

Tale sistema, di due equazioni nelle due incognite  $t, t'$ , può anche scriversi nella forma più compatta

$$\begin{cases} -(\mathbf{u}_r \cdot \mathbf{u}_r)t + (\mathbf{u}_r \cdot \mathbf{u}_s)t' + \mathbf{u}_r \cdot \overrightarrow{P_0Q_0} = 0 \\ -(\mathbf{u}_r \cdot \mathbf{u}_s)t + (\mathbf{u}_s \cdot \mathbf{u}_s)t' + \mathbf{u}_s \cdot \overrightarrow{P_0Q_0} = 0 \end{cases} \quad (7.28)$$

Le matrici del sistema (7.28) sono

$$A' = \begin{pmatrix} -\mathbf{u}_r \cdot \mathbf{u}_r & \mathbf{u}_r \cdot \mathbf{u}_s & \mathbf{u}_r \cdot \overrightarrow{P_0Q_0} \\ -\mathbf{u}_r \cdot \mathbf{u}_s & \mathbf{u}_s \cdot \mathbf{u}_s & \mathbf{u}_s \cdot \overrightarrow{P_0Q_0} \end{pmatrix}$$

Poiché  $\det A = -(\mathbf{u}_r \cdot \mathbf{u}_r)(\mathbf{u}_s \cdot \mathbf{u}_s) + (\mathbf{u}_r \cdot \mathbf{u}_s)^2$ , tenuto conto che i vettori  $\mathbf{u}_r, \mathbf{u}_s$  sono non paralleli, e quindi indipendenti, dalla disuguaglianza di Schwarz segue che  $\det A \neq 0$  e quindi il sistema (7.28) è di Cramer nelle incognite  $t, t'$ . Sia dunque  $(t_0, t'_1)$  la soluzione (unica) di tale sistema. Allora il punto  $H = P_{t_0} \in r$  e il punto  $K = Q_{t'_1} \in s$  sono tali che la retta  $p$  per  $H, K$  è perpendicolare ad  $r$  ed  $s$ . Dall'unicità della soluzione  $(t_0, t'_1)$  si deduce che tale retta  $p$  (che per costruzione è una comune incidente) è l'unica comune perpendicolare di  $r, s$ . È agevole poi la verifica del fatto che  $d(r, s) = d(H, K)$ . I punti  $H \in r$  e  $K \in s$  sono detti punti di minima distanza tra  $r$  ed  $s$ .  $\square$

## Ampliamento complesso e proiettivo

Nel prossimo capitolo studieremo le coniche, ovvero le curve del piano descritte da equazioni di secondo grado. A tal fine è opportuno utilizzare un modello di piano in qualche modo più ampio di  $\mathbb{E}^2$ . La costruzione di tale ampliamento prevede dettagli formali che vanno ben al di là degli scopi del presente testo, e quindi sarà svolta in un modo forse formalmente insoddisfacente, ma, si spera, più intuitivo. Sappiamo che, in un riferimento fissato  $\mathcal{R} = (O; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$  ogni punto è individuato da due coordinate, ovvero due numeri reali,  $a, b$ . Immaginiamo di aggiungere altri punti, le cui coordinate siano numeri complessi, di cui almeno uno non reale. Ad esempio sarà possibile considerare il punto  $Q \equiv (1, i)$ . L'insieme così ottenuto sarà indicato con il simbolo  $\mathbb{E}_{\mathbb{C}}^2$  e sarà detto *ampliamento complesso* del piano reale affine (ed euclideo)  $\mathbb{E}^2$ . I punti di  $\mathbb{E}^2$  saranno detti punti reali, gli altri saranno detti punti immaginari. Osserviamo che se applichiamo le usuali formule di cambiamento di coordinate da  $\mathcal{R}$  ad un altro riferimento  $\mathcal{R}' = (O'; \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2)$ , un punto di coordinate reali  $(a, b)$  in  $\mathcal{R}$  avrà coordinate  $(a', b')$  in  $\mathcal{R}'$  che risulteranno ancora reali. Analogamente, se le coordinate del punto in questione sono non entrambe reali in  $\mathcal{R}$ , tali saranno anche in  $\mathcal{R}'$ . In altre parole un punto sarà reale, oppure immaginario, indipendentemente dal riferimento di  $\mathbb{E}^2$  scelto, in quanto sono reali le matrici coinvolte nelle formule di cambiamento delle coordinate. Per essere più precisi, applichiamo la Proposizione 7.14 al nostro contesto. Supponiamo che

$$P \equiv_{\mathcal{R}} (x, y) ; \quad P \equiv_{\mathcal{R}'} (x', y') . \quad (7.29)$$

Supponiamo inoltre che

$$\mathbf{e}_1 = a_{1,1}\mathbf{e}'_1 + a_{1,2}\mathbf{e}'_2; \quad \mathbf{e}_2 = a_{2,1}\mathbf{e}'_1 + a_{2,2}\mathbf{e}'_2; \quad O \equiv_{\mathcal{R}'} (a_{1,3}, a_{2,3}). \quad (7.30)$$

Poniamo

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} a_{1,3} \\ a_{2,3} \end{pmatrix}; \quad A' = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \end{pmatrix}. \quad (7.31)$$

Allora la Proposizione 7.14 ci assicura che

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + B = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{1,3} \\ a_{2,3} \end{pmatrix} \quad (7.32)$$

ovvero

$$\begin{cases} x' = a_{1,1}x + a_{1,2}y + a_{1,3} \\ y' = a_{2,1}x + a_{2,2}y + a_{2,3} \end{cases} \quad (7.33)$$

Conviene ricordare che se, come spesso accadrà, i riferimenti sono ortonormali, la matrice  $A$  risulta ortogonale.

Consideriamo un punto  $Q \equiv (z, w)$ . Le coordinate  $z, w$  sono numeri complessi. Possiamo quindi considerare i loro coniugati  $\bar{z}$ , e  $\bar{w}$ . Il punto  $\bar{Q} = (\bar{z}, \bar{w})$  si dice complesso coniugato di  $Q$ . Osserviamo che  $Q$  è un punto reale se e solo se  $\bar{Q} = Q$ . L'applicazione

$$\chi : \mathbb{E}_{\mathbb{C}}^2 \longrightarrow \mathbb{E}_{\mathbb{C}}^2$$

che associa ad ogni punto  $Q$  il suo coniugato  $\bar{Q}$  si dice *coniugio*. Essa fissa i punti reali di  $\mathbb{E}_{\mathbb{C}}^2$  e si ha che  $\chi\chi = id_{\mathbb{E}_{\mathbb{C}}^2}$ .

Consideriamo ora una retta  $r$  di  $\mathbb{E}^2$ , di equazione

$$r : ax + by + c = 0 \quad (7.34)$$

ed il luogo geometrico  $r'$  dei punti di  $\mathbb{E}_{\mathbb{C}}^2$  le cui coordinate (eventualmente anche immaginarie) soddisfano la (7.34). Il luogo  $r'$  è costituito dai punti di  $r$  e da altri eventuali punti immaginari.  $r'$  si dice *ampliamento complesso* della retta reale  $r$ . Ad esempio, se

$$r : x - y + 1 = 0 \quad (7.35)$$

abbiamo che  $P' \equiv (0, 1)$ ,  $P'' \equiv (-1, 0)$ ,  $P''' \equiv (2, 3)$  sono punti di  $r$ , ovvero sono punti reali di  $r'$ , mentre  $Q' \equiv (i, i + 1)$  è un punto immaginario di  $r'$ . La distinzione tra  $r$  e  $r'$ , laddove non indispensabile, sarà omessa. In  $\mathbb{E}_{\mathbb{C}}^2$  possiamo considerare luoghi geometrici descritti da equazioni di primo grado in  $x, y$ , ma con coefficienti non necessariamente reali. Chiameremo tali luoghi ancora *rette*. Ad esempio, sia

$$s : x + iy = 0. \quad (7.36)$$

Osserviamo che il punto  $O \equiv (0, 0)$  è reale ed appartiene ad  $s$ , ma è l'unico punto reale di  $s$ . Altri punti, necessariamente immaginari, di  $s$  sono  $R' \equiv (i, -1)$ ,

$R'' \equiv (1, i)$ ,  $R''' \equiv (3 + i, 3i - 1)$ . Una retta descritta mediante un'equazione a coefficienti reali è detta *retta reale*. Può accadere che una retta sia descritta da un'equazione a coefficienti non reali, ma sia comunque una retta reale. Ad esempio, l'equazione

$$ix - iy + i = 0$$

descrive ancora la retta  $r$  della (7.35). E' infatti vero, in generale, che equazioni proporzionali descrivono lo stesso luogo geometrico (ovvero hanno le stesse soluzioni). Diremo quindi che una retta è *immaginaria* se non può essere descritta da un'equazione a coefficienti reali. Non è difficile verificare che una retta immaginaria possiede al più un punto reale, mentre una retta reale possiede infiniti punti reali. Quindi una retta che possiede almeno due punti reali è reale (e possiede infiniti punti reali).

