

42. Primitiva di una funzione.

Area del rettangoloide.

Teorema fondamentale del
calcolo integrale



Indice della lezione

- funzione primitiva
- caratterizzazione delle primitive di una funzione
- teorema fondamentale del calcolo integrale



Integrale: argomenti

Il procedimento di integrazione:

- Determinare la funzione conoscendo la derivata (la posizione di un corpo conoscendo la velocità, la numerosità di una popolazione conoscendo il tasso di crescita, ...)

Integrare ha anche il significato di :

- Sommare (area di una parte di piano con contorni curvi)

Le due interpretazione sono in stretta relazione



Il concetto di Integrale: motivazioni e obiettivi

Il concetto d'integrale è legato alla risoluzione di due classi di problemi:

- **Integrale Indefinito:**

- Calcolo dell'espressione analitica di una funzione a partire dalla derivata della funzione stessa

- **Integrale Definito:**

- calcolo delle aree di figure delimitate da curve
- calcolo di volumi
- calcolo del lavoro di una forza
-

Ci proponiamo ora di mettere in evidenza
l'importante relazione che esiste tra
integrali e derivate

Def. Una funzione $F(x)$ definita e derivabile in $[a,b]$, si definisce **primitiva** della funzione $f(x)$, definita e continua in $[a,b]$, se risulta che

$$F'(x) = f(x), \forall x \in [a,b]$$

Osservazione

Se $F(x)$ è una primitiva della funzione $f(x)$
(cioè $F'(x) = f(x)$) allora anche $F(x) + c$ è ancora
una primitiva di $f(x)$, $\forall c \in \mathbb{R}$, e viceversa
(infatti: $(F(x) + c)' = f(x)$, $\forall c \in \mathbb{R}$)

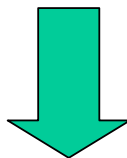


*se $F(x)$ è una primitiva di f ,
tutte le primitive di f si ottengono da F
aggiungendovi una costante*

Tale osservazione caratterizza le primitive di una funzione

Caratterizzazione delle primitive di una funzione

Se $F(x)$ e $G(x)$ sono due primitive di una stessa funzione f in un intervallo $[a,b]$



allora $F(x)$ e $G(x)$ differiscono per una costante, cioè:

$$F(x) = G(x) + c, \forall c \in \mathbb{R}$$

Dim: se $F(x)$ e $G(x)$ sono per ipotesi due primitive di f vuol dire che per ipotesi vale che:

$$F'(x) = f(x), \forall x \in [a, b]$$

$$G'(x) = f(x), \forall x \in [a, b]$$

Da ciò segue immediatamente che la derivata della differenza tra F e G è:

$$\begin{aligned} D(F(x) - G(x)) &= F' - G' = \\ &= f(x) - f(x) = 0, \forall x \in [a, b] \end{aligned}$$

 $(F(x) - G(x)) = \text{costante}$

Calcolare la primitiva delle seguenti funzioni

- se $f(x) = x \Rightarrow$

- se $f(x) = e^x \Rightarrow$

- se $f(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow$

- se $f(x) = x^3 \Rightarrow$

- se $f(x) = \frac{1}{x^2} \Rightarrow$



Calcolare la primitiva delle seguenti funzioni

- se $f(x) = x \Rightarrow F(x) = \frac{x^2}{2} + c$

infatti: $F'(x) = \frac{1}{2} 2x = x = f(x)$

Calcolare la primitiva delle seguenti funzioni

- se $f(x) = e^x \Rightarrow F(x) = e^x + c$

infatti : $F'(x) = e^x = f(x)$

- se $f(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow F(x) = \ln x + c$

