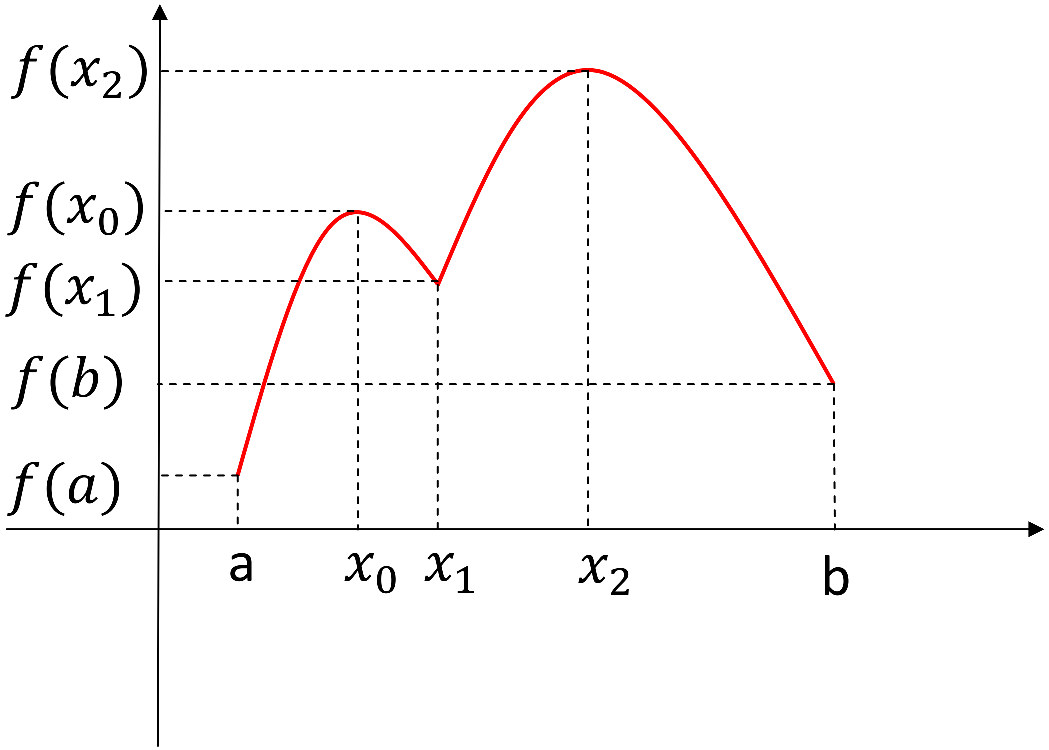
Applicazioni delle derivate

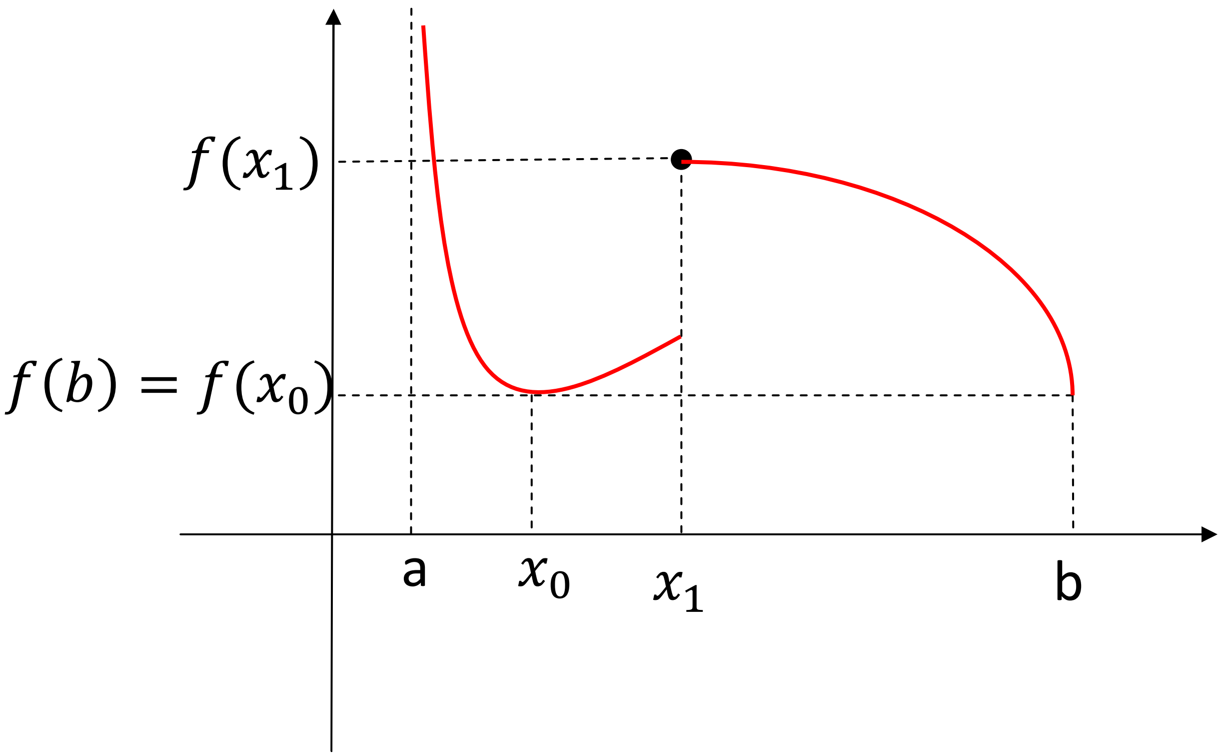
Uno degli studi più proficui del calcolo della derivata consiste nella ricerca degli estremi di una funzione.

Assegnata una funzione f definita in un intervallo $[a,b]$, ricordiamo che:

- il minimo ed il massimo assoluti di f in $[a,b]$, se esistono, sono unici (naturalmente, i punti di massimo e minimo assoluti possono non essere unici)
- minimi ed il massimi relativi di f in $[a,b]$ possono non essere unici
- un estremo assoluto di f in $[a,b]$ è anche estremo relativo ma non vale il viceversa.



- $f(x_0)$ *e* $f(x_2)$ *sono massimi relativi* $\Longrightarrow$ x_0 *e* x_2 *sono punti di massimo relativo*
- $f(a), f(x_1)$ *e* $f(b)$ *sono minimi relativi* $\Longrightarrow$ a, x_1 *e* b *sono punti di minimo relativo (in particolare* x_1 *è un punto angoloso*
- $f(x_2)$ *è il massimo assoluto* $\Longrightarrow$ x_2 *è il punto di massimo assoluto*
- $f(a)$ *è il minimo assoluto* $\Longrightarrow$ a *è il punto di minimo assoluto*



