

Data una funzione $f: X \rightarrow R$

la **funzione derivata prima** è la funzione f' definita nel sottoinsieme X' di X in cui f è derivabile (insieme di derivabilità) e tale che

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Quindi

$$x \in X' \rightarrow f'(x) \in R$$

Analogamente

la **funzione derivata seconda** è la funzione f'' definita nel sottoinsieme X'' di X' in cui f' è derivabile (insieme di derivabilità di f') e tale che

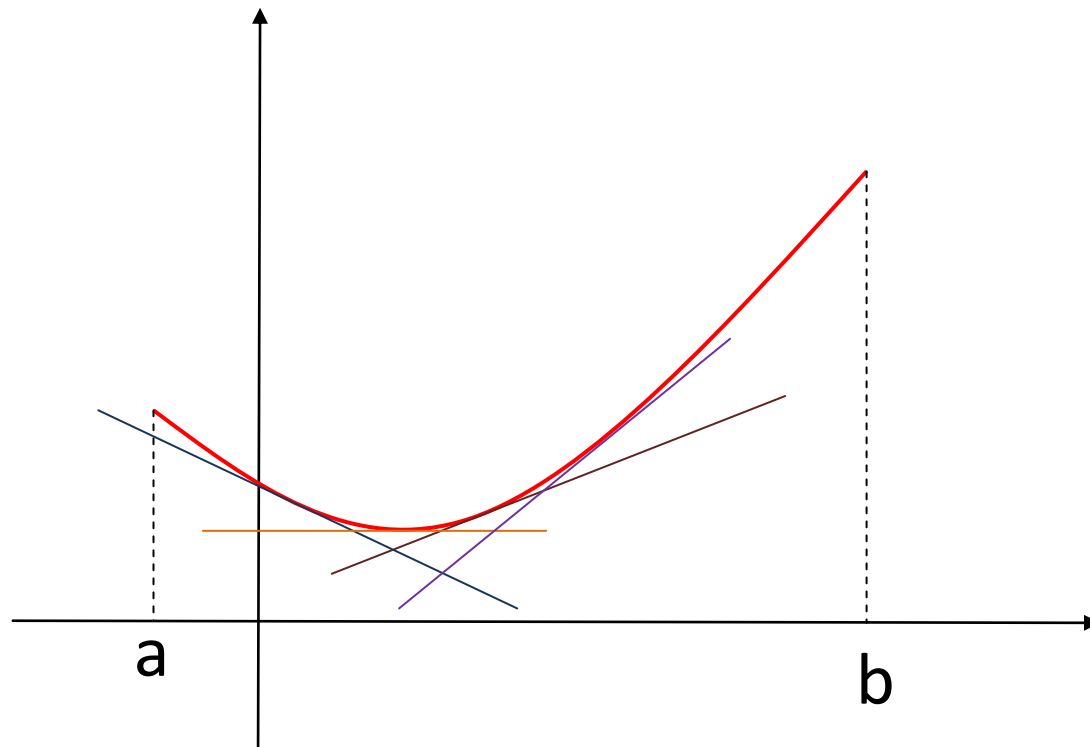
$$f''(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h}$$