infatti : $F'(x) = \frac{1}{x} = f(x)$

Calcolare la primitiva delle seguenti funzioni

- se $f(x) = x^3 \Rightarrow F(x) = \frac{1}{4}x^4 + c$

infatti : $F'(x) = \frac{1}{4}4x^{4-1} = x^3 = f(x)$

- se $f(x) = \frac{1}{x^2} \Rightarrow F(x) = -\frac{1}{x} + c$

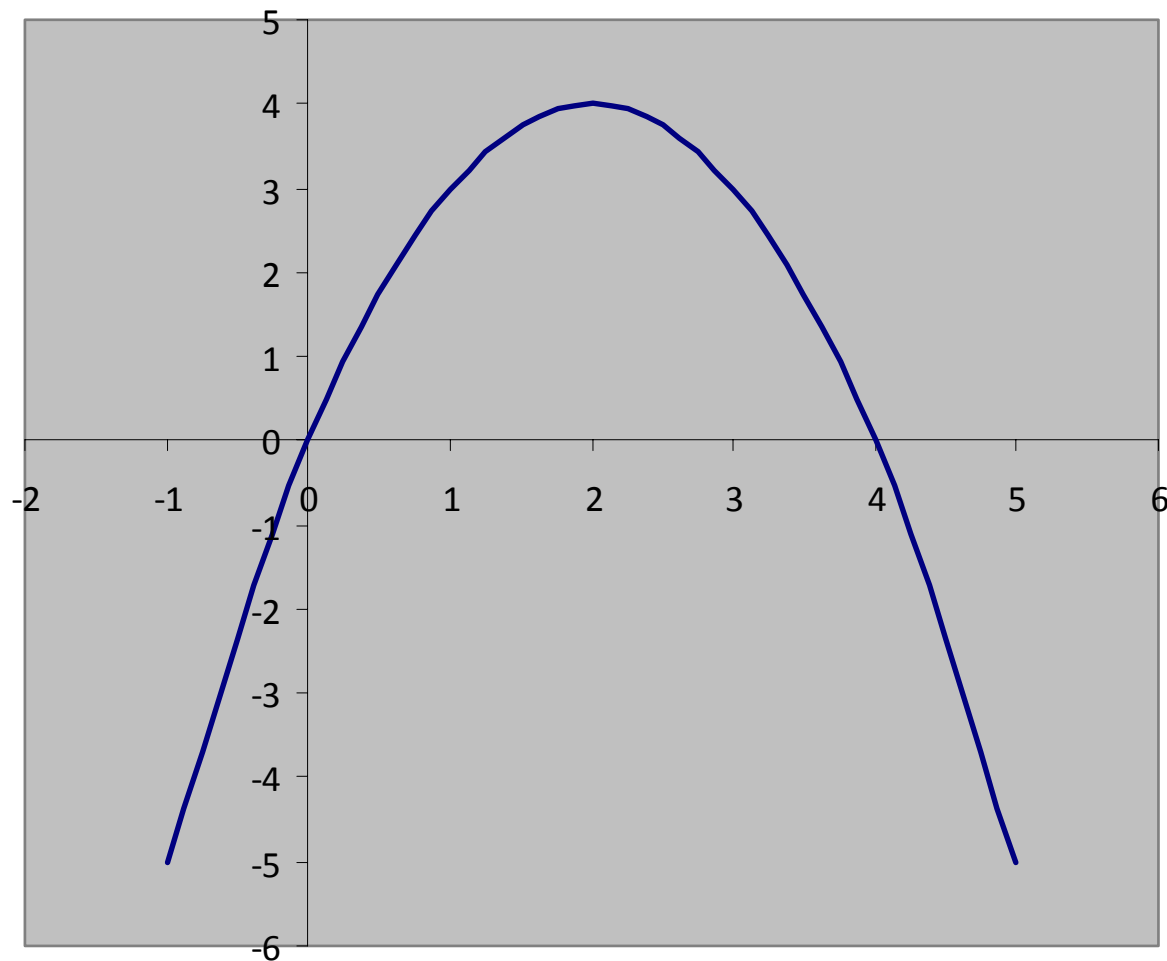
infatti : $F'(x) = +x^{(-1-1)} = x^{-2} = f(x)$

Così, abbiamo ricondotto il calcolo di un integrale definito alla ricerca della primitiva della funzione

(relazione integrale indefinito – derivata)

Vediamo ora il concetto di integrale come somma di aree

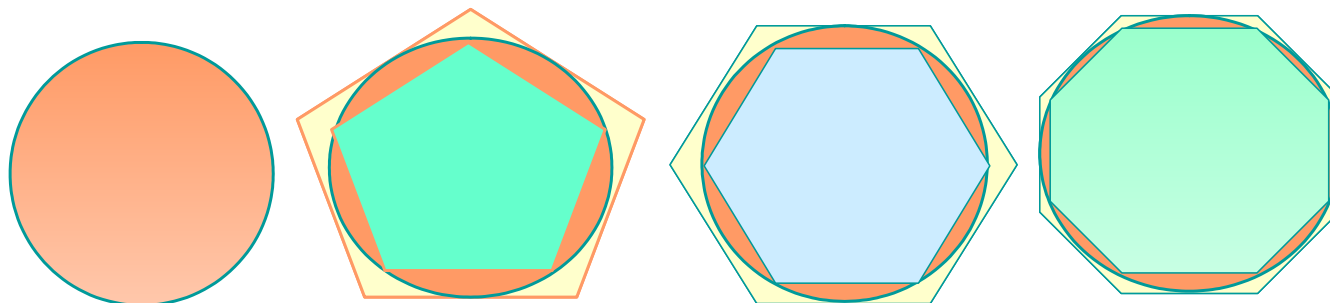
Calcolare l'area



Verso il concetto di Integrale: area di figure piane

Area del Cerchio:

E' possibile calcolare l'area per approssimazioni successive mediante poligoni regolari inscritti nel cerchio e poligoni regolari circoscritti al cerchio.

