. La massa sarà data rispettivamente da

$$M_{\mathrm{liq}}=\rho V \quad \text{o} \quad \mathrm{d}M_{\mathrm{liq}}=\rho\,\mathrm{d}V \qquad \textbf{(c3.1)}$$

$$M_{\mathrm{gas}}=n P_M \qquad \textbf{(c3.2)}$$

FORZE IN UN FLUIDO

Le forze interne che si esercitano tra volumetti adiacenti di un fluido possono essere

- *forze di taglio*: tangenti alla superficie di separazione tra i due volumetti. Questo tipo di forza è legato alla viscosità del fluido e non è presente in un fluido ideale.
- *forze normali*: ortogonali alla superficie di separazione tra due volumetti adiacenti. Questo tipo di forza è sempre presente ed il suo verso è sempre dall'esterno all'interno del volumetto di fluido su cui agisce (può esercitare una compressione e non una trazione)

Tra le forze esterne prenderemo in considerazione

- la *forza peso* il cui valore è
$$\mathrm{d}\vec{f}_{\mathrm{pesp}}=\rho\,\vec{g}\,\mathrm{d}V \qquad \textbf{(c3.3)}$$
- le *reazioni dei vincoli* (recipiente che contiene il fluido). Anche in questo caso assumeremo che per un fluido ideale vi sia solo una forza ortogonale alla superficie del recipiente.

La forza peso è una *forza di volume* in quanto viene esercitata sull'intero volumetto di fluido. Tutte le altre forze citate sono *forze di superficie*, in quanto sono esercitate sulla superficie del volumetto di fluido.

Il rapporto tra il modulo della forza normale di superficie e la superficie stessa è detto *pressione*:

$$p\equiv\frac{\left|\mathrm{d}\vec{f}_{\mathrm{n}}\right|}{\mathrm{d}S} \qquad \textbf{(c3.4)}$$

per cui si può scrivere

$$\mathrm{d}\vec{f}_{\mathrm{n}}=-p\,\mathrm{d}S\,\hat{\boldsymbol{n}} \qquad \textbf{(c3.5)}$$

dove $\hat{\boldsymbol{n}}$ è la *normale uscente* (o il *versore normale uscente*) dal volumetto (ossia il versore perpendicolare alla superficie del volumetto, orientato dall'interno verso l'esterno del volumetto).

L'unità di misura SI della pressione è il Pascal (simbolo: $\mathrm{Pa}=\mathrm{N/m^2}$, dimensioni $\mathrm{L^{-1}M^{+1}T^{-2}}$) anche se talvolta vengono usate l'atmosfera ($1\ \mathrm{atm}=1.01\ 10^5\ \mathrm{Pa}$) ed il bar ($1\ \mathrm{bar}=10^8\ \mathrm{Pa}$).

Si noti che il *lavoro fatto dalla forza normale* (detto talvolta *lavoro fatto dalla pressione*) può essere scritto come

$$\mathrm{d}W_p=-p\,\mathrm{d}V \qquad \textbf{(c3.6)}$$

mentre il *lavoro fatto dall'esterno sul fluido* è

$$\mathrm{d}W=p\,\mathrm{d}V \qquad \textbf{(c3.7)}$$

FLUIDO A RIPOSO

La situazione più semplice da trattare è quella di un *fluido a riposo*, ossia in cui la velocità di qualunque volumetto è nulla (si noti che ciò non vuol dire che le singole molecole sono ferme). In tal caso si dice anche che si considera una situazione *statica*.

Si dimostra che

> **in un fluido a riposo la pressione non dipende dall'orientamento della superficie considerata e che è quindi una funzione scalare della posizione.**

Si dimostra[📖MNV:CAP.9] poi che in un fluido a riposo sottoposto alla forza peso la pressione varia con la quota secondo la relazione

$$\mathrm{d}p=-\rho\,g\,\mathrm{d}z \qquad \textbf{(c3.8)}$$

dove l'asse z è verticale orientato verso l'altro (ossia con verso opposto a quello dell'accelerazione di gravità).

Da tale relazione si ricava che se $\rho=\mathrm{cost.}$, ossia se la densità è indipendente dalla pressione, come in un liquido ideale a temperatura costante (ad esempio, con una certa approssimazione, nel mare) vale la *legge di Stevino*:

$$p(z)=p_0-\rho\,g\,z \qquad \textbf{(c3.9)}$$

dove p_0 è la pressione alla quota $z=0$.

