

Figura 8.5

definisce è solo funzione della posizione del punto e non del tempo. Il campo idrodinamico studiato nel paragrafo 7 del capitolo 5 e il campo elettrico generato da cariche in quiete sono esempi di campi stazionari.

È utilissima la rappresentazione di un campo vettoriale mediante le *linee di flusso* che consentono di stabilire la direzione ed il verso del *vettore campo* in ogni punto dello spazio. Una linea di flusso gode della proprietà che *la tangente in ogni punto di essa, orientata nel senso della curva stessa, dà la direzione ed il verso del vettore campo in quel punto*. In fig. 8.5, ove il vettore campo è indicato genericamente con *A*, si dà un esempio di linea di flusso.

Poiché non è possibile tracciare tutte le linee di flusso di un campo vettoriale bisogna limitarsi a considerarne solo alcune. Conviene allora cercare un criterio convenzionale che, dall'esame delle linee di flusso tracciate, consenta una immediata valutazione della grandezza del vettore campo nelle varie parti della regione interessata. A tale riguardo il criterio più semplice è quello che consiste nel tracciare le linee di flusso in modo che *il numero di linee che attraversano una superficie ideale unitaria, normale alle linee stesse, sia proporzionale alla grandezza del vettore campo nella zona in cui la superficie è considerata*. Una semplice ispezione dell'andamento delle linee di flusso tracciate con il criterio indicato (*linee di flusso convenzionali*) permette così una valutazione qualitativa della grandezza del vettore campo delle diverse zone della regione interessata. Infatti, ove le linee sono più fitte, cioè è maggiore il numero di linee convenzionali per unità di superficie normale, lì è più grande l'intensità del vettore, ove le linee sono più rade l'intensità è minore. Se, per esempio, si osservano le linee convenzionali di fig. 8.6, si può immediatamente affermare che l'intensità del campo che esse descrivono va progressivamente aumentando dalla zona A alla zona B. Poiché in un campo vettoriale uniforme il vettore campo assume in tutti i punti il medesimo valore, in modulo, direzione e verso, un campo di questo tipo, in conformità con il criterio convenzionale adottato, è descritto da *linee di flusso rettilinee, parallele, equidistanti ed equiverse* (fig. 8.7).

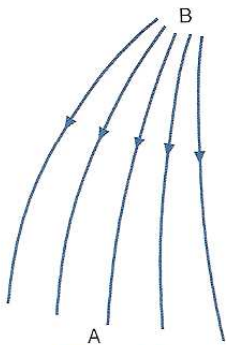


Figura 8.6

Le *linee di corrente* considerate in idrodinamica non sono che le linee di flusso del vettore velocità per il fluido in movimento. Le linee di flusso del vettore campo elettrico si chiamano più frequentemente *linee di forza elettriche*.

9 FLUSSO DI FORZA ELETTRICO. TEOREMA DI GAUSS E APPLICAZIONI

Sia dS un elemento di superficie, comunque orientato, appartenente a una superficie ideale S tracciata in un campo elettrostatico, e nel suo centro di figura si conduca il vettore intensità del campo, \mathbf{E} , tangente alla linea di forza passante per esso (fig. 8.8); si consideri poi la normale a dS e si fissi su di essa un senso positivo. Conformemente alla definizione più generale di *flusso di un vettore attraverso un elemento di superficie*, si dice *flusso di forza elettrico* o *flusso del vettore \mathbf{E} attraverso l'elemento di superficie dS* la grandezza scalare

$$d\Phi(\mathbf{E}) = E \cos \alpha dS, \quad (8.12)$$

ove α è l'angolo formato dalla direzione orientata della normale con la direzione orientata dal vettore \mathbf{E} . Il *flusso di forza attraverso l'intera superficie S* è la grandezza $\Phi(\mathbf{E})$, somma dei flussi elementari attraverso i singoli elementi di



Figura 8.7

superficie in cui S può immaginarsi suddivisa; essa è espressa dall'*integrale di superficie*

$$\Phi(\mathbf{E}) = \int_S \mathbf{E} \cos \alpha \, dS. \quad (8.13)$$

Se la superficie S è chiusa, la normale in ciascun punto di essa si assume, per convenzione, rivolta verso l'esterno della superficie; il flusso del vettore \mathbf{E} attraverso S si dice allora *flusso di forza elettrico uscente* dalla superficie chiusa considerata.

Il *teorema di Gauss per il vuoto* esprime che il *flusso di forza elettrico uscente da una superficie chiusa, tracciata per intero in un campo elettrostatico*, è eguale al rapporto fra la somma algebrica delle cariche racchiuse dalla superficie e la costante dielettrica del vuoto:

$$\Phi(\mathbf{E}) = \oint_S \mathbf{E} \cos \alpha \, dS = \frac{\sum_i q_i}{\epsilon_0}. \quad (8.14)$$

Il circoletto sul segno d'integrale sta ad indicare che la superficie S considerata è chiusa.