Quindi

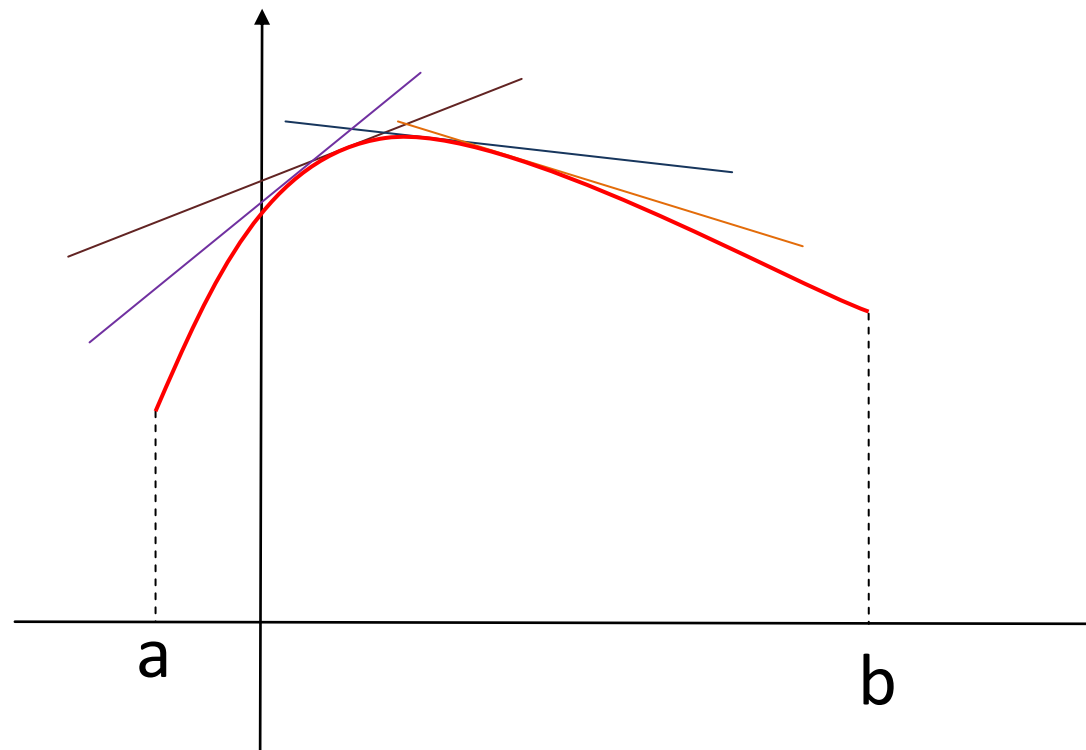
$$x \in X'' \rightarrow f''(x) \in R$$

Funzioni convesse e funzioni concave

Si dice che una funzione $f(x)$ è **convessa** in un intervallo $[a, b]$ se per ogni punto $x_0 \in [a, b]$ il grafico della funzione in $[a, b]$ è **al di sopra** della retta tangente al grafico di f nel punto di coordinate $(x_0, f(x_0))$



Si dice che una funzione $f(x)$ è **concava** in un intervallo $[a, b]$ se per ogni punto $x_0 \in [a, b]$ il grafico della funzione in $[a, b]$ è **al di sotto** della retta tangente al grafico di f nel punto di coordinate $(x_0, f(x_0))$