Sia  $r$  una retta di equazione (7.34) (reale o immaginaria). I coefficienti  $a, b, c$  dell'equazione sono quindi numeri complessi. Indicheremo con  $\bar{r}$  la retta

$$\bar{r} : \bar{a}x + \bar{b}y + \bar{c} = 0 ,$$

dove  $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$  sono i complessi coniugati di  $a, b, c$ . Diremo che  $\bar{r}$  è la retta complessa coniugata di  $r$ . E' interessante notare che una retta è reale se e solo se coincide con la sua coniugata.

Osserviamo che anche il concetto di vettore libero, o applicato, va ampliato. Avremo quindi vettori di componenti non necessariamente reali. Ad esempio, il vettore  $\overrightarrow{R'R''}$  avrà componenti  $(1 - i, -1 - i)$ , e sarà un vettore direzionale di  $s$ . Va sottolineato che una retta immaginaria può anche avere vettore direzionale reale. E' il caso, ad esempio, della retta

$$t : x + i = 0$$

che è immaginaria ed ha vettore direzionale  $\mathbf{u}_t = (0, -1)$ , o anche  $(0, 1)$ . Il concetto di parallelismo si estende all'insieme  $\mathcal{L}$  di tutte le rette (reali o immaginarie) di  $\mathbb{E}_{\mathbb{C}}^2$ . Ad esempio vediamo che la retta immaginaria  $t$  è parallela all'asse delle  $y$ , descritto dall'equazione  $x = 0$ , che è una retta reale. Sottolineiamo il fatto che i vettori e i punti che compaiono nei riferimenti che noi selezioniamo sono tutti reali. Parleremo pertanto di *riferimenti reali*.

Consideriamo ora l'insieme  $\mathcal{L}$  delle rette di  $\mathbb{E}_{\mathbb{C}}^2$ . La relazione  $\parallel$  di parallelismo è un'equivalenza in  $\mathcal{L}$ . Ricordiamo che se  $r', r'' \in \mathcal{L}$  e  $\mathbf{u}_{r'} = (l', m')$ ,  $\mathbf{u}_{r''} = (l'', m'')$  sono vettori direzionali di tali rette, abbiamo che

$$r' \parallel r'' \iff (l', m') \propto (l'', m'') .$$

Un elemento dell'insieme quoziente  $\mathcal{L}/\parallel$ , ovvero una classe di rette parallele, è detto anche talvolta, *direzione*. Definiamo un nuovo insieme

$$\hat{\mathbb{E}}^2 = \mathbb{E}_{\mathbb{C}}^2 \cup \mathcal{L}/\parallel .$$

Un elemento di  $\hat{\mathbb{E}}^2$  sarà detto punto. Se esso appartiene ad  $\mathbb{E}_{\mathbb{C}}^2$ , sarà un punto *proprio*, se invece appartiene a  $\mathcal{L}/\parallel$ , ovvero è una direzione, sarà detto anche *punto improprio*.

Sia ora  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  oppure  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ . Dalla potenza cartesiana  $\mathbb{K}^3$  escludiamo l'origine, e consideriamo quindi l'insieme

$$\mathbb{X} = \mathbb{K}^3 - \{\mathbf{0}\} .$$

In  $\mathbb{X}$  consideriamo la relazione  $\propto$  di proporzionalità: se  $(a, b, c), (a', b', c') \in \mathbb{X}$ , poniamo

$$(a, b, c) \propto (a', b', c') \iff \exists \lambda \in \mathbb{K} - \{0\} \mid (a', b', c') = \lambda(a, b, c) .$$

Osserviamo che  $\propto$  è una relazione d'equivalenza in  $\mathbb{X}$ . Indicheremo con  $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^2$  l'insieme quoziente  $\mathbb{X}/\propto$ , che è noto come *piano proiettivo numerico* (reale o complesso). Se  $(a, b, c) \in \mathbb{X}$ , la sua classe si indicherà con il simbolo  $[a, b, c]$ . Si potrebbe verificare che tale classe, ovvero l'insieme delle terne non nulle proporzionali ad  $(a, b, c)$ , è la retta per l'origine e per  $(a, b, c)$ , o anche il sottospazio vettoriale di  $\mathbb{K}^3$  generato da  $(a, b, c)$ , privato dell'origine. Pertanto talvolta si dice che il piano proiettivo può vedersi, geometricamente, come l'insieme delle rette dello spazio passanti per l'origine, o anche come l'insieme delle direzioni nello spazio.

Consideriamo un punto  $P \in \mathbb{E}_{\mathbb{C}}^2$ , ovvero, con la terminologia appena introdotta, un punto proprio di  $\hat{\mathbb{E}}^2$ , di coordinate, che d'ora in avanti chiameremo *affini*,  $(a, b)$ . Diremo che  $P$  ha come coordinate *omogenee* la terna  $(a, b, 1)$ , o una qualunque altra terna ad essa proporzionale (che risulterà necessariamente non nulla). Quindi la coppia di coordinate affini di un punto è univocamente determinata, mentre la terna di coordinate omogenee dello stesso punto è definita solo a meno di proporzionalità. Comunque l'ultima coordinata omogenea non sarà mai nulla. Possiamo anche dire che le coordinate omogenee di  $P$  sono date dalla classe  $[a, b, 1] \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ . Scriveremo  $P \equiv [a, b, 1]$ . Ad esempio l'origine  $O$  ha coordinate affini  $(0, 0)$  e coordinate omogenee date da una qualunque terna del tipo  $(0, 0, k)$  dove  $k$  è uno scalare non nullo, o più semplicemente  $O$  ha coordinate omogenee  $[0, 0, 1]$  (o anche  $[0, 0, 37]!!$ ) Se il punto  $P' \equiv (3, 5)$ , ovvero ha coordinate affini  $(3, 5)$ , avremo che  $P' \equiv [3, 5, 1]$ , o anche  $P' \equiv [6, 10, 2]$ . Consideriamo ora un punto  $P \in \mathcal{L}/\parallel$ , ovvero, con la terminologia appena introdotta, un punto improprio di  $\hat{\mathbb{E}}^2$ . In altri termini  $P = [r]$  è una classe di rette parallele, rappresentata, ad esempio, dalla retta  $r$ . Sia  $\mathbf{u}_r = (l, m)$  un vettore direzionale di  $r$ . Diremo che  $P$  ha coordinate omogenee  $[l, m, 0]$ , ovvero che una sua terna di coordinate omogenee è data da una qualunque terna  $(\alpha, \beta, 0)$ , dove  $\alpha, \beta$  sono numeri direzionali di  $r$  (che come è noto sono definiti solo a meno di proporzionalità). Se  $r$  è la retta descritta dalla (7.35), abbiamo che  $\mathbf{u}_r = (1, 1)$ , e se  $P = [r] \in \mathcal{L}/\parallel \subset \hat{\mathbb{E}}^2$ , le coordinate omogenee di  $P$  sono  $[1, 1, 0]$ . Abbiamo in tal modo costruito un'applicazione

$$\hat{c} : \hat{\mathbb{E}}^2 \longrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$$

che associa ad ogni punto di  $\hat{\mathbb{E}}^2$  un elemento di  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ , che è biettiva.