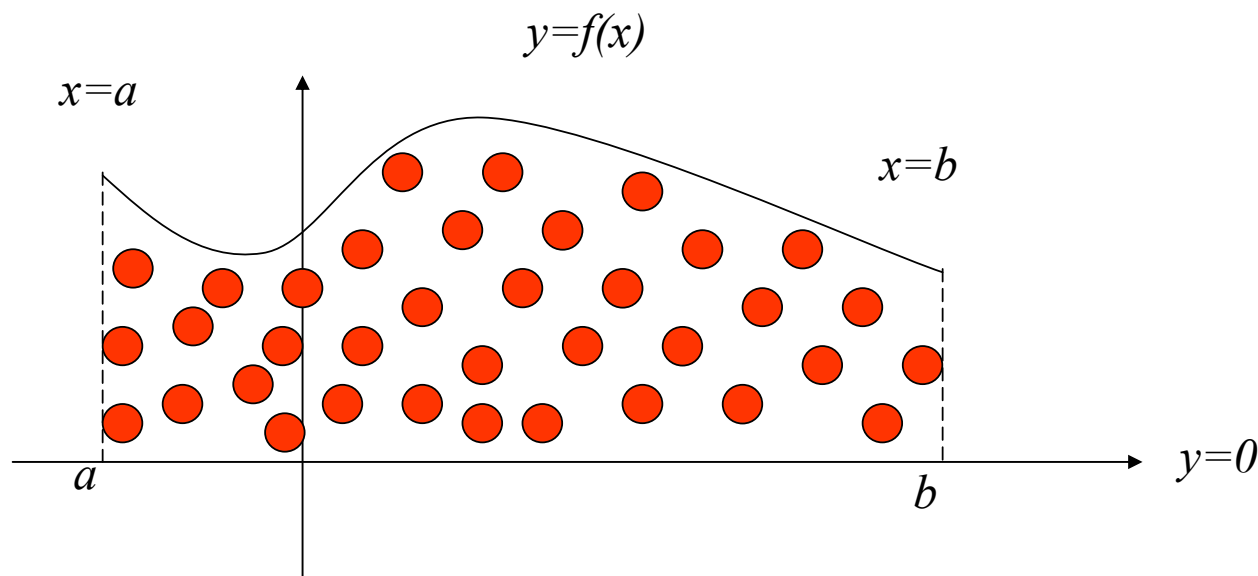


Si dimostra che: l'area del cerchio è uguale al limite comune, *quando il numero lati $\rightarrow \infty$* , al quale tendono le successioni formate dalle aree dei poligoni inscritti e circoscritti al cerchio

Il concetto di Integrale: calcolo delle aree

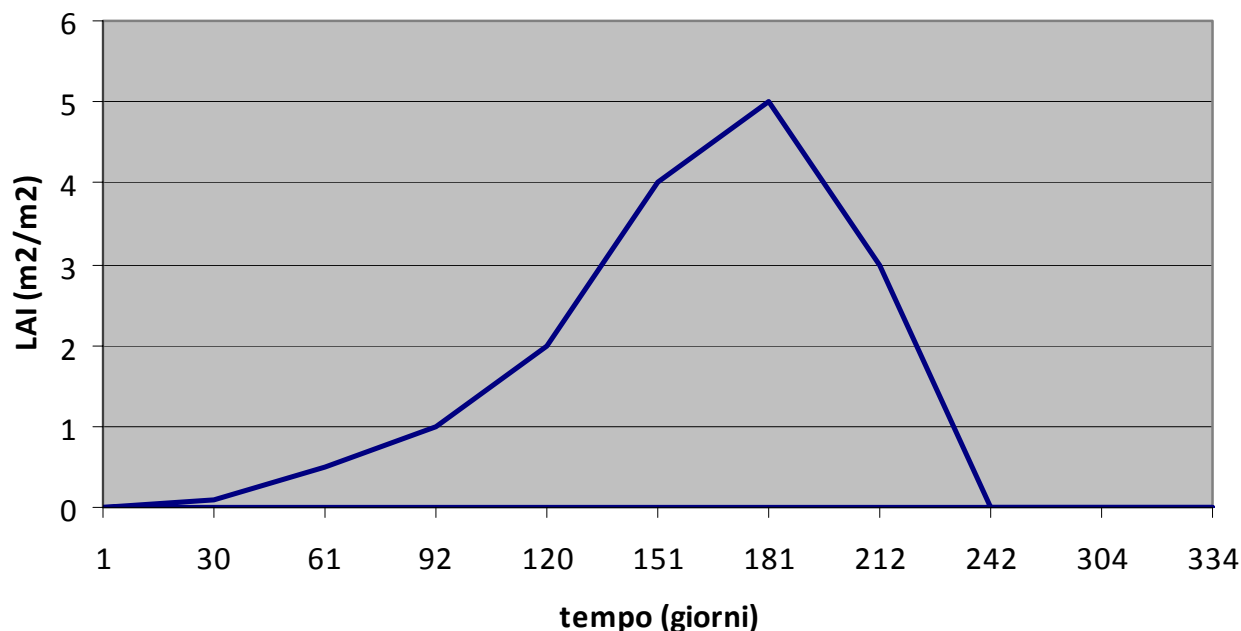
Area del Rettangoloide relativo ad una funzione:

Assegnata una funzione f continua nell'intervallo $[a;b]$, vogliamo calcolare l'area della regione di piano compresa tra l'asse x , le due rette verticali di equazione $x = a$ e $x = b$ ed il grafico di f . Tale regione di piano è detta Rettangoloide relativo alla funzione f .



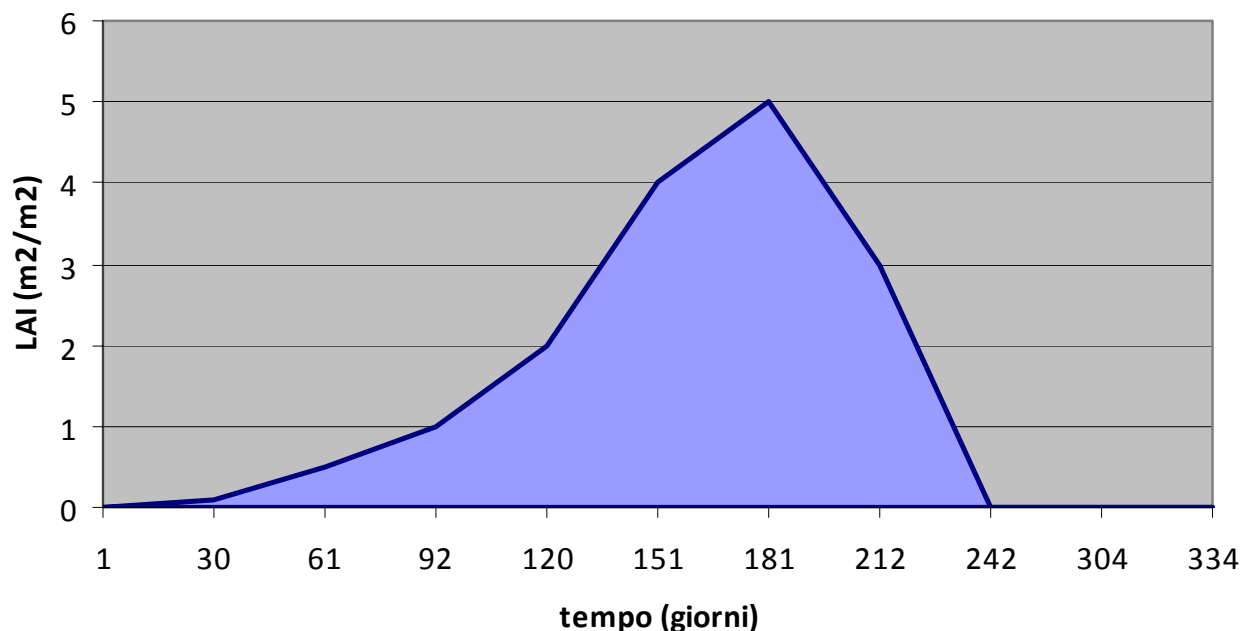
Il concetto di Integrale: calcolo delle aree

