Teorema della media integrale

f definita e continua in $[a, b]$

$$\Downarrow$$

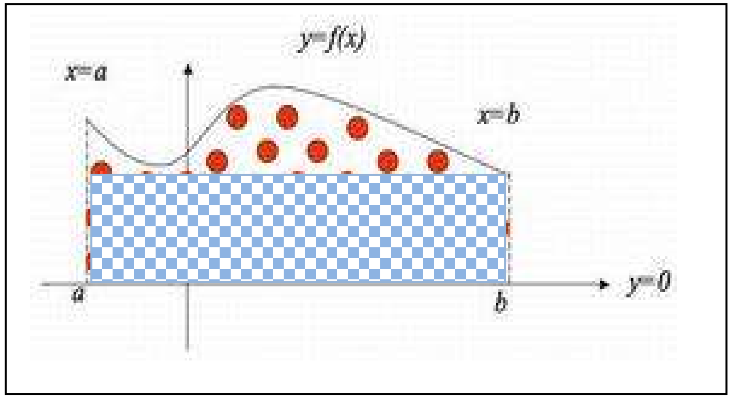
$$\exists x_0 \in (a, b): \int_a^b f(x)dx = f(x_0)(b - a)$$

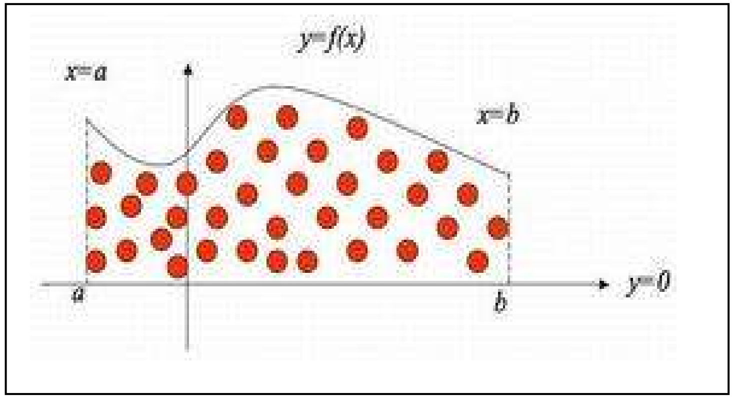
dim.

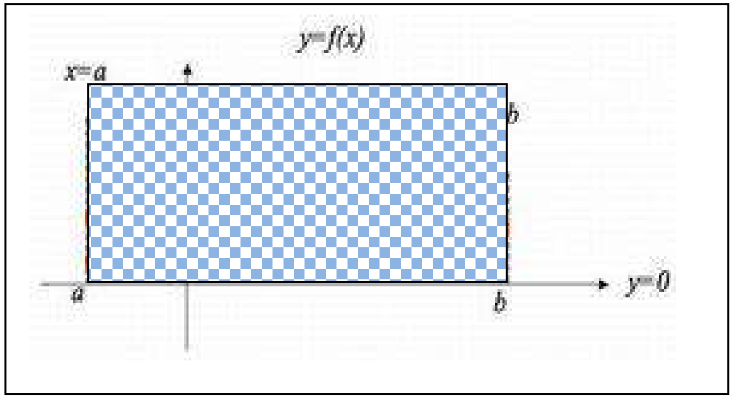
Teorema di Weierstrass	$\Rightarrow$	$\exists m$ e $\exists M$ tali che $\forall x \in [a, b]$ $m \leq f(x) \leq M$

Proprietà di monotonia

$$\int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b M dx$$







$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

Dividendo tutto per $(b-a)$

$$m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq M$$

Valore compreso tra il minimo e il massimo assoluti della funzione

Teorema dei valori intermedi

$$\exists x_0 \in (a,b): f(x_0) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