Se  $P' \in \mathbb{E}_{\mathbb{C}}^2$  ha coordinate affini  $(x', y')$ , ogni terna  $(x'_1, x'_2, x'_3)$  di coordinate omogenee di  $P'$  sarà tale che  $x'_3 \neq 0$  e  $(x', y', 1) \propto (x'_1, x'_2, x'_3)$ , e ciò equivale a dire che

$$x' = \frac{x'_1}{x'_3}; \quad y' = \frac{x'_2}{x'_3}; \quad x'_3 \neq 0. \quad (7.37)$$

Le (7.37) ci consentono agevolmente di passare dalle coordinate affini a quelle omogenee e viceversa. Osserviamo che se, invece,  $P' \in \mathcal{L}/\parallel$ , e cioè  $P'$  è una classe di rette parallele, se  $P' \equiv [l', m', 0]$  vuol dire che  $(l', m')$  è un vettore direzionale di una qualunque delle rette che rappresentano  $P'$ .

Consideriamo la generica retta  $r$  di equazione (7.34) e l'equazione omogenea di primo grado in  $x_1, x_2, x_3$

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0. \quad (7.38)$$

Osserviamo che il punto  $P' \in \mathbb{E}_{\mathbb{C}}^2$  di coordinate affini  $(x', y')$  e di coordinate omogenee  $(x'_1, x'_2, x'_3)$ , con  $x'_3 \neq 0$ , appartiene ad  $r$  se e solo se la coppia  $(x', y')$  è una soluzione della (7.34), ma anche se e solo se la terna  $(x'_1, x'_2, x'_3)$  è una soluzione della (7.38). Però la (7.38) è soddisfatta anche dalla terna  $(-b, a, 0)$  (ed ogni altra ad essa proporzionale) che rappresenta la direzione di  $r$ , che è un punto improprio di  $\hat{\mathbb{E}}_{\mathbb{C}}^2$  che possiamo indicare, ad esempio, con il simbolo  $P_r$ . Pertanto la (7.38) rappresenta in  $\hat{\mathbb{E}}_{\mathbb{C}}^2$  il luogo geometrico  $r \cup \{P_r\}$ , che indicheremo con il simbolo  $\hat{r}$  e chiameremo *retta ampliata*. Scriveremo quindi

$$\hat{r} : ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0.$$

Osserviamo esplicitamente che anche la terna nulla  $(0, 0, 0)$  è soluzione della (7.38), ma non va considerata, in quanto, nel nostro contesto, essa non ha significato geometrico, nel senso che non rappresenta in coordinate omogenee alcun punto di  $\hat{\mathbb{E}}_{\mathbb{C}}^2$ .

E' interessante sottolineare che se  $r, s$  sono due rette distinte in  $\mathbb{E}_{\mathbb{C}}^2$  e  $\hat{r}, \hat{s}$  sono le corrispondenti rette ampliate in  $\hat{\mathbb{E}}_{\mathbb{C}}^2$ , accade che  $r, s$  possono essere incidenti, ed in tal caso ammettono un punto di intersezione, oppure parallele (propriamente), ed in tal caso non si intersecano. Invece in ogni caso  $\hat{r}, \hat{s}$  si intersecano in un punto, che sarà un punto proprio quando  $r, s$  sono incidenti, e tale punto coincide con il punto di incidenza di  $r, s$ , e sarà invece un punto improprio nel caso in cui  $r, s$  siano parallele, ed allora il punto di intersezione sarà proprio la direzione comune delle due rette. Osserviamo infine che, in coordinate omogenee, affinché la (7.38) sia effettivamente una equazione di primo grado, occorre e basta che gli scalari  $a, b, c$  non si annullino simultaneamente. Ha pertanto senso l'equazione

$$x_3 = 0$$

che rappresenta il luogo di tutti i punti impropri di  $\hat{\mathbb{E}}_{\mathbb{C}}^2$ . Tale luogo si indica con il simbolo  $r_{\infty}$  ed è noto come la *retta impropria* del piano ampliato. Quando

non sarà strettamente necessario, indicheremo con lo stesso simbolo una retta  $r$  e la corrispondente retta ampliata  $\hat{r}$ .

Concludiamo il capitolo con alcune osservazioni sulle formule di cambiamento delle coordinate non affini ma omogenee. Consideriamo la situazione descritta nelle formule (7.29) e successive, e definiamo una nuova matrice, che chiamiamo *matrice completa del cambiamento*

$$\tilde{A} = \left( \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right). \quad (7.39)$$

Si verifica facilmente che

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \tilde{A} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Pertanto, se, in termini di coordinate omogenee, abbiamo che  $P \equiv_{\mathcal{R}} [x_1, x_2, x_3]$  e  $P \equiv_{\mathcal{R}'} [x'_1, x'_2, x'_3]$ , la terna di coordinate omogenee  $\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}$  è data, a meno di

proporzionalità, dal prodotto  $\tilde{A} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ , ovvero esiste uno scalare non nullo  $k$  tale che

$$k \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \tilde{A} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$



## Capitolo 8

# Coniche

### Circonferenza, ellisse, iperbole, parabola

Fissato un punto  $C \equiv (x_0, y_0)$  ed un numero reale positivo  $h$ , si definisce *circonferenza* di centro  $C$  e raggio  $h$  il luogo  $\gamma$  dei punti del piano che distano  $h$  da  $C$ , ovvero

$$\gamma = \{ R \mid d(R, C) = h \} .$$

Poiché, posto  $R \equiv (x_1, y_1)$ , si ha che

$$d(R, C) = |\overrightarrow{RC}| = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2} ,$$

il luogo  $\gamma$  è rappresentato dall'equazione

$$\sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2} = h$$

o anche

$$(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 = h^2$$

che è del tipo

$$x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0 , \quad (c < a^2 + b^2) ,$$

dove  $a = -x_0$ ,  $b = -y_0$ ,  $h = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$ . Si verifica che ogni equazione di questo tipo rappresenta una circonferenza, il cui centro ha coordinate  $(-a, -b)$ , di raggio  $h = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$ . Osserviamo che se  $h = 0$  otteniamo il luogo costituito dal solo punto reale  $C$ , che possiamo considerare una circonferenza degenera di raggio nullo. Se invece  $h < 0$ , si tratta di una circonferenza immaginaria, nel senso che il luogo  $\gamma$  è privo di punti reali, ma dotato di punti immaginari. Ad esempio, al luogo

$$\gamma : x^2 + y^2 + 1 = 0$$

appartiene il punto  $A \equiv (i, 0)$ .

Descriviamo ora la costruzione dell'ellisse. Consideriamo due punti distinti  $F', F''$  e fissiamo, per comodità, il riferimento che ha come origine  $O$  il punto medio di  $F'F''$ , asse delle ascisse passante per  $F', F''$ , con  $F''$  nel semiasse positivo, ed asse delle ordinate passante per  $O$ , ortogonale all'asse delle ascisse, con l'ovvio orientamento.

Sia, ad esempio,  $d(F', F'') = 2c$ . Ciò vuol dire che  $F' \equiv (-c, 0)$  e  $F'' \equiv (c, 0)$ . Sia  $a > c$ . Consideriamo il luogo  $\gamma$  dei punti  $R \equiv (x_1, y_1)$  tali che la somma delle distanze di  $R$  da  $F'$  e  $F''$  sia  $2a$ , ovvero

$$\gamma = \{ R \mid d(R, F') + d(R, F'') = 2a \} .$$

Abbiamo che

$$R \in \gamma \iff \sqrt{(x_1 + c)^2 + y_1^2} + \sqrt{(x_1 - c)^2 + y_1^2} = 2a .$$

Con una quadratura si ottiene

$$(x_1 + c)^2 + y_1^2 + (x_1 - c)^2 + y_1^2 + 2\sqrt{(x_1 + c)^2 + y_1^2}\sqrt{(x_1 - c)^2 + y_1^2} = 4a^2$$

ovvero

$$(x_1 + c)^2 + y_1^2 + (x_1 - c)^2 + y_1^2 - 4a^2 = -2\sqrt{(x_1 + c)^2 + y_1^2}\sqrt{(x_1 - c)^2 + y_1^2} .$$