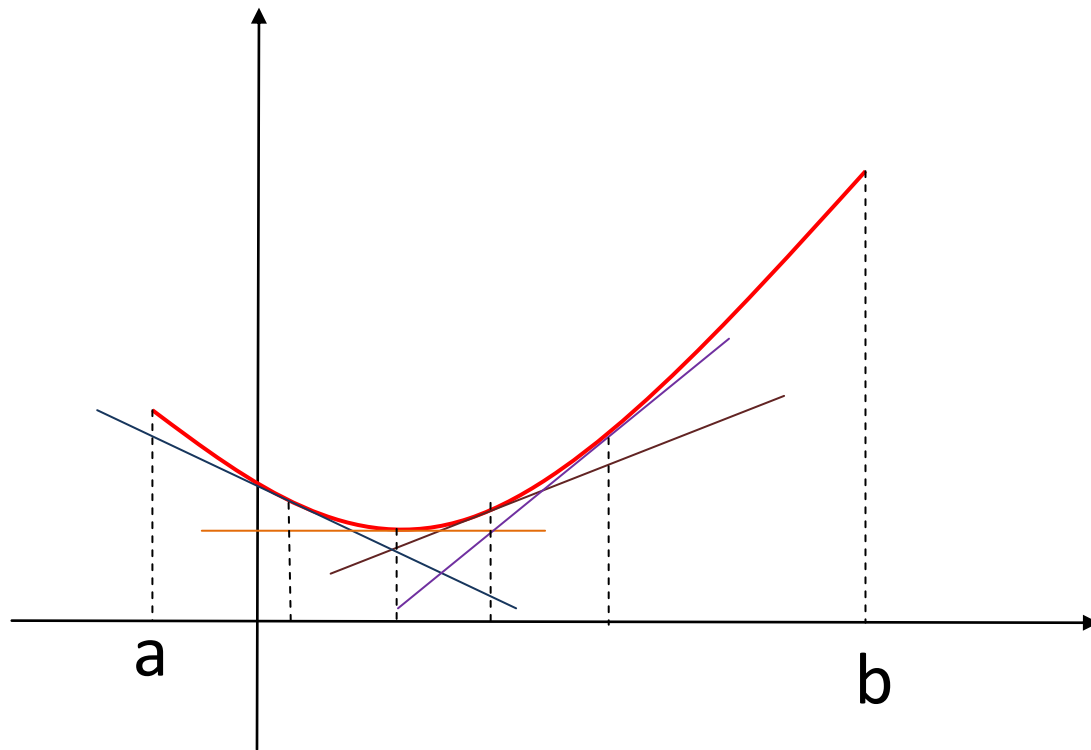


Utilizzando l'espressione analitica dell'equazione della retta tangente

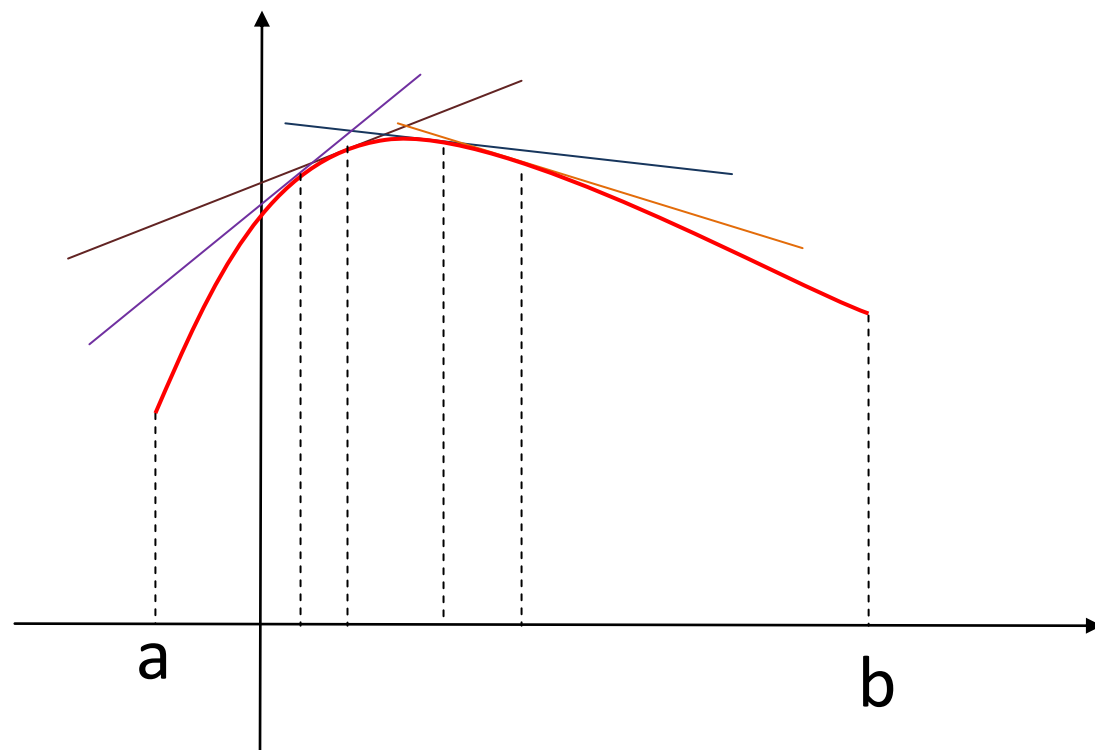
$$f \text{ convessa in } [a, b] \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \\ \forall x, x_0 \in [a, b] \end{cases}$$

$$f \text{ concava in } [a, b] \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \\ \forall x, x_0 \in [a, b] \end{cases}$$

Significato geometrico della convessità



Al crescere di x_0 in $[a, b]$ da valori più piccoli fino a valori più grandi, la pendenza della retta tangente al grafico di f nel punto $(x_0, f(x_0))$ cambia e in particolare, il coefficiente angolare di tale tangente cresce passando da valori più piccoli (anche negativi) a valori più grandi



Al crescere di x_0 in $[a, b]$ da valori più piccoli fino a valori più grandi, la pendenza della retta tangente al grafico di f nel punto $(x_0, f(x_0))$ cambia e in particolare, il coefficiente angolare di tale tangente decresce passando da valori più grandi a valori più piccoli (anche negativi)

Il test di monotonia permette di determinare le zone in cui f cresce o decresce mediante il segno della sua derivata prima f' . Se applichiamo il test alla funzione f' potremmo studiare la sua monotonia attraverso il segno di f'' .

Criterio di convessità

Sia f derivabile in $[a, b]$ e che ammetta derivata seconda in (a, b) ; le seguenti condizioni sono tra loro equivalenti:

- a) $f(x)$ è convessa in $[a, b]$ ($f(x)$ è concava in $[a, b]$)
- b) $f'(x)$ è crescente in $[a, b]$ ($f'(x)$ è decrescente in $[a, b]$)
- c) $f''(x) \geq 0 \ \forall x \in (a, b)$ ($f''(x) \leq 0 \ \forall x \in (a, b)$)

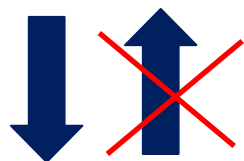
Se la derivata prima di una funzione ha
come significato geometrico quello di
pendenza del grafico della funzione stessa,
la derivata seconda rappresenta la
variazione di tale pendenza

Ovviamente, all'interno di uno stesso intervallo, il verso della concavità di una funzione può cambiare.

