

## Metodi di Integrazione

- Integrazione per decomposizione in somma
- Integrazione per parti
- Integrazione per sostituzione

## Integrazione per decomposizione in somma

In molti casi il calcolo dell'integrale indefinito di una funzione si può ricondurre al calcolo di integrali già noti, o di tipo più semplice



- decomporre la funzione integranda nella somma di due o più funzioni
- applicare la proprietà di linearità.

## Esempio

$$\int \frac{x}{x+1} dx$$

sommando e sottraendo 1 al numeratore della funzione integranda si ha che:

$$\int \frac{x}{x+1} dx = \int \frac{x+1-1}{x+1} dx = \int \left( \frac{x+1}{x+1} - \frac{1}{x+1} \right) dx =$$

$$\int \left( 1 - \frac{1}{x+1} \right) dx =$$

applicando la proprietà di linearità dell'integrale indefinito

$$= \int \left( 1 - \frac{1}{x+1} \right) dx = \int 1 \cdot dx - \int \frac{1}{x+1} dx =$$

$$= x - \log|x+1| + c$$



$$\int x^b dx = \frac{x^{b+1}}{b+1} + c$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \log|f(x)| + c$$

## Integrazione per parti

Il metodo di integrazione per parti si basa sulla formula di derivazione del prodotto di due funzioni

$$(fg)' = f'g + fg'$$



$$fg' = (fg)' - f'g$$

## Formula di integrazione per parti

Se in un intervallo  $f$  e  $g$  sono due funzioni derivabili con derivata continua, allora vale che:

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)$$

dove:

$f(x)$  è detto **fattore finito**

$g'(x)$  è detto **fattore differenziale**

### Osservazione

L'ipotesi secondo cui le derivate  $f'$  e  $g'$  sono continue assicura l'esistenza dei due integrali presenti nella formula di integrazione per parti

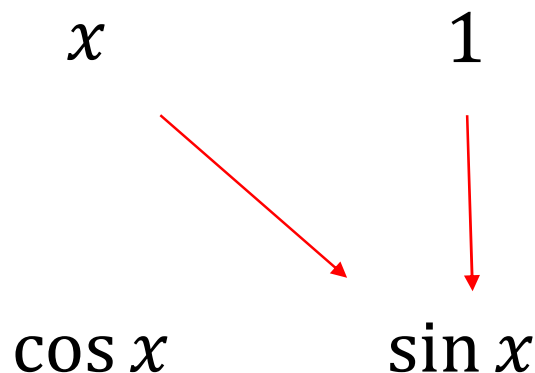
## Esempio

$$\int x \cos x \, dx$$

applichiamo la formula di integrazione per parti considerando

$f(x) = x$  come **fattore finito**

$g'(x) = \cos x$  come **fattore differenziale**



$$\begin{aligned} \int x \cos x \, dx &= x \sin x - \int 1 \cdot \sin x \, dx = \\ &= x \sin x + \int -\sin x \, dx = \\ &= x \sin x + \cos x + c \end{aligned}$$

## Osservazione

Il metodo di integrazione per parti può essere applicato anche più volte consecutivamente

## Esempio

$$\int x^2 \cos x \, dx$$

applichiamo la formula di integrazione per parti considerando

$f(x) = x^2$  come **fattore finito**

$g'(x) = \cos x$  come **fattore differenziale**

$x^2$        $2x$   
↘            ↓  
 $\cos x$        $\sin x$

$$\begin{aligned} \int x^2 \cos x \, dx &= x^2 \sin x - \int 2x \cdot \sin x \, dx = \\ &= x \sin x - 2 \int x \sin x \, dx \end{aligned}$$

Applichiamo di nuovo la formula di integrazione per parti

$$\begin{aligned}\int x \sin x \, dx &= -x \cos x - \int -\cos x \, dx = \\ &= -x \cos x + \int \cos x \, dx = -x \cos x + \sin x + c\end{aligned}$$

e sostituendo

$$\begin{aligned}\int x^2 \cos x \, dx &= x \sin x - 2(-x \cos x + \sin x) + c = \\ &= x \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + c\end{aligned}$$

## Integrazione per sostituzione

Sia  $f$  una funzione continua e  $g$  una funzione derivabile con derivata continua in un dato intervallo, allora risulta che:

$$\left( \int f(x) dx \right)_{x=g(t)} = \int f(g(t)) g'(t) dt$$

ossia si effettua la posizione

$$x = g(t)$$

da cui segue

$$dx = g'(t) dt$$

## Osservazione

Il metodo di integrazione per sostituzione non richiede, per la sua validità, che la funzione  $g(t)$  sia una funzione invertibile e il risultato dell'integrazione indefinita è espresso in funzione di  $t$ , mediante la posizione  $x = g(t)$ .