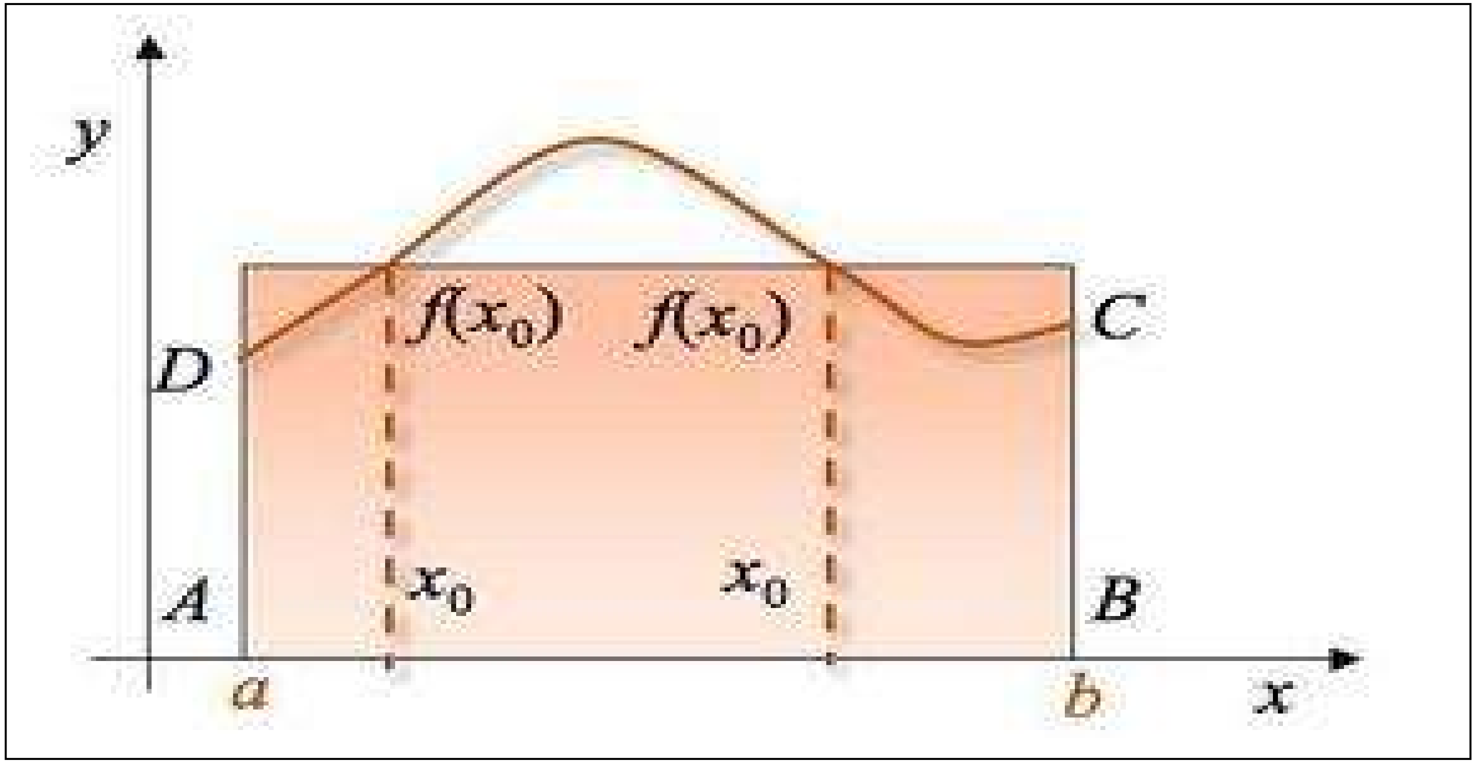
$$\exists x_0 \in (a,b): \int_a^b f(x)dx = f(x_0)(b-a)$$

Osservazione

Il concetto di media integrale è una generalizzazione dell'idea di media aritmetica. L'idea è quella di calcolare il valore medio assunto da una funzione su un intervallo $[a, b]$ calcolando la media aritmetica dei valori che la funzione assume su un insieme finito (molto grande) di punti x_i distribuiti uniformemente nell'intervallo stesso.

Teorema della media integrale: interpretazione geometrica

Da un punto di vista geometrico, possiamo affermare che esiste sempre un rettangolo di base pari all'ampiezza dell'intervallo $[a, b]$ e altezza uguale a $f(x_0)$ avente la stessa area del rettangoloide relativo alla funzione f.