Il teorema di Gauss, del quale non daremo, per brevità, la giustificazione (si veda però l'esercizio 8.8), ha una grande importanza concettuale, costituendo una delle *leggi fondamentali dell'elettromagnetismo*; esso ha anche un notevole interesse pratico in quanto che consente di risolvere in molti casi il problema riguardante il calcolo dell'intensità del campo elettrostatico, e del potenziale in un punto, determinati da particolari distribuzioni di cariche.

Esporremo ora alcune semplici applicazioni del teorema.

(a) Distribuzione delle cariche in un conduttore in equilibrio

Sia C un corpo conduttore di forma qualsiasi, immerso in un mezzo dielettrico e portante la quantità di elettricità q . Le cariche elettriche possono liberamente muoversi nel conduttore, ma, se esse sono in equilibrio, vuol dire che l'intensità del campo elettrico all'interno del conduttore è, in ogni punto, eguale a zero; infatti, se così non fosse, sulle cariche si esplicherebbero delle forze ed esse sarebbero in movimento, contrariamente all'ipotesi che sono invece in equilibrio. Consideriamo ora, all'interno di C , una superficie chiusa S di forma qualsiasi; poiché il vettore \mathbf{E} è nullo in ogni punto interno a C , e quindi in ogni punto di S , il flusso di forza elettrico uscente da S è eguale a zero, quale che sia la superficie considerata. Segue, per il teorema di Gauss, che S non contiene cariche, cioè per l'arbitrarietà di S , che non vi sono cariche all'interno del conduttore: *in condizioni di equilibrio le cariche elettriche si dispongono tutte sulle superfici esterne dei conduttori.*

Aggiungiamo che tutti i punti di un conduttore in equilibrio, sia quelli interni sia quelli appartenenti alla superficie esterna, sono allo stesso potenziale. Infatti, poiché in ogni punto interno al conduttore il campo elettrico è nullo, per la

(8.11) è $\frac{dV}{dl} = 0$, cioè $V = \text{costante}$ in tutta la regione occupata dal conduttore. In

particolare *la superficie esterna di un conduttore è una superficie equipotenziale.*

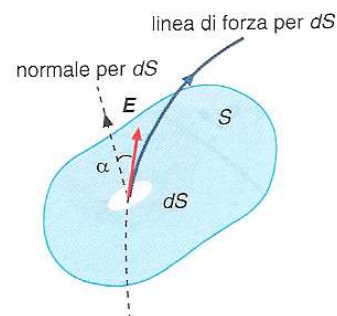


Figura 8.8

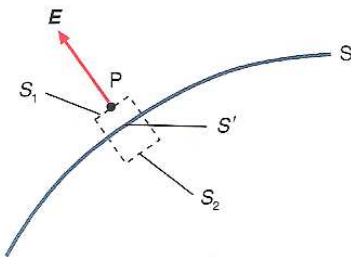


Figura 8.9

(b) Intensità del campo elettrico nelle immediate vicinanze di un conduttore carico

Sia S la superficie esterna di un conduttore carico, immerso in un mezzo dielettrico, e sia P un punto esterno al conduttore e molto vicino alla superficie. Sia poi σ la *densità di carica superficiale* in prossimità di P , cioè la quantità di elettricità, considerata in valore assoluto, distribuita sull'unità di superficie di S nelle immediate vicinanze del punto considerato. Ci proponiamo di calcolare l'intensità del campo elettrico in questo punto.

A tal fine immaginiamo un piccolo e sottile cilindro retto, di sezione S' , parzialmente inserito nel conduttore (fig. 8.9); le basi S_1 ed S_2 del cilindro ($S_1 = S_2 = S'$) siano parallele alla superficie S e la base esterna S_1 contenga il punto P . È intuitivo che in tutti i punti vicinissimi alla superficie S il campo elettrico generato dalle cariche distribuite sulla superficie stessa è diretto ortogonalmente ad S ; il vettore \mathbf{E} , dunque, è, nel punto P , perpendicolare a S_1 e, in ciascun punto della superficie laterale esterna del cilindretto, appartenente alla superficie stessa.

Applichiamo ora alla superficie chiusa costituita dalla superficie del cilindretto il teorema di Gauss. Al flusso di forza elettrica uscente dal cilindretto contribuisce solo la base esterna S_1 . Infatti, poiché all'interno del conduttore il campo è nullo, per quanto è stato detto al punto (a), il flusso uscente dalla base interna S_2 e dalla superficie laterale interna è eguale a zero; il flusso uscente dalla superficie laterale esterna è parimenti nullo perché il vettore \mathbf{E} giace sulla superficie, e quindi forma con la normale alla superficie stessa un angolo $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ($\cos \alpha = 0$). Il flusso uscente dal cilindretto si identifica allora con il flusso in corrispondenza della base esterna, ove vale $E S_1$ dal momento che, come s'è detto poc'anzi, \mathbf{E} è perpendicolare a S_1 ($\cos \alpha = 1$). Poiché la quantità di elettricità racchiusa dal cilindretto è, per il significato attribuito alla grandezza σ , eguale a $\sigma S'$, e il flusso uscente è diverso da zero solo per la base esterna, otterremo