Per poter esprimere il risultato in funzione di  $x$ , occorre supporre che  $g(t)$  sia una funzione invertibile; in tale caso, il risultato finale viene espresso in funzione della  $x$ , mediante l'ulteriore sostituzione  $t = g^{-1}(x)$

## Esempio

$$\int \frac{1}{\sqrt{x} - 3} dx$$

Effettuando la sostituzione  $t = \sqrt{x}$  si ottiene

$$\begin{aligned} x &= t^2 \text{ e } dx = 2t dt \\ \int \frac{1}{\sqrt{x} - 3} dx &= \int \frac{1}{t - 3} 2t dt = 2 \int \frac{t}{t - 3} dt \\ &= 2 \int \frac{t - 3 + 3}{t - 3} dt = 2 \int \frac{t - 3}{t - 3} dt + 2 \int \frac{3}{t - 3} dt \end{aligned}$$

$$= 2 \int dt + 6 \int \frac{1}{t-3} dt = 2t + 6 \log|t-3| + c$$

volendo scrivere il risultato finale in  $x$  si sostituisce il valore  $t = \sqrt{x}$  ottenendo

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}-3} dx = 2\sqrt{x} + 6 \log|\sqrt{x}-3| + c$$

## Integrali di funzioni trigonometriche

### 1. Integrali del tipo

$$\int f(\sin x) \cos x \, dx$$



$$y = \sin x \Rightarrow dy = \cos x \, dx$$

$$\int f(\cos x) \sin x \, dx$$



$$y = \cos x \Rightarrow dy = -\sin x \, dx$$

### Esempio

$$\int e^{\sin x} \cos x \, dx = \int e^y \, dy = e^y + c = e^{\sin x} + c$$

## 2. Integrali del tipo

$$\int (\sin x)^n (\cos x)^m dx$$

con almeno uno degli  
esponenti dispari



sfruttando la relazione

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

si può scrivere l'integrale nella  
forma 1.

## Esempio

$$\int (\sin x)^3 (\cos x)^2 dx$$

$$\begin{aligned} (\sin x)^3 (\cos x)^2 &= \sin x (\sin x)^2 (\cos x)^2 \\ &= \sin x (1 - (\cos x)^2) (\cos x)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int (\sin x)^3 (\cos x)^2 dx &= \int \sin x (1 - (\cos x)^2) (\cos x)^2 dx = \\ &= - \int (1 - y^2) y^2 dy = - \int y^2 dy + \int y^4 dy = -\frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{5} + c \\ &= -\frac{\cos^3 x}{3} + \frac{\cos^5 x}{5} + c \end{aligned}$$

$$\int (\sin x)^n (\cos x)^m dx$$

con entrambi gli  
esponenti pari



formule di bisezione per abbassare il grado delle potenze, ottenendo integrali del tipo precedente, oppure elementari.

## Esempio

$$\int (\sin x)^2 (\cos x)^4 dx$$

$$\begin{cases} \cos^2 x = \frac{1}{2} (1 + \cos 2x) \\ \sin^2 x = \frac{1}{2} (1 - \cos 2x) \end{cases}$$

$$\begin{aligned}(\sin x)^2(\cos x)^4 &= \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) \frac{1}{2^2}(1 + \cos 2x)^2 \\ &= \frac{1}{8}(1 + \cos 2x)(1 - \cos^2 2x) \\ &= \frac{1}{8}(1 - \cos^2 2x + \cos 2x - \cos^3 2x) \\ &= \frac{1}{8}(\sin^2 2x + \cos 2x(1 - \cos^2 2x)) \\ &= \frac{1}{8}(2(1 - \cos 4x) + \cos 2x \sin^2 2x)\end{aligned}$$

$$\int (\sin x)^2 (\cos x)^4 dx$$

$$= \frac{1}{4} \int (1 - \cos 4x) dx + \frac{1}{8} \int \cos 2x \sin^2 2x dx$$

$$= \frac{1}{4} x - \frac{1}{16} \sin 4x + \frac{1}{48} \sin^3 2x + c$$

### 3. Integrali del tipo

$$\int \cos \alpha x \sin \beta x dx$$

$$\int \cos \alpha x \cos \beta x dx$$

$$\int \sin \alpha x \sin \beta x dx$$



formule di prostaferesi che  
ricondono alla somma di  
integrali elementari.