Dinamica del superficie fogliare (LAI - Leaf Area Index) di una coltura di mais?



Il concetto di Integrale: calcolo delle aree

La quantita (somma) di area fogliare
fotosinteticamente attiva nei 242 giorni



Integrale definito di una funzione: definizione

Assegnata una funzione f continua nell'intervallo $[a,b]$, l'integrale definito della funzione $f(x)$ relativamente all'intervallo $[a,b]$ è la misura dell'area del rettangoloide R relativo alla funzione f e si indica con il simbolo:

$$\int_a^b f(x)dx = \textit{Area } R$$

Il concetto di Integrale: cenni storici

L'idea di base del concetto di integrale si trova già in parte nel metodo usato da Archimede di Siracusa (vissuto tra il 287 ed il 212 a.C) per il calcolo dell'area del cerchio o del segmento di parabola e più precisamente per il calcolo dell'area della superficie racchiusa dal primo giro della spirale

Area come limite?!

Il problema che ci proponiamo ora di affrontare è quello di determinare l'area di una regione del piano delimitata da una curva



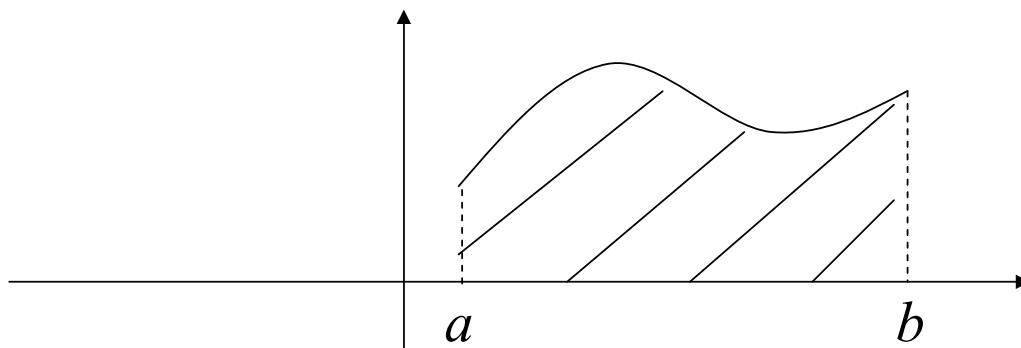
A tale proposito, osserviamo come tale problema coinvolge la nozione di limite

Area di una regione piana

Il problema che ci poniamo adesso è quello di determinare l'area di una regione del piano R che si trova, in un sistema di assi cartesiani ortogonale, al di sopra dell'asse delle ascisse x e al di sotto del grafico di una funzione $f(x)$ continua e non negativa al variare della variabile x in un intervallo $[a,b]$ chiuso e limitato

A tale proposito:

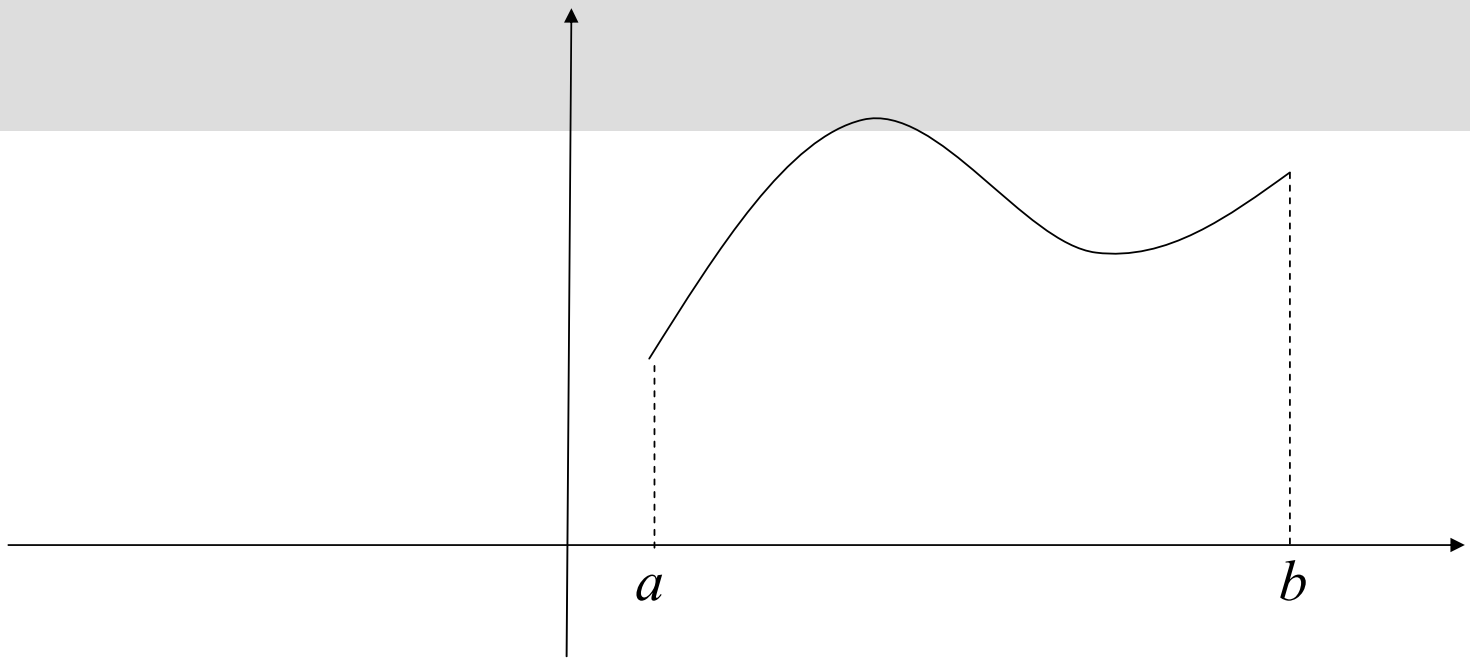
sia $f(x)$ una funzione definita e continua in un intervallo $[a,b]$ chiuso e limitato e sia $f(x) \geq 0$ al variare della variabile x in $[a,b]$