- $f(x_1)$ è un massimo relativo$\Longrightarrow x_1$ è un punto di massimo relativo (in particolare x_1 è di discontinuità)
- $f(x_0)$ e $f(b)$ sono minimi relativi$\Longrightarrow x_0$ e b sono punti di minimo relativo
- $\nexists$ massimo assoluto
- $f(x_0) = f(b)$ è il minimo assoluto$\Longrightarrow x_0$ e b sono punti di minimo assoluto

Osservazione

Da quanto descritto in questi due esempi, risulta evidente che in un punto di estremo (relativo o assoluto) interno all'intervallo, una funzione <u>può anche non essere derivabile o non essere continua</u>.

Però, se $f: [a, b] \rightarrow R$ è derivabile in $x_0 \in (a, b)$ e x_0 è anche un estremo relativo, allora risulta che la tangente al grafico di f nel punto $(x_0, f\ (x_0))$ è orizzontale

Cioè:

$$f'(x_0) = 0$$

Teorema di Fermat

Sia $f: [a, b] \rightarrow R$ una funzione derivabile in $x_0 \in (a, b)$ e sia x_0 un punto di estremo relativo

$$\Downarrow$$

$$f'(x_0) = 0$$

A partire da tale teorema, possiamo affermare che in punto x_0 di estremo relativo per una funzione f in cui f sia derivabile, la tangente al grafico di f nel punto $(x_0, f\,(x_0))$ è orizzontale.