Relazione tra integrali e derivate

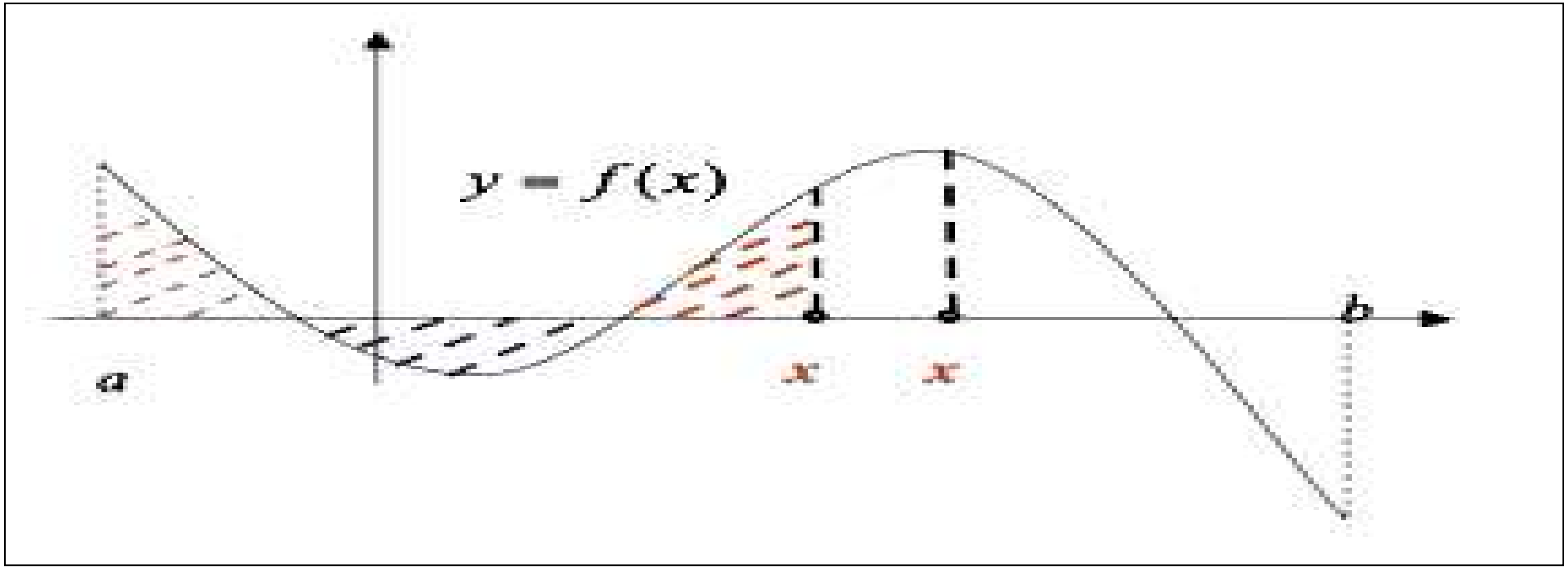
Sia f definita e continua in $[a, b]$. Allora $\forall x \in [a, b]$ si può considerare

$$\boxed{\int_a^x f(t)dt}$$

dove la variabile di integrazione è t mentre x è l'estremo superiore di integrazione e varia in $[a, b]$

- $\forall x \in [a, b]$ resta ben determinato il valore numerico corrispondente all' integrale definito di f esteso all' intervallo $[a, x]$

- al variare di $x \in [a, b]$, varia il valore numerico corrispondente all' integrale definito di f esteso all' intervallo $[a, x]$



$$\int_a^x f(t)dt$$

dipende dall' estremo $x \in [a, b]$, ed è dunque una funzione della x che possiamo indicare con

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

che si definisce

<u>FUNZIONE INTEGRALE</u>

Teorema fondamentale del calcolo integrale

Sia f definita e continua in $[a,b]$. Allora la funzione integrale di f è derivabile in $[a,b]$ e si ha

$$F'(x) = f(x) \forall x \in [a,b]$$

dim.

$$F'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt}{h} = per\ l'additività =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\int_x^{x+h} f(t)dt}{h}$$

Per il teorema della media esiste $c_h \in [x, x+h]$ tale che

$$\frac{\int_x^{x+h} f(t)dt}{h} = f(c_h)$$

quindi passando al limite

$$F'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\int_x^{x+h} f(t)dt}{h} = \lim_{h \to 0} f(c_h)$$

Cosa accade a $f(c_h)$ quando $h \to 0$?