Con una ulteriore quadratura si ottiene

$$((x_1 + c)^2 + y_1^2 + (x_1 - c)^2 + y_1^2 - 4a^2)^2 = 4((x_1 + c)^2 + y_1^2)((x_1 - c)^2 + y_1^2) ,$$

ovvero

$$(2x_1^2 + 2y_1^2 + 2c^2 - 4a^2)^2 = 4(x_1^2 + y_1^2 + c^2 + 2cx_1)(x_1^2 + y_1^2 + c^2 - 2cx_1)$$

o ancora

$$(x_1^2 + y_1^2 + c^2 - 2a^2)^2 = (x_1^2 + y_1^2 + c^2)^2 - 4c^2x_1^2$$

o anche

$$(x_1^2 + y_1^2 + c^2)^2 + 4a^4 - 4a^2(x_1^2 + y_1^2 + c^2) = (x_1^2 + y_1^2 + c^2)^2 - 4c^2x_1^2$$

e quindi

$$4a^4 - 4a^2(x_1^2 + y_1^2 + c^2) = -4c^2x_1^2 .$$

Riordinando e dividendo per 4, abbiamo

$$(a^2 - c^2)x_1^2 + a^2y_1^2 = a^2(a^2 - c^2) .$$

Poniamo allora  $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ , e cioè  $b^2 = a^2 - c^2$ , dividiamo per  $a^2 b^2$  e otteniamo

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1 .$$

Pertanto una rappresentazione di  $\gamma$  è la seguente:

$$\gamma : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 . \quad (8.1)$$

Il luogo  $\gamma$  si dice *ellisse* di centro  $O$  e semiassi  $a, b$ , e la (8.1) è la rappresentazione dell'ellisse in forma canonica. I punti  $A' \equiv (-a, 0)$ ,  $A'' \equiv (a, 0)$ ,  $B' \equiv (0, -b)$ ,  $B'' \equiv (0, b)$  di intersezione di  $\gamma$  con gli assi cartesiani si dicono *vertici*, mentre i punti  $F', F''$  sono i *fuochi* dell'ellisse.

Studiamo ora la costruzione dell'iperbole. Utilizziamo gli stessi punti  $F', F''$  e lo stesso riferimento di prima e consideriamo un numero reale positivo  $a < c$ . Consideriamo il luogo  $\gamma$  dei punti  $R \equiv (x_1, y_1)$  tali che la differenza delle distanze tra  $R$  ed  $F', F''$  (in valore assoluto) sia  $2a$ :

$$\gamma = \{ R \mid |d(R, F') - d(R, F'')| = 2a \} .$$

Si ha quindi che

$$R \in \gamma \iff \left| \sqrt{(x_1 + c)^2 + y_1^2} - \sqrt{(x_1 - c)^2 + y_1^2} \right| = 2a .$$

Con una doppia quadratura, in analogia con il caso dell'ellisse, abbiamo che

$$(c^2 - a^2)x_1^2 - a^2 y_1^2 = a^2(c^2 - a^2) .$$

Poniamo allora  $b = \sqrt{c^2 - a^2}$ , e cioè  $b^2 = c^2 - a^2$ , dividiamo per  $a^2 b^2$  e otteniamo

$$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} = 1 .$$

Il luogo  $\gamma$  così descritto si dice *iperbole* di centro  $O$ , semiasse maggiore  $a$  e semiasse minore  $b$ , ed è rappresentato dall'equazione

$$\gamma : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 . \quad (8.2)$$

La (8.2) è la rappresentazione dell'iperbole in forma canonica. I punti  $F', F''$  sono i *fuochi* dell'iperbole, i punti  $A' \equiv (-a, 0)$ ,  $A'' \equiv (a, 0)$  di intersezione di  $\gamma$  con l'asse delle ascisse sono i *vertici* reali dell'iperbole, ed infine le rette

$$s' : bx - ay = 0 , \quad s'' : bx + ay = 0$$

sono gli *asintoti* di  $\gamma$ .

Consideriamo ora una retta  $r$  ed un punto  $F \notin r$ . Sia ad esempio  $d(F, r) = p > 0$ . La retta  $s$  per  $F$  perpendicolare ad  $r$  interseca  $r$  in un punto  $H$ . Sia  $O$  il punto medio di  $H, F$ ,  $s$  l'asse delle ascisse, e la perpendicolare ad  $s$  passante per  $O$  l'asse delle ordinate, opportunamente orientati come in figura. Nel riferimento così ottenuto avremo che  $F \equiv (\frac{p}{2}, 0)$ . Consideriamo il luogo  $\gamma$  dei punti  $R \equiv (x_1, y_1)$  equidistanti da  $F$  ed  $r$ . Avremo cioè

$$\gamma = \{ R \mid d(R, F) = d(R, r) \} .$$

Poiché

$$d(R, F) = \sqrt{(x_1 - \frac{p}{2})^2 + y_1^2} , \quad d(R, r) = x_1 + \frac{p}{2}$$

avremo che

$$R \in \gamma \iff \sqrt{(x_1 - \frac{p}{2})^2 + y_1^2} = x_1 + \frac{p}{2} ,$$

ovvero, con una quadratura,

$$(x_1 - \frac{p}{2})^2 + y_1^2 = (x_1 + \frac{p}{2})^2$$

e cioè

$$y_1^2 = 2px_1 .$$

Il luogo così descritto si dice *parabola*, l'origine  $O$  appartiene ad essa e si dice *vertice*,  $F$  è il *fuoco*,  $r$  la *direttrice*. La parabola ammette quindi la seguente rappresentazione:

$$\gamma : y = 2px . \tag{8.3}$$

La (8.3) è la rappresentazione della parabola in forma canonica.

## Generalità sulle coniche

In questo capitolo useremo sempre le seguenti notazioni. Indicheremo con  $X, Y, W, Z$  i vettori colonna

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} ; Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} ; W = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} ; Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} .$$

Useremo le notazioni  $X^t, Y^t, W^t, Z^t$  per gli stessi vettori in notazione di riga.  $X$  rappresenterà la terna delle incognite,  $Y, W, Z$  le terne delle coordinate omogenee

di punti del piano ampliato  $\widehat{\mathbb{E}}_{\mathbb{C}}^2$ , spesso indicati con i simboli  $R, S, T$ . In  $\widehat{\mathbb{E}}_{\mathbb{C}}^2$  si consideri un riferimento ortonormale  $\mathcal{R} = (O; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$  reale. Abbiamo quindi una biezione

$$\widehat{c}: \widehat{\mathbb{E}}_{\mathbb{C}}^2 \longrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{C}),$$

come descritto alla fine del capitolo precedente. Se  $R \in \widehat{\mathbb{E}}_{\mathbb{C}}^2$  e  $\widehat{c}(R) = [y_1, y_2, y_3]$ , scriveremo anche, per brevità,  $R \equiv Y^t$ .

Consideriamo lo spazio vettoriale numerico complesso di dimensione 3,  $\mathbb{C}^3$ , con una base ordinata fissata; per semplicità possiamo ad esempio scegliere quella canonica. Sia

$$f: \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}$$

una forma bilineare simmetrica (non nulla). Esisterà dunque una matrice simmetrica  $3 \times 3$

$$B = \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,3} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & b_{2,3} \\ b_{3,1} & b_{3,2} & b_{3,3} \end{pmatrix}$$

tale che se  $Y, W \in \mathbb{C}^3$  si abbia

$$f(Y, W) = f(y_1, y_2, y_3; w_1, w_2, w_3) = Y^t \cdot B \cdot W = \sum_{i,j=1}^3 b_{i,j} y_i w_j. \quad (8.4)$$

**8.1 DEFINIZIONE.** Si dice conica associata alla forma  $f$  il luogo geometrico  $\gamma_f$ , o anche  $\gamma$ , descritto dall'equazione

$$\gamma: \sum_{i,j=1}^3 b_{i,j} x_i x_j = 0 \quad (8.5)$$

che è omogenea di secondo grado nelle incognite  $x_1, x_2, x_3$ .

**8.2 DEFINIZIONE.** Se la matrice  $B$  è reale, o proporzionale ad una matrice reale, la conica  $\gamma$  si dice a sua volta reale.

Osserviamo che, in virtù della simmetria di  $f$ , o di  $B$ , la (8.5) si riduce a

$$\gamma: b_{1,1}x_1^2 + 2b_{1,2}x_1x_2 + b_{2,2}x_2^2 + 2b_{1,3}x_1x_3 + 2b_{2,3}x_2x_3 + b_{3,3}x_3^2 = 0. \quad (8.6)$$

Poiché si è supposto che  $f$  non è nulla, non tutti i coefficienti della matrice  $B$  possono annullarsi simultaneamente. Quindi il rango di  $B$  è almeno 1 e la (8.5), o anche (8.6), è effettivamente un'equazione omogenea di secondo grado nelle incognite  $x_1, x_2, x_3$ . Osserviamo esplicitamente che la conica  $\gamma$ , pur essendo una conica *reale*, potrebbe non possedere alcun punto reale, oppure possedere un unico punto reale, o infiniti punti reali, mentre possiede sempre infiniti punti

immaginari. Un esempio molto semplice di conica reale priva di punti reali è fornito dalla conica

$$\gamma : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0 .$$

Infatti l'unica soluzione reale di tale equazione è data dalla terna nulla  $(0, 0, 0)$ , che non rappresenta, in coordinate omogenee, alcun punto di  $\widehat{\mathbb{E}}_{\mathbb{C}}^2$ .