Def. I punti x in cui la derivata di una funzione f si annulla vengono detti punti stazionari per f.

A partire da tale definizione, il teorema di Fermat può essere enunciato come segue:

Teorema di Fermat

Sia $f: [a, b] \rightarrow R$ una funzione derivabile in $x_0 \in (a, b)$ e sia x_0 un punto di estremo relativo

$$\Downarrow \quad \cancel{\Uparrow}$$

x_0 è un punto stazionario per f

Il viceversa non è però valido!

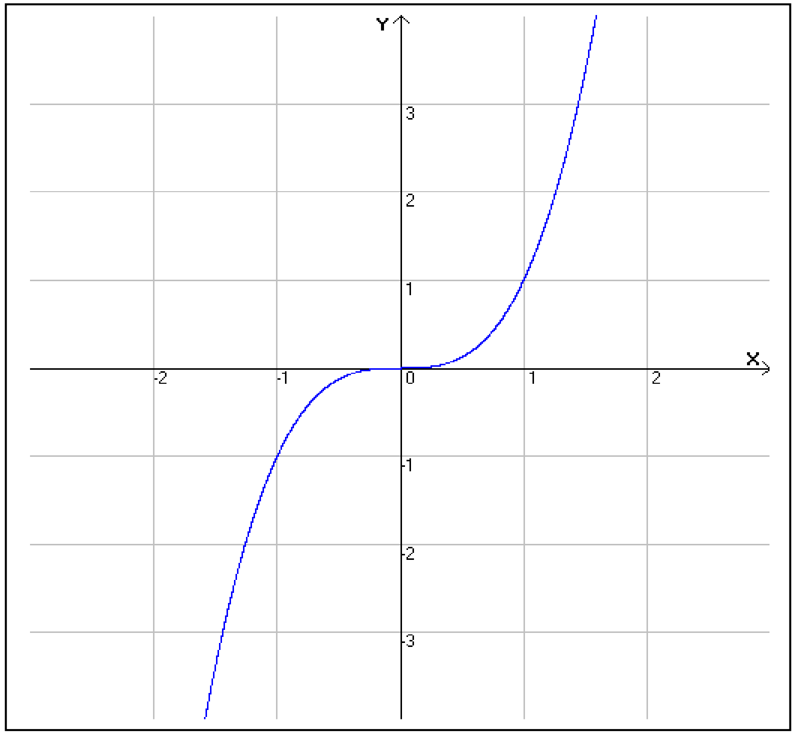
Cioè, possono esistere punti stazionari, in cui si annulla la derivata prima di f, che <u>non</u> sono punti di estremo relativo.

Esempio

$$f(x) = x^3 \Longrightarrow f'(x) = 3x^2$$

$$f'(0) = 0$$

Dunque $x_0 = 0$ è un punto stazionario per la funzione....



...ma $x_0 = 0$ non è un punto di estremo relativo. In particolare in $x_0 = 0$ la funzione presenta un flesso a tangente orizzontale.