In tali ipotesi

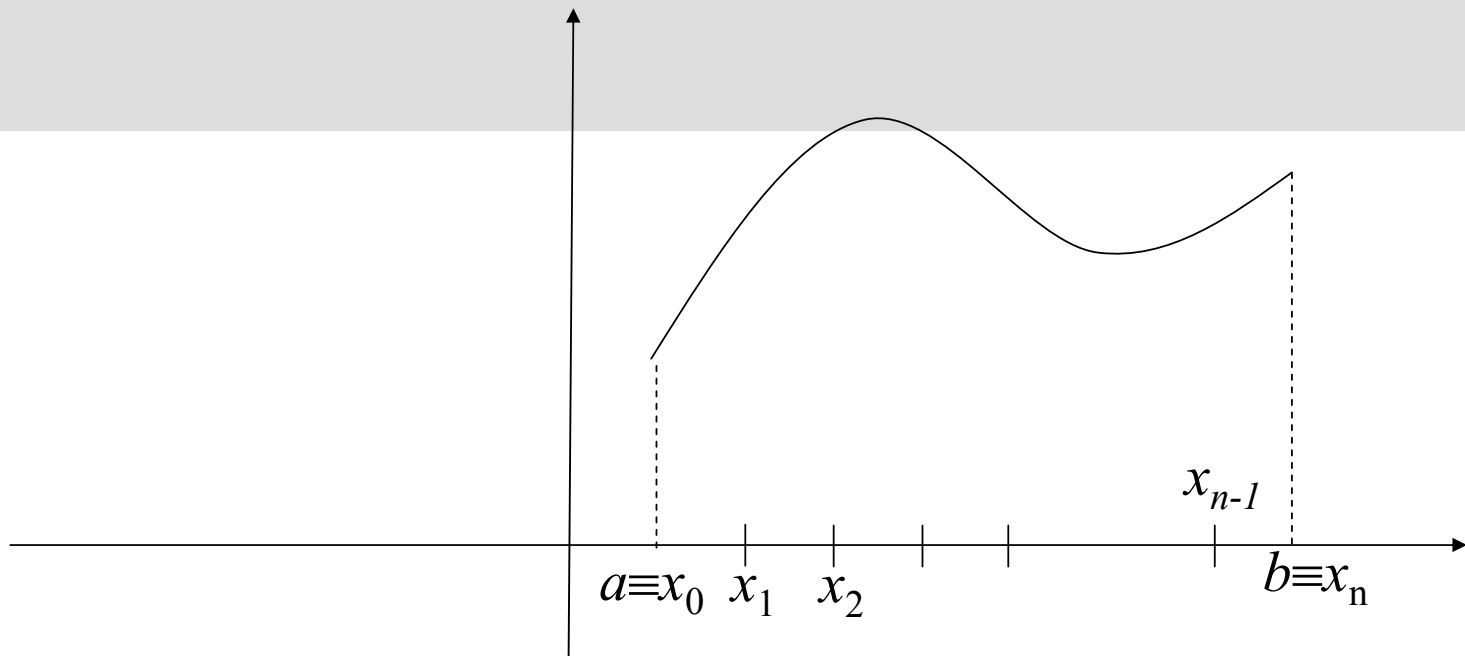
Def. Si definisce **rettangoloide** relativo alla funzione f la parte di piano compresa tra il grafico di $f \geq 0$ e l'asse delle ascisse

$$R = \{(x, y) : a \leq x \leq b \text{ e } 0 \leq y \leq f(x)\}$$



Sempre in tali ipotesi, suddividiamo l'intervallo $[a, b]$ in un numero n di parti uguali mediante punti di divisione:

$$a \equiv x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n \equiv b$$



In questo modo, suddividiamo l'intervallo $[a, b]$ in n intervalli parziali più piccoli e uguali tra loro:

$$[x_{i-1}, x_i], i = 1, \dots, n$$

ciascuno di ampiezza $h = \frac{b-a}{n}$

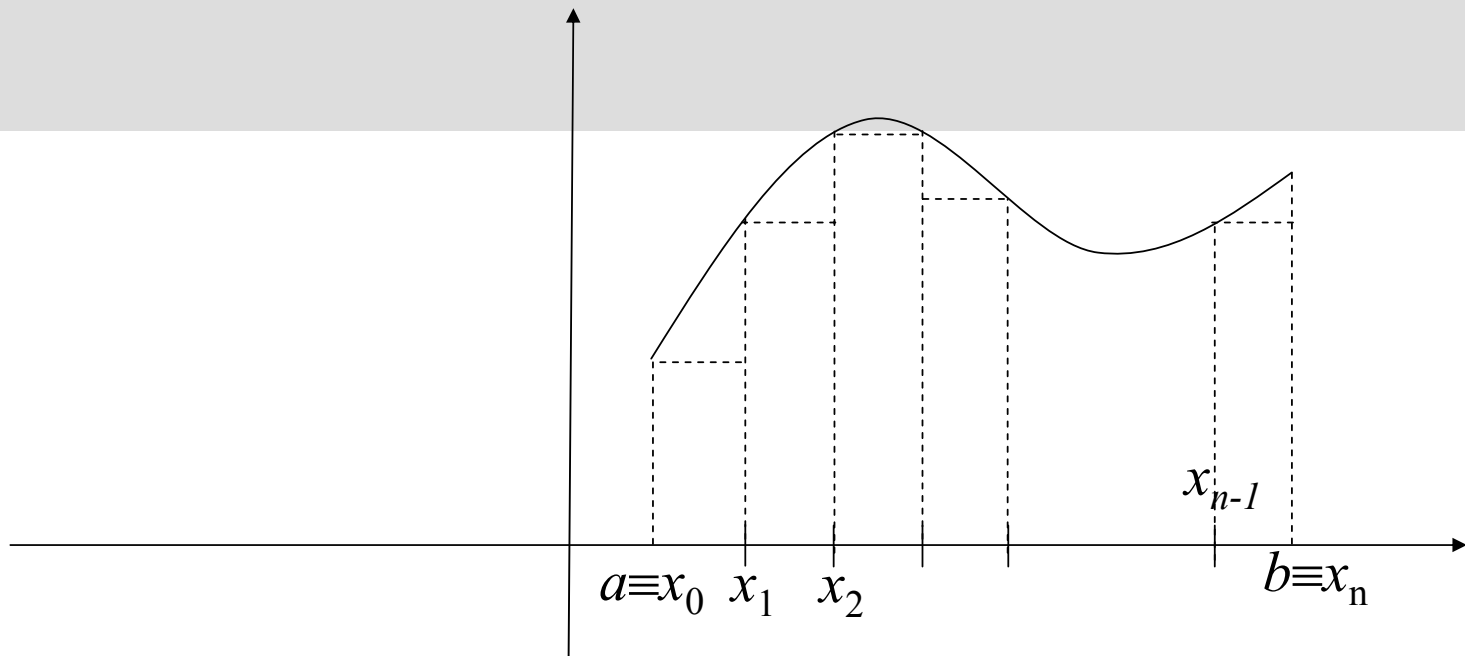
Osservazione:

avendo supposto che $f(x)$ sia una funzione definita e continua nell'intervallo $[a,b]$ chiuso e limitato, in particolare, $f(x)$ risulta definita e continua in ciascuno degli intervalli parziali $[x_{i-1}, x_i]$