Dal teorema del confronto

$$\lim_{h \to 0} c_h = x$$

Ma per la continuità della funzione

$$\lim_{h \to 0} f(c_h) = f\left(\lim_{h \to 0} c_h\right) = f(x)$$

da cui

$$F'(x) = \lim_{h \to 0} f(c_h) = f(x)$$

Def. Una funzione F definita e derivabile in $[a, b]$, si definisce primitiva della funzione f , se risulta che

$$F'(x) = f(x) \forall x \in [a, b]$$

Esempi

$$f(x) = x^2 \Longrightarrow F(x) = \frac{x^3}{3}$$

$$f(x) = \sin x \Longrightarrow F(x) = -\cos x$$

Teorema fondamentale del calcolo integrale

Sia f definita e continua in $[a,b]$. Allora la funzione integrale di f è <u>una</u> primitiva di f.

Osservazione

Se F è una primitiva della funzione f allora anche $F+c$ è ancora una primitiva di f. Infatti

$$(F(x)+c)' = F'(x)+0 = F'(x) = f(x)$$

Se poi F è una primitiva di f, tutte le primitive di f si ottengono da F aggiungendovi una costante.

Caratterizzazione delle primitive di una funzione

Se F e G sono due primitive di una stessa funzione allora, esse differiscono per una costante arbitraria

$$F(x) = G(x) + c$$

dim.

$$H(x) = F(x) - G(x)$$

$$H'(x) = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

per la caratterizzazione delle funzioni costanti

$$H'(x) = 0 \; in \; [a, b] \Longrightarrow H(x) = cost \; in \; [a, b]$$

A partire dal teorema fondamentale del calcolo integrale, si deduce la formula che segue

Formula fondamentale del calcolo integrale
(Teorema di Torricelli-Barrow)

Sia f una funzione definita e continua in $[a, b]$ e sia F una sua primitiva. Allora

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Così, abbiamo ricondotto il calcolo di un integrale definito alla ricerca della primitiva della funzione integranda.

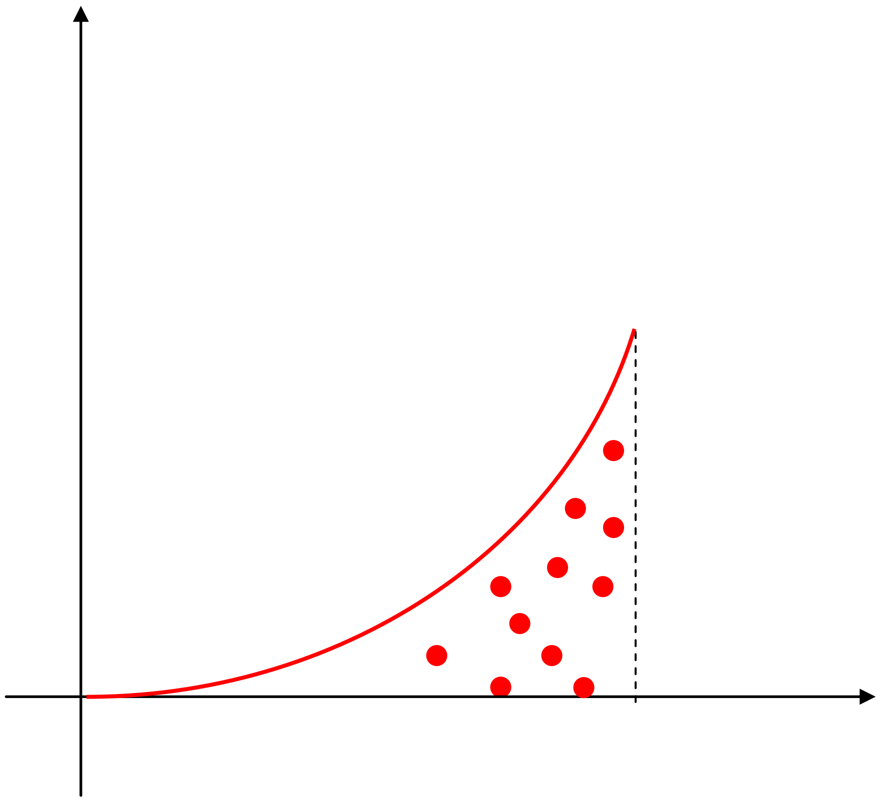
Esempi

$$\int_0^{\pi} \sin x \, dx = [-\cos x]_0^{\pi} = -\cos \pi + \cos 0 = 1 + 1 = 2$$

$$\int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}$$

Esempio

Calcolare l'area del rettangoloide relativo alla funzione $f(x) = x^2$ nell'intervallo $[0,1]$.



$$AreaR = \int_0^1 x^2 dx =$$

$$= formula\ fondamentale =$$

$$\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3} > 0$$

Def. Sia f una funzione definita e continua in $[a, b]$, allora sicuramente ammette primitive e l'insieme di tutte le primitive di f viene definito integrale indefinito di f e si indica col simbolo

$$\int f(x)dx$$

$$\Downarrow$$

per la caratterizzazione delle primitive di una funzione

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

essendo F una primitiva di f e $c \in R$ una costante arbitraria.