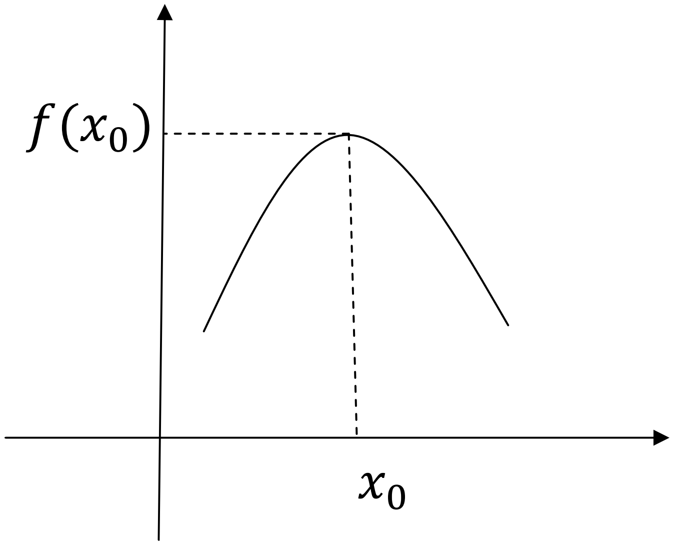
Dimostrazione Teorema di Fermat

Per ipotesi sappiamo che $f:[a,b] \to R$ è una funzione derivabile in $x_0 \in (a,b)$ e che x_0 è un punto di estremo relativo. Per fissare le idee supponiamo che x_0 sia un punto di massimo relativo

$\Downarrow$

per definizione di massimo relativo

$$\exists\, I_{x_0}: \forall x \in I_{x_0} \Longrightarrow f(x) \leq f(x_0)$$



In particolare

$$\forall x \in I_{x_0}, se\ x < x_0 \Longrightarrow \frac{\overbrace{f(x) - f(x_0)}}{\underbrace{x - x_0}_{<0}} \geq 0$$

≤ 0 perchè x_0 è un punto di massimo relativo

$$\forall x \in I_{x_0}, se\ x > x_0 \Longrightarrow \frac{\overbrace{f(x) - f(x_0)}}{\underbrace{x - x_0}_{>0}} \leq 0$$

Passando al limite per $x \to x_0^-$ nel primo rapporto e

per $x \to x_0^+$ nel secondo rapporto si ottiene

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_-(x_0) \geq 0$$

per il teorema della permanenza del segno, il limite ha lo stesso segno del rapporto.

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_+(x_0) \leq 0$$

per il teorema della permanenza del segno, il limite ha lo stesso segno del rapporto.

Poiché per ipotesi esiste $f'(x_0)$ l'unica possibilità è che si abbia

$$f'_-(x_0) = f'_+(x_0) = f'(x_0) = 0$$

Osservazione 1.

Dal teorema di Fermat, possiamo affermare che i punti di estremo relativo per una funzione interni all'intervallo di definizione vanno ricercati tra i punti stazionari.

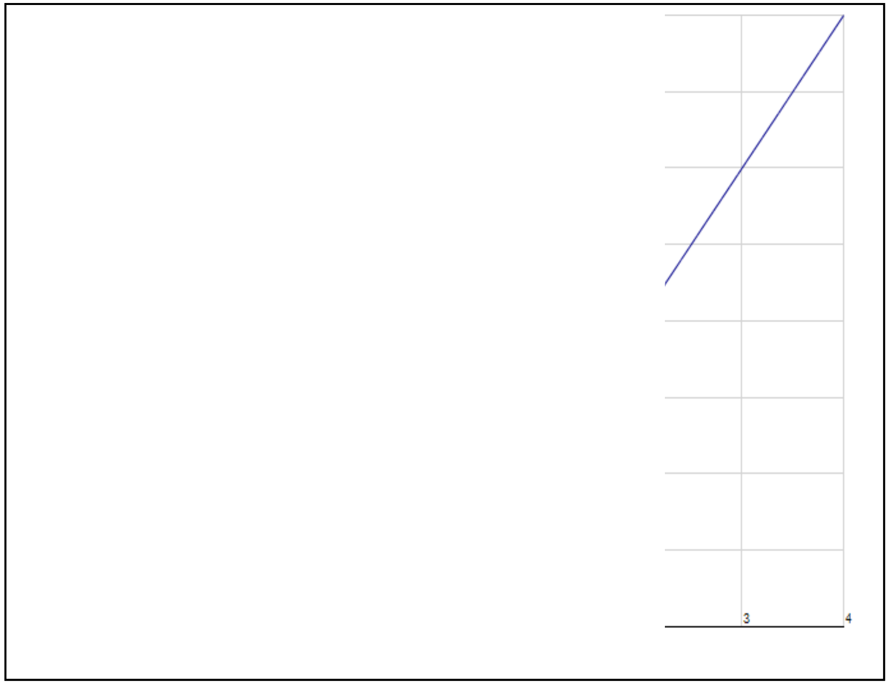
Osservazione 2.