Se  $\gamma$  è una conica reale definita dalla (8.6) e  $P'$  è un punto proprio di coordinate affini  $(x', y')$  e omogenee  $[x'_1, x'_2, x'_3]$  (con  $x'_3 \neq 0$ ), è chiaro che  $P' \in \gamma$  se e solo se la terna  $(x'_1, x'_2, x'_3)$  è soluzione della (8.6), ma è agevole verificare che  $P' \in \gamma$  se e solo se la coppia  $(x', y')$  è soluzione della seguente equazione di secondo grado non omogenea

$$b_{1,1}x^2 + 2b_{1,2}xy + b_{2,2}y^2 + 2b_{1,3}x + 2b_{2,3}y + b_{3,3} = 0 \quad (8.7)$$

in  $x, y$ , che chiameremo *equazione non omogenea associata a  $\gamma$* . In altri termini, come già osservato nel caso delle rette nel piano affine e nel piano ampliato, abbiamo che il luogo descritto (in coordinate affini) dalla (8.7) coincide con la parte propria del luogo descritto (in coordinate omogenee) dalla (8.6). Però  $\gamma$  possiede anche alcuni punti impropri, che si possono studiare solo in coordinate omogenee mediante la (8.6). Tali punti avranno la terza coordinata omogenea nulla, e quindi costituiscono l'intersezione  $r_\infty \cap \gamma$  della conica  $\gamma$  con la retta impropria  $r_\infty$ . Osserviamo che se  $r$  è una qualunque retta nel piano ampliato  $\widehat{\mathbb{E}}_{\mathbb{C}}^2$  e  $\gamma$  è una conica reale vale il seguente risultato, di cui omettiamo la dimostrazione.

**8.3 TEOREMA.** *L'intersezione  $r \cap \gamma$  è di uno dei seguenti tipi:*

- (a)  $r \cap \gamma$  è un punto (reale);
- (b)  $r \cap \gamma$  è costituita da due punti reali;
- (c)  $r \cap \gamma$  è costituita da due punti immaginari;
- (d)  $r \cap \gamma$  coincide con  $r$ , ovvero  $r \subseteq \gamma$ .

Nel caso (a) diremo che  $r$  è tangente, nel caso (b) secante, nel caso (c) esterna alla conica. Nel caso (d) può accadere che  $\gamma = r$  oppure che  $\gamma$  sia l'unione di  $r$  e di un'altra retta. Il teorema precedente, applicato al caso  $r = r_\infty$ , ci dice che se  $r_\infty$  non è contenuta nella conica,  $\gamma$  possiede un unico punto improprio, oppure due punti impropri reali o infine due punti impropri immaginari.

La conica  $\gamma$  induce una relazione tra i punti del piano ampliato.

**8.4 DEFINIZIONE.** *I punti  $R \equiv Y^t, S \equiv W^t$  si dicono coniugati rispetto a  $\gamma$ , o anche rispetto ad  $f$ , se*

$$f(Y, W) = 0 .$$

Scriveremo allora  $R \sim_f S$ .

Alla luce di tale definizione, la conica  $\gamma$  può vedersi come il luogo dei punti autoconiugati, ovvero

$$\gamma = \{ R \in \widehat{\mathbb{E}}_{\mathbb{C}}^2 \mid R \sim_f R \} .$$

Si verifica agevolmente che se si cambia riferimento ortonormale reale l'equazione di  $\gamma$  nel nuovo riferimento è ancora omogenea di secondo grado in tre incognite. Si verifica anche, ma non così agevolmente, che se  $g$  è un'altra forma simmetrica  $f$  e  $g$  rappresentano la stessa conica se e solo se sono proporzionali ordinatamente i loro coefficienti:

$$\gamma_f = \gamma_g \iff f \propto g .$$

8.5 DEFINIZIONE. Un punto  $V \in \widehat{\mathbb{E}}_{\mathbb{C}}^2$  si dice punto doppio di  $\gamma$  se è coniugato ad ogni altro punto di  $\widehat{\mathbb{E}}_{\mathbb{C}}^2$ , ovvero

$$V \sim_f R, \forall R \in \widehat{\mathbb{E}}_{\mathbb{C}}^2 ,$$

o ancora, posto  $V \equiv Z^t$ ,

$$f(Z, Y) = 0, \forall Y \in \mathbb{C}^3 .$$

Indicheremo con  $\mathcal{D}$  l'insieme dei punti doppi di  $\gamma$ .

Osserviamo che gli eventuali punti doppi di  $\gamma$  sono necessariamente reali.

8.6 DEFINIZIONE. Per ogni punto  $R \in \widehat{\mathbb{E}}_{\mathbb{C}}^2$  definiamo un sottoinsieme  $\omega(R) \subseteq \widehat{\mathbb{E}}_{\mathbb{C}}^2$  al modo seguente:

$$\omega(R) = \{ S \in \widehat{\mathbb{E}}_{\mathbb{C}}^2 \mid R \cong S \} .$$

Il sottoinsieme  $\omega(R)$  prende il nome di *luogo polare* di  $R$  rispetto a  $\gamma$ .

Nel caso in cui  $\omega(R)$  sia una retta, parleremo di *retta polare* o semplicemente di *polare* di  $R$ .

8.7 PROPOSIZIONE. Per ogni punto  $R$  di  $\widehat{\mathbb{E}}_{\mathbb{C}}^2$  abbiamo che:

- (i) se  $R \in \mathcal{D}$ ,  $\omega(R) \in \widehat{\mathbb{E}}_{\mathbb{C}}^2$ ;
- (ii) se  $R \notin \mathcal{D}$ ,  $\omega(R)$  è una retta.

Pertanto, se  $\gamma$  è non degenere, non esistono punti doppi e ogni punto possiede retta polare, e quindi  $\omega$  può riguardarsi come applicazione da  $\widehat{\mathbb{E}}_{\mathbb{C}}^2$  all'insieme  $\widehat{\mathbb{L}}_{\mathbb{C}}^2$  delle rette di  $\widehat{\mathbb{E}}_{\mathbb{C}}^2$ . Dalla simmetria della forma  $f$  discende facilmente il seguente risultato.

8.8 TEOREMA DI RECIPROCIÀ. Sia  $\gamma$  una conica e siano  $R, S$  due punti di  $\widehat{\mathbb{E}}_{\mathbb{C}}^2$ . Allora

$$R \in \omega(S) \iff S \in \omega(R) .$$

In particolare un punto doppio appartiene al luogo polare di ogni altro punto.

8.9 TEOREMA. Sia  $\gamma$  una conica reale, descritta dalla (8.6). L'insieme  $\mathcal{D}$  dei suoi punti doppi è di uno dei seguenti tipi:

- (a)  $\mathcal{D} = \emptyset$  se e solo se  $\rho(B) = 3$ ;
- (b)  $\mathcal{D} = \{V\}$ , un singleton, se e solo se  $\rho(B) = 2$ ;
- (c)  $\mathcal{D} = r$ , una retta, se e solo se  $\rho(B) = 1$ .

8.10 DEFINIZIONE. La conica  $\gamma$  si dirà non degenerare se  $\mathcal{D} = \emptyset$ , degenerare (o riducibile) se  $\mathcal{D} \neq \emptyset$ . In particolare, se  $\mathcal{D} = \{V\}$  e  $\rho(B) = 2$   $\gamma$  è semplicemente degenerare, se  $\mathcal{D}$  è una retta e  $\rho(B) = 1$   $\gamma$  è doppiamente degenerare.