$$\Phi(\mathbf{E}) = \frac{\sigma S'}{\epsilon_0} = E S_1 = E S'$$

se assumiamo che il mezzo esterno sia il vuoto. Pertanto è

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}. \quad (8.15)$$

Siamo giunti alla (8.15) partendo dalla considerazione intuitiva che il vettore \mathbf{E} è ortogonale a S_1 . In realtà, che questo sia vero può essere provato in maniera rigorosa. Infatti, con procedimento analogo a quello che ci ha condotto alla (8.11) si può dimostrare che *il vettore \mathbf{E} è, in ogni punto di un campo elettrostatico, perpendicolare alla superficie equipotenziale passante per quel punto* (si veda l'esercizio 8.9); e poiché la superficie esterna di un conduttore è equipotenziale [punto (a)], \mathbf{E} è ortogonale alla superficie S ora considerata in ogni punto di essa e in tutti i punti ad essa molto vicini.

(c) Intensità del campo elettrico generato da una sfera conduttrice carica

Sia q la carica totale presente su di una sfera conduttrice, che supponiamo immersa in un mezzo dielettrico e lontana da altri conduttori. Immaginiamo che il mezzo esterno sia il vuoto (o aria priva di umidità). Il campo elettrico prodotto dalla sfera ha, in ogni punto, per motivi di simmetria, direzione radiale; pertanto nel punto P generico, a distanza r dal centro O della sfera, il vettore \mathbf{E} è

diretto come mostrato in fig. 8.10. Indichiamo con S' una superficie sferica ideale, passante per P e concentrica con la superficie S della sfera, e applichiamo ad essa il teorema di Gauss. Dal momento che la carica racchiusa dalla superficie S' è costituita dalla carica q portata dalla sfera conduttrice, avremo per la (8.14)

$$|\Phi(\mathbf{E})| = \frac{|q|}{\epsilon_0}. \quad (8.16)$$

D'altra parte, sempre per motivi di simmetria, l'intensità del campo assume in tutti i punti di S' il medesimo valore E , quindi il flusso attraverso S' è anche, per la (8.13),

$$|\Phi(\mathbf{E})| = \oint_{S'} E |\cos \alpha| dS' = E \oint_{S'} |\cos \alpha| dS'.$$

La quantità $\cos \alpha$ viene considerata in modulo poiché, a seconda che q sia positiva o negativa, il vettore \mathbf{E} è diretto verso l'esterno della sfera (così come è mostrato in figura) o verso l'interno: nel primo caso l'angolo α che la direzione orientata della normale (rivolta verso l'esterno) forma con la direzione orientata di \mathbf{E} è eguale a zero così che è $\cos \alpha = +1$; nell'altro caso è $\alpha = 180^\circ$ e $\cos \alpha = -1$. In entrambi i casi è $|\cos \alpha| = 1$ e di conseguenza

$$|\Phi(\mathbf{E})| = E \oint_{S'} dS'.$$

Poiché l'integrale $\oint_{S'} dS'$ esprime la somma di tutti gli elementi di superficie in cui S' può immaginarsi decomposta, e tale somma è eguale all'area $4\pi r^2$ della superficie, avremo più esplicitamente

$$|\Phi(\mathbf{E})| = 4\pi r^2 E. \quad (8.17)$$

Dal confronto della (8.16) con la (8.17) segue

$$4\pi r^2 E = \frac{|q|}{\epsilon_0},$$

e quindi

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|q|}{r^2}. \quad (8.18)$$

Questo risultato indica che *l'intensità del campo elettrico prodotto in un punto da una sfera conduttrice carica è quello stesso che si avrebbe se tutta la quantità di elettricità da essa portata fosse concentrata nel suo centro*. Basta infatti confrontare la (8.18) con la (8.6) che fornisce il campo generato da una carica puntiforme q in un punto a distanza r da esso.

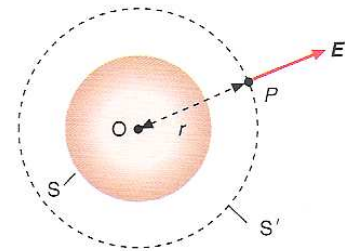


Figura 8.10

10 OSCILLOSCOPIO

Strumento di larghissimo uso e utilissimo allo studioso ed al ricercatore, l'*oscilloscopio* è costituito da un *tubo a raggi catodici* e da una serie di circuiti di alimentazione e di comando. Nei modelli più elaborati i circuiti di comando sono molto sofisticati e dotati di un gran numero di commutatori e di manopole, tanto che si richiede del tempo perché si acquisti piena padronanza nell'uso dello strumento. Tuttavia, i principi di base del suo componente principale, il tubo a raggi catodici, si possono agevolmente comprendere con i concetti fin qui acquisiti.

Nel tubo, di cui la fig. 8.11 mostra schematicamente una sezione, è fatto un vuoto molto spinto. Gli elettroni che il *catodo* metallico C, posto ad un'estre-