Nei punti in cui una funzione non è derivabile non è possibile applicare il teorema di Fermat. Così, in tali punti bisogna studiare a parte il comportamento della funzione.

Esempio

Sia data la funzione valore assoluto

$$f(x) = |x|$$



derivabile in
angoloso) ma
o anche dal
unto $x_0 = 0$ è
nimo assoluto.

Teorema di Rolle

Sia $f:[a,b] \rightarrow R$ una funzione continua in $[a,b]$ e derivabile in (a,b) tale che $f(a) = f(b)$. Allora esiste $x_0 \in (a,b)$ tale che

$$f'(x_0) = 0$$

Dim.

$$f \; continua \; in \; [a,b]$$

$$\Downarrow \quad \text{Teorema di Weierstrass}$$

$$\exists x_1 \; e \; x_2 : \begin{cases} f(x_1) = m \\ f(x_2) = M \end{cases}$$

1° caso.

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = a \ e \ x_2 = b \\ x_1 = b \ e \ x_2 = a \end{array}\right\} \xrightarrow{f(a)=f(b)} \left\{\begin{array}{l} m = f(x_1) = f(a) = f(b) = f(x_2) = M \\ m = f(x_1) = f(b) = f(a) = f(x_2) = M \end{array}\right.$$

In ogni caso $m = M$ e quindi la funzione è costante, cioè

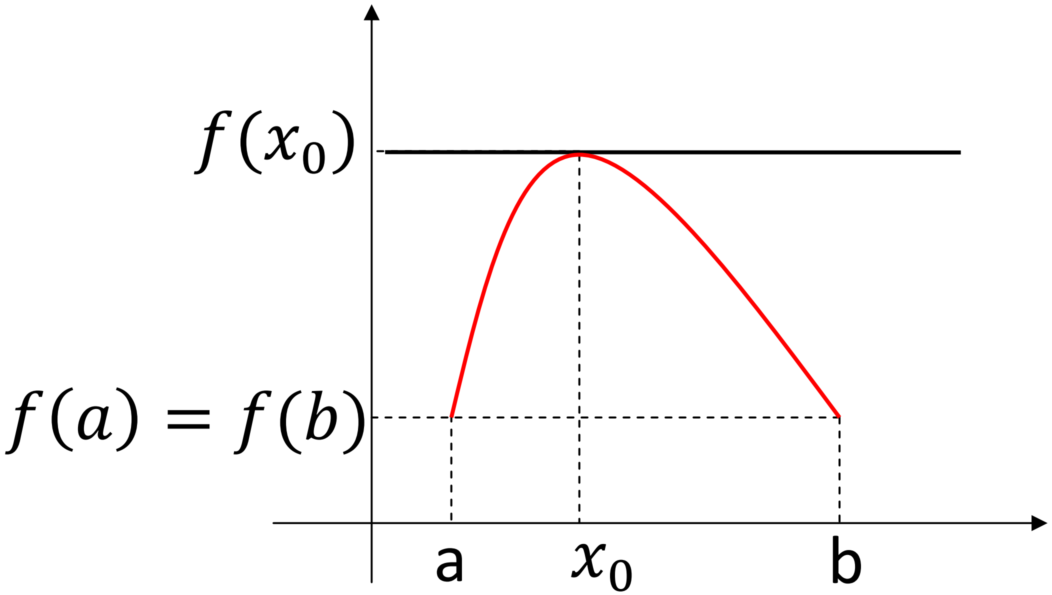
$$f'(x) = 0 \ \forall x \in (a, b)$$

2° caso.

$$x_1 \in (a, b) \text{ oppure } x_2 \in (a, b)$$

Allora per il Teorema di Fermat

$$f'(x_1) = 0 \text{ oppure } f'(x_2) = 0.$$



in x_0 la tangente è parallela all' asse delle ascisse, ossia è orizzontale

Osservazione 3.
Per individuare, se esistono, in modo completo gli estremi di una funzione, non bisogna dimenticare di valutare il comportamento della funzione anche agli estremi del suo intervallo di definizione.