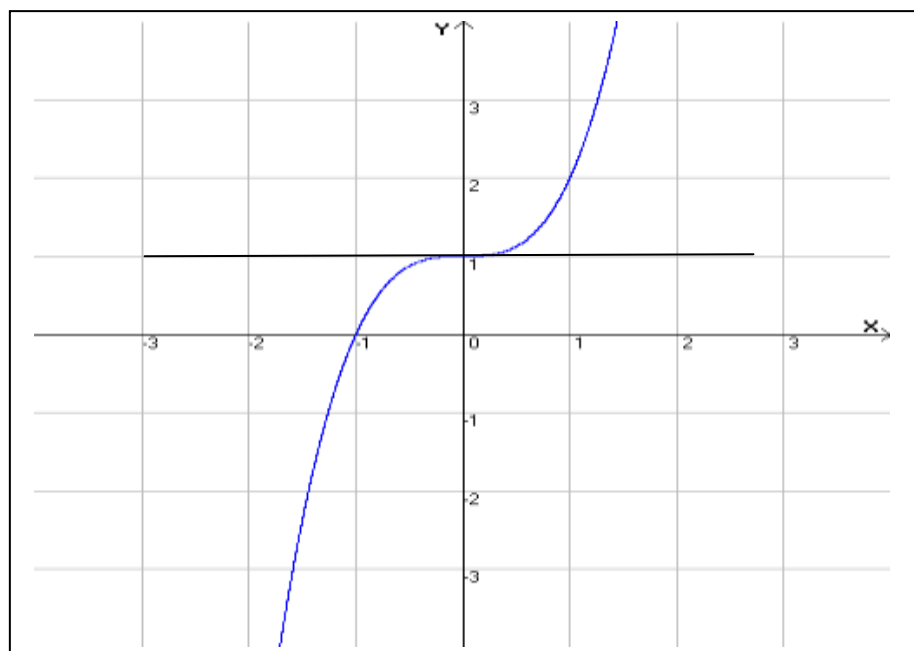
Definizione: Sia $f: (a, b) \rightarrow R$ e $x_0 \in (a, b)$ sia un punto di derivabilità per f , oppure sia $f'(x_0) = \pm\infty$. Il punto x_0 si dice flesso per f se esiste un intorno destro $(x_0, x_0 + h)$, $h > 0$, in cui f è convessa (concava), e un intorno sinistro $(x_0 - h, x_0)$ in cui f è concava (convessa).

N.B. Attraversando un punto di flesso, la derivata seconda di f (se esiste) cambia segno. Ci aspettiamo allora che in questo punto f'' si annulli.

Sia x_0 un punto di flesso per f ; se esiste $f''(x_0)$



$$f''(x_0) = 0$$



Esempio

$$f(x) = x^3$$

$$f'(x) = 3x^2 \geq 0 \forall x \in R \Rightarrow f(x) \text{ sempre crescente}$$

$x = 0$ non è un estremo relativo perché la funzione è sempre crescente

$$f''(x) = 6x$$

$$f''(x) \begin{cases} > 0 \Rightarrow x > 0 \Rightarrow f(x) \text{ convessa} \\ < 0 \Rightarrow x < 0 \Rightarrow f(x) \text{ concava} \end{cases}$$

$x = 0$ è un punto di flesso a tangente orizzontale

Ricordiamo che il teorema di Fermat ci fornisce una condizione necessaria per l'esistenza di estremi relativi interni al dominio di una funzione nei quali la funzione risulta derivabile.

Esiste una condizione sufficiente?

Condizione sufficiente per gli estremi relativi

Sia $f: (a, b) \rightarrow R$ e $x_0 \in (a, b)$ un punto in cui la funzione è derivabile due volte e tale che

$$f'(x_0) = 0$$

Allora

$f''(x_0) > 0$  x_0 è un punto di minimo relativo

$f''(x_0) < 0$  x_0 è un punto di massimo relativo

E se $f''(x_0) = 0$?

$f'''(x_0) \neq 0$  x_0 è un punto di flesso

$f'''(x_0) = 0$  non possiamo ancora decidere

Ci servirà la formula di Taylor