## 4. Integrali di funzioni razionali di $\sin x$ e $\cos x$

Un integrale di questo tipo può sempre essere ricondotto all'integrale di una funzione razionale mediante l'uso delle formule parametriche

$$\begin{cases} \cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \\ \sin x = \frac{2t}{1 + t^2} \end{cases}$$

con

$$t = \tan \frac{x}{2}$$

## Integrazione delle funzioni razionali

Una funzione razionale è il rapporto tra due polinomi  $P(x)$ ; di grado  $n$ , e  $Q(x)$ ; di grado  $m$

$$\frac{P(x)}{Q(x)}$$

Se  $n \geq m$ ; si può dividere  $P(x)$  per  $Q(x)$  e scrivere

$$P(x) = P_0(x)Q(x) + R(x)$$

e quindi

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = P_0(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

essendo  $R(x)$  un polinomio di grado  $k < m$ .

Dall'additività dell'integrale

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int P_0(x) dx + \int \frac{R(x)}{Q(x)} dx$$

con  $k < m$ .

Dunque è sufficiente determinare un metodo per calcolare l'integrale di una funzione razionale per cui il numeratore  $P(x)$  ha grado  $n$  inferiore al grado  $m$  del denominatore  $Q(x)$ .

Possiamo inoltre supporre che il coefficiente del termine di grado massimo di  $Q(x)$  sia  $a_0 = 1$ .

1. Il grado del denominatore è  $m = 1$ :

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a}{x - c}$$

$$\int \frac{a}{x - c} dx = a \log|x - c| + K$$

2. Il grado del denominatore è  $m = 2$ :

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{ax + b}{x^2 + cx + d}$$

Distinguiamo tre sottocasi

$$a) x^2 + cx + d = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)$$

In questo caso esistono  $A_1$  e  $A_2$  tali che

$$\frac{ax + b}{x^2 + cx + d} = \frac{A_1}{x - \alpha_1} + \frac{A_2}{x - \alpha_2}$$

( $A_1$  e  $A_2$  si determinano calcolando la somma a secondo membro e uguagliando i numeratori a primo e secondo membro). Allora si ha

$$\int \frac{ax + b}{x^2 + cx + d} dx = \int \frac{A_1}{x - \alpha_1} dx + \int \frac{A_2}{x - \alpha_2} dx =$$

$$A_1 \log|x - \alpha_1| + A_2 \log|x - \alpha_2| + K$$

$$b) x^2 + cx + d = (x - \alpha)^2$$

In questo caso esistono  $A_1$  e  $A_2$  tali che

$$\frac{ax + b}{x^2 + cx + d} = \frac{A_1}{x - \alpha} + \frac{A_2}{(x - \alpha)^2}$$

( $A_1$  e  $A_2$  si determinano calcolando la somma a secondo membro e uguagliando i numeratori a primo e secondo membro). Allora si ha

$$\int \frac{ax + b}{x^2 + cx + d} dx = \int \frac{A_1}{x - \alpha} dx + \int \frac{A_2}{(x - \alpha)^2} dx =$$
$$A_1 \log|x - \alpha| - A_2 \frac{1}{x - \alpha} + K$$

b)  $x^2 + cx + d$  non ha radici reali

• se  $x^2 + cx + d = x^2 + 1$

$$\frac{ax + b}{x^2 + 1} = a \frac{x}{x^2 + 1} + b \frac{1}{x^2 + 1}$$

Allora si ha

$$\int \frac{ax + b}{x^2 + 1} dx = a \int \frac{x}{x^2 + 1} dx + b \int \frac{1}{x^2 + 1} dx =$$

$$\frac{a}{2} \log(x^2 + 1) + b \arctan x + K$$

- se  $x^2 + cx + d = x^2 + h^2$

$$\frac{ax + b}{x^2 + h^2} = \frac{1}{h^2} \frac{ax + b}{\left(\frac{x}{h}\right)^2 + 1}$$

Se si pone

$$t = \frac{x}{h} \Rightarrow x = ht \Rightarrow dx = hdt$$

ci si riduce al caso precedente.

- se in generale  $x^2 + cx + d = (x + \gamma)^2 + h^2$

$$\frac{ax + b}{x^2 + cx + d} = \frac{ax + b}{(x + \gamma)^2 + h^2} = \frac{1}{h^2} \frac{ax + b}{\left(\frac{x + \gamma}{h}\right)^2 + 1}$$

Se si pone

$$t = \frac{x + \gamma}{h} \Rightarrow x = ht - \gamma \Rightarrow dx = hdt$$

ci si riduce di nuovo al primo caso particolare.

## Integrazione delle funzioni irrazionali

La funzione integranda è una funzione razionale del tipo

$$f\left(x; x^{\frac{n_1}{m_1}}; \dots; x^{\frac{n_k}{m_k}}\right)$$

Si pone

$$x = t^n$$

$$n = m.c.m.(m_1, \dots, m_k).$$

In tal caso

$$dx = n t^{n-1} dt$$

e si ottiene una funzione razionale di  $t$ .