Vediamo ora come il segno della derivata prima di una funzione caratterizzi la monotonia della funzione stessa.
A tale proposito, consideriamo una funzione $f: [a, b] \to R$ derivabile nei punti interni all'intervallo $[a, b]$ e siano dati due punti $x_0\ e\ x \in (a, b)$. Già sappiamo che

- $f\ crescente\ se: x > x_0 \Longrightarrow f(x) \geq f(x_0)$
- $f\ decrescente\ se: x > x_0 \Longrightarrow f(x) \leq f(x_0)$

$$f\ crescente \Longrightarrow \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0$$

$$f\ decrescente \Longrightarrow \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq 0$$

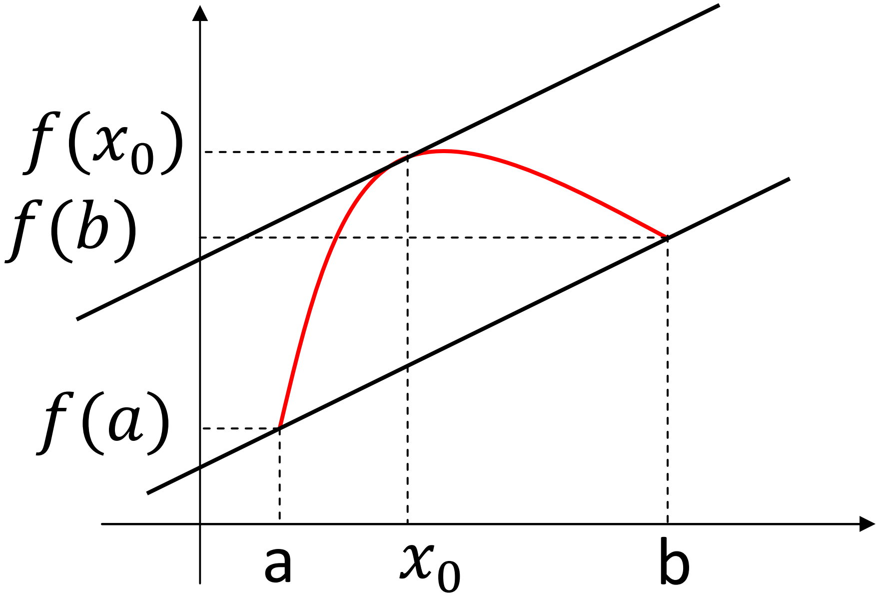
$\Downarrow$ passando al limite per $x \rightarrow x_0$

- $f\ crescente \Longrightarrow f'(x) \geq 0, \forall x \in (a,b)$
- $f\ decrescente \Longrightarrow f'(x) \leq 0, \forall x \in (a,b)$

Teorema di Lagrange

Sia $f:[a,b] \to R$ una funzione continua in $[a,b]$ e derivabile in (a,b). Allora esiste $x_0 \in (a,b)$ tale che

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(x_0)$$



in x_0 la tangente è parallela alla congiungente gli estremi della curva

Criterio di monotonia

Sia $f: [a, b] \to R$ una funzione continua in $[a, b]$ e derivabile in (a, b). Allora

- $f\ crescente\ \Leftrightarrow f'(x) \geq 0, \forall x \in (a, b)$
- $f\ decrescente\ \Leftrightarrow f'(x) \leq 0, \forall x \in (a, b)$

A partire dal criterio di monotonia, è possibile effettuare lo studio dei massimi e minimi relativi ed assoluti di una funzione.