Sulle coniche doppiamente degeneri non c'è molto da dire. Si verifica che  $\rho(B) = 1$  se e solo se esiste un polinomio omogeneo di primo grado

$$p(x_1, x_2, x_3) = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3$$

(a coefficienti non tutti nulli) tale che

$$f(x_1, x_2, x_3; x_1, x_2, x_3) = (p(x_1, x_2, x_3))^2 .$$

Se indichiamo con  $r$  la retta rappresentata dal polinomio  $p$ , abbiamo che  $\gamma = r = \mathcal{D}$ , e diciamo che i punti di  $r$  sono contati due volte, in quanto sono doppi. La retta  $r$  risulta necessariamente reale.

8.11 ESEMPIO. Sia  $\gamma : x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3 + x_3^2 = 0$ . La matrice associata è

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

che ha chiaramente rango 1. Si vede subito che

$$x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3 + x_3^2 = (x_1 - x_2 + x_3)^2 .$$

Quindi  $\gamma$  non è altro che la retta

$$r : x_1 - x_2 + x_3 = 0$$

contata due volte. La parte propria di  $r$  è rappresentata, in coordinate affini, dall'equazione

$$x - y + 1 = 0 .$$

Il punto improprio di  $r$ , che è anche l'unico punto improprio di  $\gamma$ , è il punto  $P_r \equiv [1, 1, 0]$ .

Il caso delle coniche semplicemente degeneri è un po' più articolato. In analogia con il caso precedente, accade che  $\rho(B) = 2$  se e solo se esistono due polinomi

$$p'(x_1, x_2, x_3) = a'_1 x_1 + a'_2 x_2 + a'_3 x_3 ; p''(x_1, x_2, x_3) = a''_1 x_1 + a''_2 x_2 + a''_3 x_3$$

(non identicamente nulli), tali che

$$f(x_1, x_2, x_3; x_1, x_2, x_3) = p'(x_1, x_2, x_3) \cdot p''(x_1, x_2, x_3) .$$

Pertanto, dette  $r', r''$  le rette rappresentate dalle equazioni

$$p'(x_1, x_2, x_3) = 0 ; p''(x_1, x_2, x_3) = 0 ,$$

si ha che  $\gamma = r' \cup r''$  e  $\mathcal{D} = \{V\}$ , dove  $V$  è il punto di intersezione delle due rette, che è sicuramente reale, e può essere proprio (nel caso di rette incidenti) o improprio (quando  $r' \parallel r''$ ).

8.12 ESEMPIO. (Coppia di rette reali parallele). Sia  $\gamma : x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$ . La matrice associata è

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

che ha chiaramente rango 2. Si vede subito che

$$x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 - x_3^2 = (x_1 - x_2 + x_3) \cdot (x_1 - x_2 - x_3) .$$

Pertanto, posto

$$r' : x_1 - x_2 + x_3 = 0 ; r'' : x_1 - x_2 - x_3 = 0 ,$$

vediamo che  $\gamma = r' \cup r''$  e  $\mathcal{D} = \{V\}$ , dove  $V \equiv [1, 1, 0]$ . Le rette  $r', r''$  sono parallele e  $V = P_{r'} = P_{r''}$  è il punto improprio che rappresenta la direzione comune delle due rette.

8.13 ESEMPIO. (Coppia di rette reali incidenti). Sia  $\gamma : x_1^2 - x_2^2 - 2x_2x_3 - x_3^2 = 0$ . La matrice associata è

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

che ha chiaramente rango 2. Si vede subito che

$$x_1^2 - x_2^2 - 2x_2x_3 - x_3^2 = (x_1 - x_2 - x_3) \cdot (x_1 + x_2 + x_3) .$$

Pertanto, posto

$$r' : x_1 - x_2 - x_3 = 0 ; r'' : x_1 + x_2 + x_3 = 0 ,$$

vediamo che  $\gamma = r' \cup r''$  e  $\mathcal{D} = \{V\}$ , dove  $V \equiv [0, -1, 1]$ . Le rette  $r', r''$  sono incidenti e  $V$  è il punto reale proprio che le due rette hanno in comune.

8.14 ESEMPIO. (Coppia di rette immaginarie parallele, con direzione reale). Sia  $\gamma : x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$ . La matrice associata è

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

che ha chiaramente rango 2. Si vede subito che

$$x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + ix_3) \cdot (x_1 + x_2 - ix_3) .$$

Pertanto, posto

$$r' : x_1 + x_2 + ix_3 = 0 ; r'' : x_1 + x_2 - ix_3 = 0 ,$$

vediamo che  $\gamma = r' \cup r''$  e  $\mathcal{D} = \{V\}$ , dove  $V \equiv [-1, 1, 0]$ . Le rette  $r', r''$  sono immaginarie parallele e  $V$  è il punto reale improprio, ovvero la direzione, che le due rette hanno in comune.

8.15 ESEMPIO. (Coppia di rette immaginarie incidenti in un punto reale). Sia  $\gamma : x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_3 + x_3^2 = 0$ . La matrice associata è

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

che ha chiaramente rango 2. Si vede subito che

$$x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_3 + x_3^2 = (x_1 + x_3)^2 + x_2^2 = (x_1 + ix_2 + x_3) \cdot (x_1 - ix_2 + x_3) .$$

Pertanto, posto

$$r' : x_1 + ix_2 + x_3 = 0 ; r'' : x_1 - ix_2 + x_3 = 0 ,$$

vediamo che  $\gamma = r' \cup r''$  e  $\mathcal{D} = \{V\}$ , dove  $V \equiv [-1, 0, 1]$ . Le rette  $r', r''$  sono immaginarie incidenti e  $V$  è il punto reale proprio che le due rette hanno in comune.

8.16 ESEMPIO. (Coppia di rette reali di cui una è la retta impropria). Sia  $\gamma : x_1x_3 + x_2x_3 + x_3^2 = 0$ . La matrice associata è

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

che ha chiaramente rango 2. Si vede subito che

$$x_1x_3 + x_2x_3 + x_3^2 = x_3 \cdot (x_1 + x_2 + x_3) .$$

Pertanto, posto

$$r' = r_\infty : x_3 = 0 ; r'' : x_1 + x_2 + x_3 = 0 ,$$

vediamo che  $\gamma = r_\infty \cup r''$  e  $\mathcal{D} = \{V\}$ , dove  $V \equiv [-1, 1, 0]$ .

Supponiamo ora che  $\gamma$  sia non degenera, e cioè si abbia  $\det B \neq 0$ , ovvero  $\rho(B) = 3$ . Deduciamo che  $\gamma$  non contiene rette e che ogni retta interseca  $\gamma$  in uno o due punti. Consideriamo allora l'insieme  $r_\infty \cap \gamma$  dei punti impropri della conica.

8.17 DEFINIZIONE. La conica  $\gamma$  si dice ellisse se possiede due punti impropri immaginari, iperbole se possiede due punti impropri reali, parabola se possiede un punto improprio (reale).

Il seguente risultato fornisce uno strumento per classificare una conica non degenera.

8.18 TEOREMA. Sia  $\gamma$  una conica reale rappresentata dalla (8.6) e supponiamo che  $\gamma$  non contenga la retta impropria  $r_\infty$ . Allora si ha che

$$r_\infty \cap \gamma = \begin{cases} 2 \text{ punti immaginari} & \iff \det B_{3,3} > 0 \\ 1 \text{ punto reale} & \iff \det B_{3,3} = 0 \\ 2 \text{ punti reali} & \iff \det B_{3,3} < 0 \end{cases}$$

8.19 COROLLARIO. Sia  $\gamma$  una conica reale non degenera rappresentata dalla (8.6). Allora si ha che

$$\gamma \text{ è } \begin{cases} \text{un'ellisse} & \iff \det B_{3,3} > 0 \\ \text{una parabola} & \iff \det B_{3,3} = 0 \\ \text{un'iperbole} & \iff \det B_{3,3} < 0 \end{cases}$$

Nel caso in cui  $\gamma$  sia una conica semplicemente degenera, il teorema precedente ci assicura che la conica è unione di due rette immaginarie incidenti se  $\det B_{3,3} > 0$ , di due rette parallele (reali o immaginarie, ma di direzione reale) se  $\det B_{3,3} = 0$ , di due rette reali incidenti se  $\det B_{3,3} < 0$ .

Come già osservato, il fatto che  $\gamma$  sia una conica reale, ovvero una conica rappresentata da un'equazione a coefficienti reali, non garantisce l'esistenza in  $\gamma$  di punti reali. E' pertanto utile il seguente risultato, di non facile dimostrazione.