Se, invece, $\rho\propto p$, ossia la densità è proporzionale alla pressione, come avviene in un gas perfetto a temperatura costante (ad esempio, con una certa approssimazione, nell'atmosfera che si estende per circa 800 km al di sopra della superficie della Terra) si ricava l'*equazione barometrica*:

$$p(z)=p_0\,\mathrm{e}^{-z/z_0} \qquad \textbf{(c3.10)}$$

dove p_0 è la pressione alla quota $z=0$ e z_0 è una costante che ha le dimensioni di una lunghezza. Nel caso dell'atmosfera $p_0\approx10^5\ \mathrm{N/m^2}=1\ \mathrm{atm}$ e $z_0\approx7\div8$ km (anche se i valori effettivi dipendono dalle condizioni atmosferiche).

È infine interessante notare che la risultante delle forze di superficie applicata ad un oggetto totalmente o parzialmente immerso in un fluido è dato da una forza (detta *spinta idrostatica* o *forza di Archimede*) avente

- modulo pari a quello della forza peso della massa di fluido “spostato”
- direzione verticale
- verso opposto a quello della forza peso (verso l'alto)
- punto di applicazione nel centro di massa del fluido spostato (*centro di spinta*).

Alcune applicazioni:

- *barometro*.
- *pompa aspirante* o *pompa premente*.
- *pressa idraulica*.

* Delle considerazioni qui fatte sui fluidi solo quelle relative ai fluidi in condizioni stazionarie non sono essenziali per il seguito del corso (termodinamica).

FLUIDO IN CONDIZIONI DINAMICHE

Lo studio di un fluido in condizioni non statiche è notevolmente complesso. Una situazione ragionevolmente facile da trattare è quella di *regime stazionario* che si ha se la velocità di un volumetto dipende dalla sua posizione ma non dal tempo. In caso contrario si parla di *regime variabile*. In caso di regime stazionario è possibile associare a ciascun punto dello spazio un vettore che rappresenta la velocità del volumetto di fluido che si trova in quella posizione dello spazio.

Si definiscono

- *linea di flusso* (o *linea di corrente*): una linea tangente in ogni punto al vettore velocità. Tali linee coincidono, in regime stazionario, con le traiettorie dei volumetti di fluido.
- *tubo di flusso*: l'insieme delle linee di flusso che passano per una generica superficie (sezione) geometrica posta all'interno del fluido. In regime stazionario i volumetti di fluido non attraversano mai la superficie di un tubo di flusso, per cui si può parlare di fluido interno (o esterno) al tubo di flusso.
- *portata (di volume)*: considerata una sezione S di un tubo di flusso, la quantità
$$Q_\mathrm{v}=\int_{\text{sezione } S}\vec{v}\cdot\hat{n}\,\mathrm{d}S \tag{c3.11}$$
rappresenta il volume di fluido per unità di tempo che attraversa la sezione considerata.
- *portata (di massa)*: tenendo conto della densità del fluido si ha, invece, la massa di fluido per unità di tempo che attraversa la medesima sezione
$$Q_\mathrm{m}=\int_{\text{sezione } S}\rho\,\vec{v}\cdot\hat{n}\,\mathrm{d}S \tag{c3.12}$$

Vale l'*equazione di continuità* che esprime la conservazione della massa ($\hat{n}$ è la normale uscente dalla superficie chiusa S):
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint_{\text{vol. int. ad } S}\rho\,\mathrm{d}V=-\iint_{\text{sup. chiusa } S}\rho\,\vec{v}\cdot\hat{n}\,\mathrm{d}S \tag{c3.13}$$
e che, nel caso stazionario, per un fluido incompressibile diviene
$$\iint_{\text{sup. chiusa } S}\vec{v}\cdot\hat{n}\,\mathrm{d}S=0 \tag{c3.14}$$
da cui si ricava che

> **in un fluido ideale in condizioni stazionarie, la portata è costante lungo un tubo di flusso.**

È quindi evidente, quindi, che la velocità deve essere maggiore dove la sezione del tubo di flusso è minore.

Si dimostra[📖MNV:CAP.9] inoltre il *teorema di Bernoulli* (equivale alla conservazione dell'energia): la quantità
$$p+\frac{1}{2}\rho v^2+\rho g z \tag{c3.15}$$
resta costante lungo una linea di flusso.

In particolare, se le linee di flusso sono orizzontali (o se la densità e le variazioni di quota sono sufficientemente piccole da poter trascurare il termine $\rho g z$, si ricava che la pressione deve essere inversamente proporzionale al quadrato della velocità e, quindi, deve essere minore dove la sezione del tubo di flusso è più piccola.

Alcune applicazioni:

- *tubo di venturi*.
- *ala di un aereo*.