Osservazione

Esiste una grossa differenza tra l'integrale definito e indefinito di una stessa funzione

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx}$$

$$\boxed{\int f(x)dx}$$

- l'*integrale definito* è un numero (in particolare positivo e pari all'area del rettangoloide relativo ad *f* se *f* è non negativa)

- l'*integrale indefinito* è un insieme di funzioni

A partire dalle derivate delle funzioni elementari si ha

$$\int x^b dx = \frac{x^{b+1}}{b+1} + c, b \neq -1$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + c$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \log|x| + c$$

$$\int \cos x dx = \sin x + c$$

$$\int e^x dx = e^x + c$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\log a} + c, a > 0 \; e \; a \neq 1$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + c$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + c$$

A volte, poi, ci si riconduce ad integrali immediati attraverso la formula di derivazione delle funzioni composte. Ad esempio, vale che:

$$\boxed{\int [f(x)]^b f'(x)dx = \frac{[f(x)]^{b+1}}{b+1} + c, \forall b \neq -1}$$

$$\boxed{\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \log|f(x)| + c}$$

$$\boxed{\int e^{f(x)} f'(x)dx = e^{f(x)} + c}$$

$$\boxed{\int a^{f(x)} dx = \frac{a^{f(x)}}{\log a} + c, \forall a > 0 \; e \; a \neq 1}$$

$$\boxed{\int \sin f(x) f'(x) dx = -\cos f(x) + c}$$

$$\boxed{\int \cos f(x) f'(x) dx = \sin f(x) + c}$$

$$\boxed{\int \frac{1}{\cos^2 f(x)} f'(x)\, dx = \tan f(x) + c}$$

$$\boxed{\int \frac{1}{\sqrt{1-[f(x)]^2}} f'(x) dx = \arcsin f(x) + c}$$

$$\boxed{\int \frac{1}{1+[f(x)]^2} f'(x) dx = \arctan f(x) + c}$$

Esempi

$$\int x\sqrt{x^2+1}\,dx = \int x\,(x^2+1)^{\frac{1}{2}}dx = \frac{1}{2}\int 2x(x^2+1)^{\frac{1}{2}}dx =$$

$$\int [f(x)]^b f'(x)dx = \frac{[f(x)]^{b+1}}{b+1} + c$$

$$= \frac{1}{2}\frac{(x^2+1)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + c = \frac{1}{2}\frac{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{\sqrt{(x^2+1)^3}}{3} + c$$

$$\int \frac{e^x}{\cos^2 e^x}\,dx = \int e^x \frac{1}{\cos^2 e^x}\,dx =$$

$$\boxed{\int \frac{1}{\cos^2 f(x)} f'(x)\,dx = \tan f(x) + c}$$

$$= \tan e^x + c$$

$$\int e^{x^2+x}(2x+1)dx = \int e^{x^2+x}(2x+1)dx =$$

$$\boxed{\int e^{f(x)} f^{'}(x)dx = e^{f(x)} + c}$$

$$= e^{x^2+x} + c$$

$$\int \sin^2 x \cos x \, dx = \int \sin^2 x \cos x \, dx =$$

$$\boxed{\int [f(x)]^b f'(x) dx = \frac{[f(x)]^{b+1}}{b+1} + c}$$

$$= \frac{\sin^3 x}{3} + c$$

Infine, ricordando che:

• la derivata di una somma è la somma delle derivate

• la derivata del prodotto di una costante per una funzione è la costante per la derivata della funzione

Valgono le seguenti proprietà dell'integrale indefinito

$$\int [f(x) + g(x)]\, dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

$$\int cf(x)\, dx = c \int f(x)dx \;\; con\; c \in R$$

$$\int -f(x)dx = -\int f(x)dx$$

Esempio

$$\int (x^2 + \cos x)dx = \int x^2 dx + \int \cos x dx = \frac{x^3}{3} + \sin x + c$$