8.20 TEOREMA. *La conica reale  $\gamma$  rappresentata dalla (8.6) possiede almeno un punto reale se e solo se*

$$\det B_{3,3} \leq 0 \quad \vee \quad b_{1,1} \cdot \det B \leq 0 .$$

Pertanto una conica che non possiede punti reali è caratterizzata dal verificarsi simultaneamente delle condizioni seguenti:

$$\det B_{3,3} > 0 \quad \vee \quad b_{1,1} \cdot \det B > 0 . \quad (8.8)$$

La seconda delle (8.8) implica che  $\det B \neq 0$ , e quindi  $\gamma$  è non degenera, e la prima delle (8.8) ci dice che si tratta di un'ellisse. Un'ellisse priva di punti reali è detta immaginaria, ed è caratterizzata dalla seconda delle (8.8). Un'ellisse dotata di punti reali si dice invece ordinaria.

Ci occuperemo ora di alcune applicazioni del concetto di retta polare nel caso in cui la conica  $\gamma$  sia non degenera. Abbiamo già osservato che in tale situazione ogni punto possiede una retta polare. Più precisamente, vale il seguente risultato.

8.21 PROPOSIZIONE. *L'applicazione  $\omega : \widehat{\mathbb{E}}_{\mathbb{C}}^2 \rightarrow \widehat{\mathbb{L}}_{\mathbb{C}}^2$  che ad ogni punto associa la sua (retta) polare è biettiva.*

Di conseguenza, per ogni retta  $r$  esisterà esattamente un punto  $R$  tale che  $\omega(R) = r$  e diremo che  $R$  è il *polo* di  $r$ . Inoltre

8.22 COROLLARIO. *Per ogni punto  $R$  abbiamo che*

$$R \in \omega(R) \iff R \in \gamma .$$

In tal caso la polare di  $R$  coincide con la tangente di  $\gamma$  in  $R$ . Dalla definizione di retta polare deduciamo che se  $R \in \widehat{\mathbb{E}}_{\mathbb{C}}^2$  e  $R \equiv Y^t$ , o, in altri termini,  $R$  ha coordinate omogenee  $y_1, y_2, y_3$ , la retta polare di  $R$  si può rappresentare, in modo compatto, come segue:

$$\omega(R) : Y^t B X = 0 ,$$

ovvero, in modo più esplicito,

$$\omega(R) : ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0 ,$$

dove

$$a = Y^t \cdot B^1 = y_1 b_{1,1} + y_2 b_{2,1} + y_3 b_{3,1} ;$$

$$b = Y^t \cdot B^2 = y_1 b_{1,2} + y_2 b_{2,2} + y_3 b_{3,2} ;$$

$$c = Y^t \cdot B^3 = y_1 b_{1,3} + y_2 b_{2,3} + y_3 b_{3,3} .$$

Ricordiamo che  $R \in \gamma$  se e solo se

$$f(y_1, y_2, y_3; y_1, y_2, y_3) = f(Y, Y) = Y^t B Y = 0 .$$

Se invece accade che  $f(Y, Y) > 0$ , diremo che  $R$  è esterno a  $\gamma$ , mentre parleremo di punto interno quando  $f(Y, Y) < 0$ . Graficamente nel caso in cui  $R$  sia esterno, la polare si costruisce nel modo indicato nella seguente figura.

Si verifica infatti che esistono esattamente due rette reali  $s', s''$  per  $R$  tangenti a  $\gamma$ , e, detti  $S', S''$  i punti di tangenza, il Teorema di reciprocità ci assicura che la retta  $r$  per  $S', S''$  coincide con la polare di  $R$ . Se invece  $R$  è interno, si verifica che ogni retta reale per  $R$  è secante. Scelte quindi due rette  $r', r''$  per  $R$  ed indicati con  $A', B'$  i punti in cui  $r'$  interseca  $\gamma$  ed  $A'', B''$  i punti in cui  $r''$  interseca  $\gamma$ , consideriamo le tangenti a  $\gamma$  nei punti  $A', B', A'', B''$ . Indichiamo tali rette con i simboli  $s', t', s'', t''$  e consideriamo il punto  $C'$  in cui  $s'$  interseca  $t'$  e il punto  $C''$  in cui  $s''$  interseca  $t''$ . Il Teorema di reciprocità ci assicura, anche in questo caso, che la retta  $r$  per  $C', C''$  coincide con la polare di  $R$ .

Nella teoria delle coniche reali non degeneri riveste una notevole importanza lo studio delle polari dei punti impropri.

8.23 DEFINIZIONE. Sia  $\gamma$  una conica reale non degenera e sia  $R \in r_\infty$ .

- (i) Se la polare  $\omega(R)$  del punto improprio  $R$  è una retta propria, essa si dice diametro di  $\gamma$ , associato alla direzione rappresentata da  $R$ .
- (ii) Se  $\omega(R)$  è un diametro e  $R \in \gamma \cap r_\infty$ ,  $\omega(R)$  si dice asintoto di  $\gamma$ .
- (iii) Se  $\omega(R)$  è un diametro e risulta ortogonale alla direzione rappresentata da  $R$ ,  $\omega(R)$  si dice asse di  $\gamma$ .

8.24 TEOREMA. I diametri di una conica reale non degenera formano un fascio, che sarà proprio nel caso dell'ellisse e dell'iperbole, improprio nel caso della parabola.

Nel caso dell'ellisse e dell'iperbole, il punto  $C$  comune a tutti i diametri si dice *centro* della conica. Per tale motivo l'ellisse e l'iperbole sono dette *coniche a centro*.

8.25 OSSERVAZIONE. Per ogni punto improprio  $R$  non appartenente a  $\gamma$ , la polare  $\omega(R)$ , se è una retta propria (cioè è un diametro) ed è secante, è un asse di simmetria di  $\gamma$  rispetto alla direzione rappresentata da  $R$ , nel senso che se  $R \equiv [\alpha, \beta, 0]$  ed  $r$  è una retta di direzione  $\mathbf{u}_r = (\alpha, \beta)$ , detti  $A', A''$  i punti di intersezione di  $r$  con  $\gamma$  ed  $A$  il punto di intersezione di  $r$  con  $\omega(R)$ , si ha che  $A$  è il punto medio di  $A', A''$ .

8.26 OSSERVAZIONE. Le coniche a centro hanno due assi, che sono ortogonali tra loro. Se  $R \in r_\infty$  ed  $\omega(R)$  è un asse, detto  $S$  il punto improprio di  $\omega(R)$ ,  $\omega(S)$  è l'altro asse.

8.27 OSSERVAZIONE. La parabola ha un unico asse, il cui punto improprio è l'unico punto improprio della conica.

8.28 DEFINIZIONE. Un punto proprio si dice *vertice* se appartiene all'intersezione di un asse con la conica.

8.29 OSSERVAZIONE. (i) Un'ellisse ordinaria che non sia una circonferenza ha quattro vertici reali.

(ii) Un'iperbole ha due vertici reali e due vertici immaginari (che sono tra loro complessi coniugati).

(iii) Una parabola possiede un unico vertice reale.

Abbiamo finora ritrovato tutti gli elementi caratterizzanti di una conica,, così come appaiono dalla iniziale descrizione elementare, tranne i fuochi. Essi necessitano di un approccio un po' più sofisticato.

8.30 DEFINIZIONE. Si dicono punti ciclici del piano i punti (impropri immaginari)

$$C_1 \equiv [1, i, 0], \quad C_2 \equiv [1, -i, 0].$$

Ogni retta propria passante per un punto ciclico si dice isotropa.

Per ogni punto proprio  $R$  passano due rette isotrope: la retta  $r'$  per  $R$  e  $C_1$  e la retta  $r''$  per  $R$  e  $C_2$ .

8.31 DEFINIZIONE. Un fuoco di una conica reale non degenera  $\gamma$  è un punto proprio  $R \notin \gamma$  tale che le rette isotrope per  $R$  siano tangenti a  $\gamma$ .

Osserviamo che una conica a centro dotata di punti reali (iperbole o ellisse ordinaria) ha due fuochi reali e due immaginari coniugati, mentre una parabola ha un solo fuoco, che risulta reale.

## Riduzione in forma canonica

Consideriamo una conica  $\gamma$  rappresentata come in (8.6), e studiamo, in coordinate affini, la sua parte propria, rappresentata come in (8.7). In tale equazione abbiamo una parte quadratica

$$b_{1,1}x^2 + 2b_{1,2}xy + b_{2,2}y^2 = (x, y) \cdot B_{3,3} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

ed una parte lineare

$$2b_{1,3}x + 2b_{2,3}y = 2(b_{1,3}, b_{2,3}) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

per cui la (8.7) si scrive anche

$$\gamma : (x, y) \cdot B_{3,3} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 2(b_{1,3}, b_{2,3}) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + b_{3,3} = 0 \quad (8.9)$$

oppure

$$\gamma : (x, y, 1) \cdot B \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0. \quad (8.10)$$

Poiché  $B_{3,3}$ , al pari di  $B$ , è simmetrica, esiste una matrice ortogonale

$$P = \begin{pmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} \\ p_{2,1} & p_{2,2} \end{pmatrix} \in O(2)$$

tale che

$$P^t \cdot B \cdot P = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}.$$

Consideriamo allora il riferimento ortonormale  $\mathcal{R}' = (O, \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2)$  (con lo stesso origine  $O$  di  $\mathcal{R}$ ) tale che  $P$  sia la matrice di passaggio, ovvero  $M_{\mathcal{R}'}^{\mathcal{R}} = P$ . Ciò vuol dire che se, detto  $R$  il generico punto, si ha che

$$R \equiv_{\mathcal{R}} (x, y), \quad R \equiv_{\mathcal{R}'} (x', y'),$$

si avrà anche che

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}, \quad (x, y) = (x', y') \cdot P^t$$

e quindi  $\gamma$  sarà rappresentata, in  $\mathcal{R}'$  dall'equazione

$$\gamma : (x', y') \cdot P^t \cdot B_{3,3} \cdot P \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + 2(b_{1,3}, b_{2,3}) \cdot P \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + b_{3,3} = 0 \quad (8.11)$$

ovvero

$$\lambda x'^2 + \mu y'^2 + 2b'_{1,3}x' + 2b'_{2,3}y' + b_{3,3} = 0 \quad (8.12)$$

dove

$$b'_{1,3} = b_{1,3}p_{1,1} + b_{2,3}p_{2,1}, \quad b'_{2,3} = b_{1,3}p_{1,2} + b_{2,3}p_{2,2}.$$

Ora dobbiamo distinguere due casi. Per quanto riguarda il primo caso, supponiamo che gli autovalori  $\lambda, \mu$  siano entrambi non nulli. La (8.12) può scriversi allora

$$\lambda \left( x'^2 + 2 \frac{b'_{1,3}}{\lambda} x' \right) + \mu \left( y'^2 + 2 \frac{b'_{2,3}}{\mu} y' \right) + b_{3,3} = 0$$

o anche

$$\lambda \left( x'^2 + 2 \frac{b'_{1,3}}{\lambda} x' + \frac{b'^2_{1,3}}{\lambda^2} \right) + \mu \left( y'^2 + 2 \frac{b'_{2,3}}{\mu} y' + \frac{b'^2_{2,3}}{\mu^2} \right) + b_{3,3} - \frac{b'^2_{1,3}}{\lambda} - \frac{b'^2_{2,3}}{\mu} = 0$$

ovvero

$$\lambda \left( x' + \frac{b'_{1,3}}{\lambda} \right)^2 + \mu \left( y' + \frac{b'_{2,3}}{\mu} \right)^2 + b_{3,3} - \frac{b'^2_{1,3}}{\lambda} - \frac{b'^2_{2,3}}{\mu} = 0.$$

Consideriamo allora un ulteriore riferimento  $\mathcal{R}'' = (O'', \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2)$  (questa volta si tratta di una traslazione, ovvero cambia l'origine ma non la base di vettori) tale che, posto  $R \equiv_{\mathcal{R}''} (x'', y'')$ , si abbia

$$\begin{cases} x'' = x' + \frac{b'_{1,3}}{\lambda} \\ y'' = y' + \frac{b'_{2,3}}{\mu} \end{cases}$$

In altri termini, la matrice completa del cambiamento da  $\mathcal{R}'$  a  $\mathcal{R}''$  (vedi (7.39)) è

$$\tilde{A} = \left( \begin{array}{c|c} I_2 & \begin{matrix} b'_{1,3} \\ b'_{2,3} \end{matrix} \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right). \quad (8.13)$$

In  $\mathcal{R}''$  la conica è quindi rappresentata da

$$\gamma : \lambda x''^2 + \mu y''^2 + b''_{3,3} = 0 \quad (8.14)$$

dove

$$b''_{3,3} = b_{3,3} - \frac{b'^2_{1,3}}{\lambda} - \frac{b'^2_{2,3}}{\mu}.$$

Se  $b''_{3,3} \neq 0$ , con semplici passaggi si perviene ad una rappresentazione del tipo (8.1) quando  $\lambda, \mu$  sono concordi e  $b''_{3,3}$  è discorde da  $\lambda, \mu$ , e si tratterà di una ellisse ordinaria, si perviene ad una rappresentazione del tipo (8.2) quando  $\lambda, \mu$  sono discordi, e si tratterà allora di una iperbole. Se invece  $\lambda, \mu, b''_{3,3}$  sono concordi, avremo una ellisse immaginaria. Se  $b''_{3,3} = 0$  la (8.14) si riduce a

$$(\sqrt{|\lambda|}x'' + \sqrt{|\mu|}y'')(\sqrt{|\lambda|}x'' - \sqrt{|\mu|}y'') = 0$$

e  $\gamma$  è l'unione di due rette reali, quando  $\lambda, \mu$  sono concordi. Se invece  $\lambda, \mu$  sono discordi, ad esempio  $\lambda > 0$  e  $\mu < 0$ , otterremo l'equazione

$$(\sqrt{\lambda}x'' + i\sqrt{-\mu}y'')(\sqrt{\lambda}x'' - i\sqrt{-\mu}y'') = 0$$

e  $\gamma$  sarà l'unione di due rette immaginarie incidenti in un punto reale.

Consideriamo ora il secondo caso, ovvero supponiamo che uno degli autovallori, ad esempio  $\mu$ , si annulli. Allora la (8.12) si riduce a

$$\lambda x'^2 + 2b'_{1,3}x' + 2b'_{2,3}y' + b_{3,3} = 0$$

ovvero

$$\lambda(x'^2 + 2\frac{b'_{1,3}}{\lambda}x' + \frac{b'^2_{1,3}}{\lambda^2}) + 2b'_{2,3}y' + b_{3,3} - \frac{b'^2_{1,3}}{\lambda} = 0$$

ovvero

$$\lambda(x' + \frac{b'_{1,3}}{\lambda})^2 + \mu(y' + \frac{b'_{2,3}}{\mu})^2 + b''_{3,3} = 0 ,$$

dove

$$b''_{3,3} = b_{3,3} - \frac{b'^2_{1,3}}{\lambda} .$$

Se  $b'_{2,3} = 0$ , utilizziamo la traslazione

$$\begin{cases} x'' = x' + \frac{b'_{1,3}}{\lambda} \\ y'' = y' \end{cases}$$

ed otteniamo la rappresentazione

$$\gamma : \lambda x''^2 + b''_{3,3} = 0 .$$

In questo caso, se  $b''_{3,3} \neq 0$ ,  $\gamma$  è l'unione di due rette parallele, che saranno reali se  $\lambda, b''_{3,3}$  sono discordi, immaginarie (ma con direzione reale) se  $\lambda, b''_{3,3}$  sono concordi. Se invece  $b''_{3,3} = 0$ ,  $\gamma$  è doppiamente degenere.

Se infine  $b'_{2,3} \neq 0$ , utilizziamo la traslazione

$$\begin{cases} x'' = x' + \frac{b'_{1,3}}{\lambda} \\ y'' = y' + \frac{\lambda b_{3,3} - b'^2_{1,3}}{2b'_{2,3}\lambda} \end{cases}$$

ed otteniamo la rappresentazione

$$\gamma : \lambda x''^2 + 2b'_{2,3}y'' = 0 ,$$

che equivale ad un'equazione del tipo (8.3), e  $\gamma$  è una parabola.

In definitiva ogni conica può rappresentarsi, in un opportuno riferimento, in forma canonica.