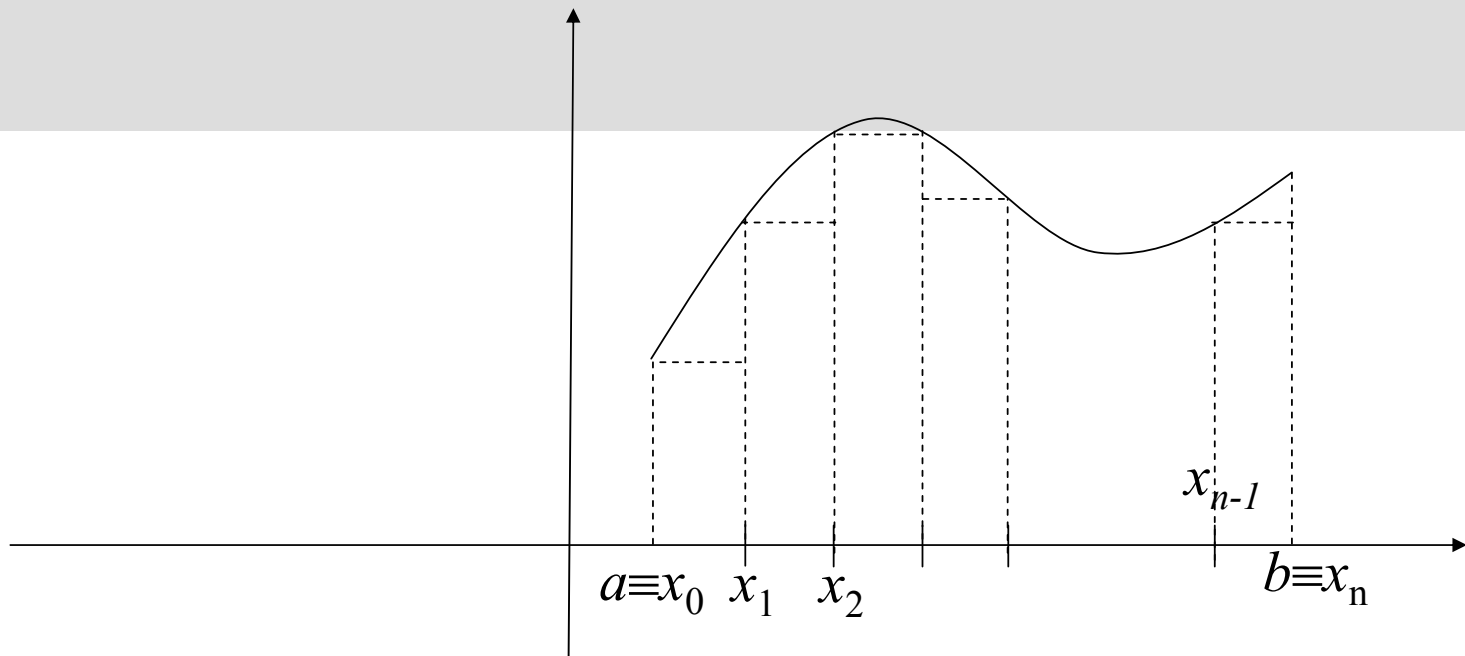


Applicando il teorema di Weierstrass in ciascun intervallino parziale

in ciascuno degli intervalli parziali $[x_{i-1}, x_i]$ la funzione f è dotata di minimo m_i e di massimo M_i ,
con $i = 1, \dots, n$



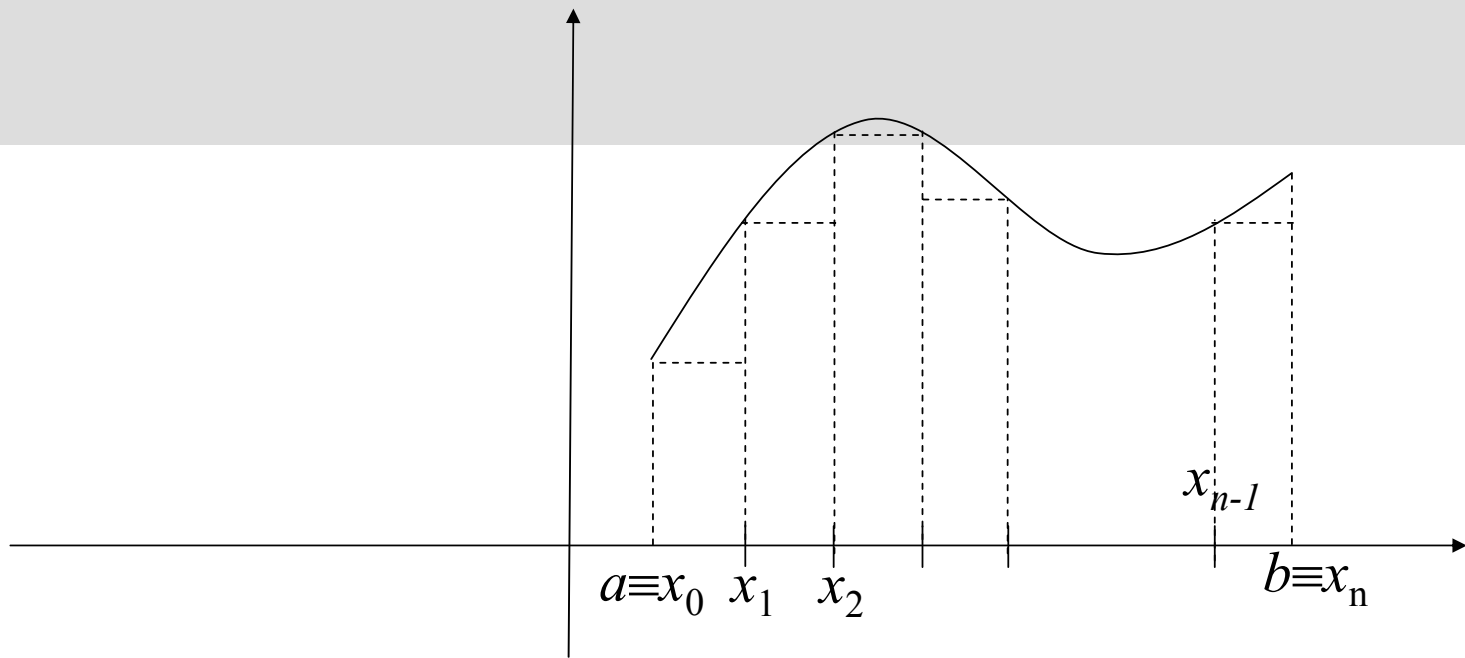
A partire dai minimi m_i in ciascuno degli intervalli parziali, si possono costruire n rettangoli aventi la base pari all'ampiezza h di ciascun intervallo parziale e l'altezza pari ad m_i



È possibile allora calcolare l'area di ciascuno di questi rettangoli

Ad esempio, l'area del primo è:

$$m_1(x_1 - x_0) = m_1 \frac{b - a}{n} = m_1 h$$

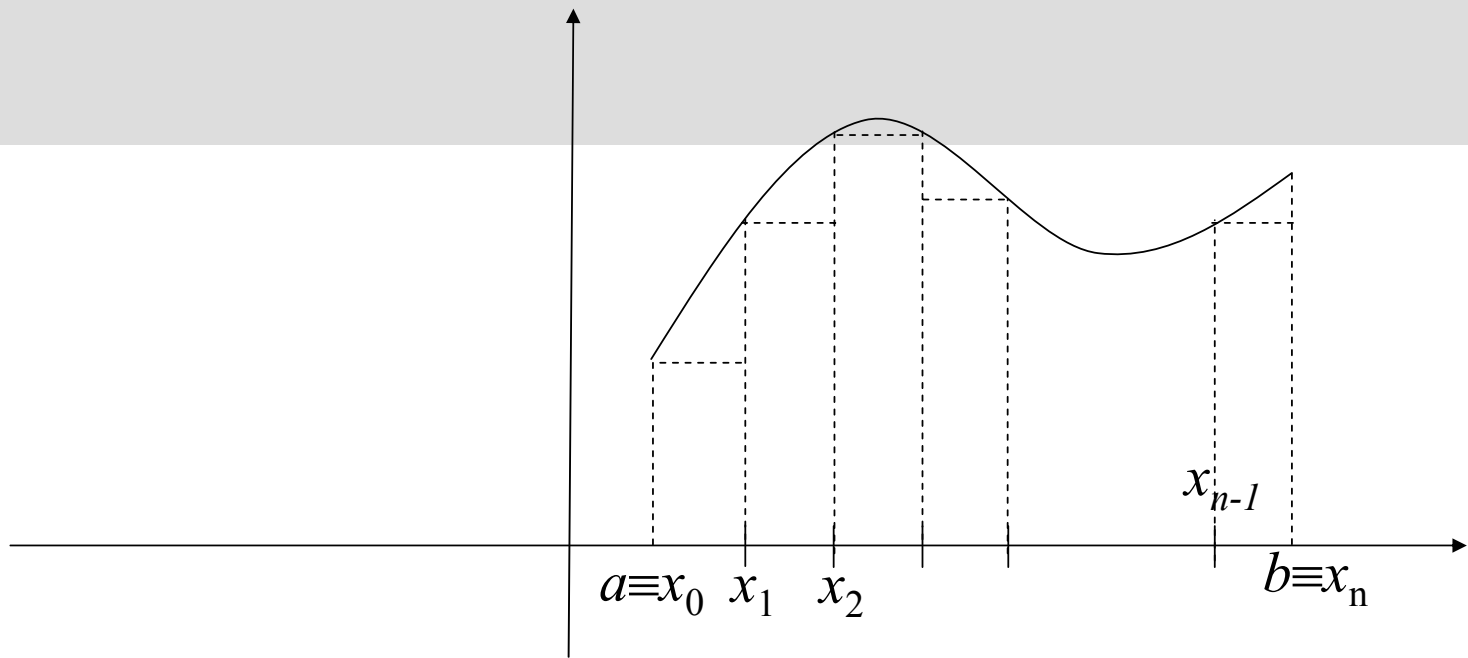


Allo stesso modo, l'area del secondo è:

$$m_2(x_2 - x_1) = m_2 \frac{b - a}{n} = m_2 h$$

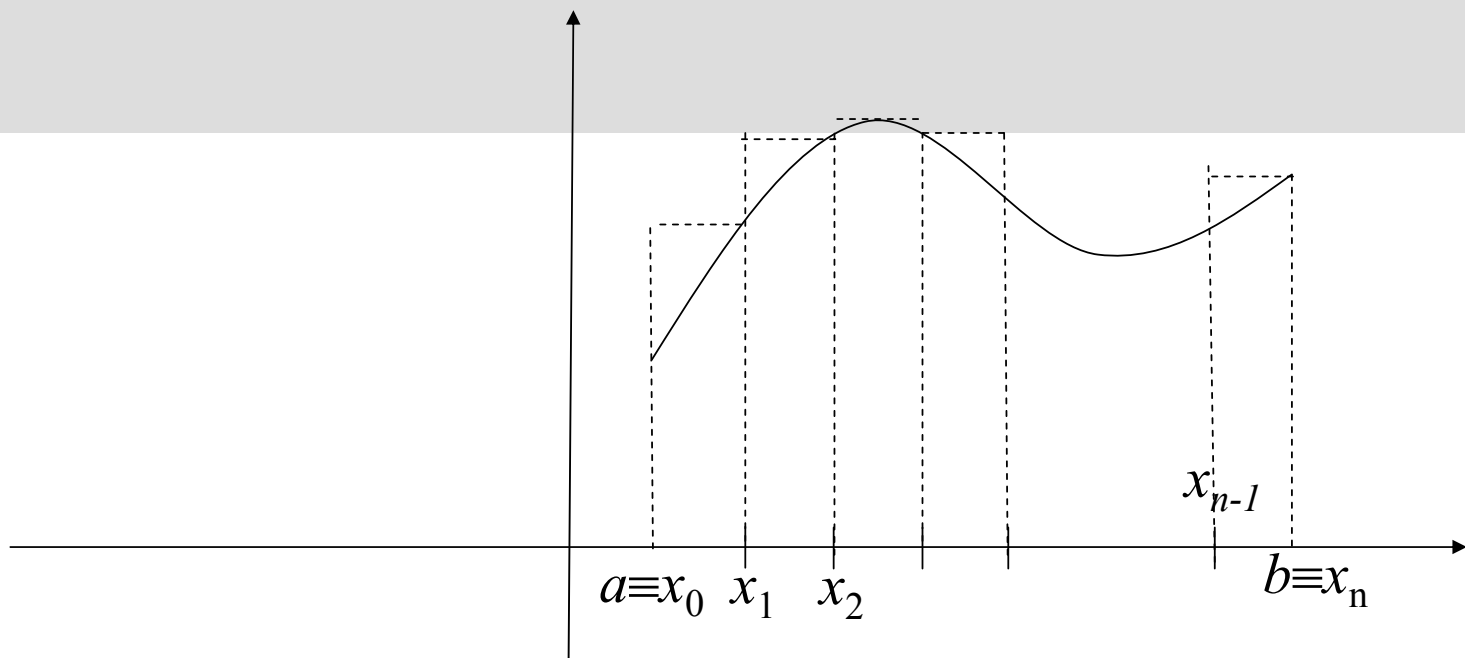
e quella dell' n -esimo è:

$$m_n(x_n - x_{n-1}) = m_n \frac{b - a}{n} = m_n h$$

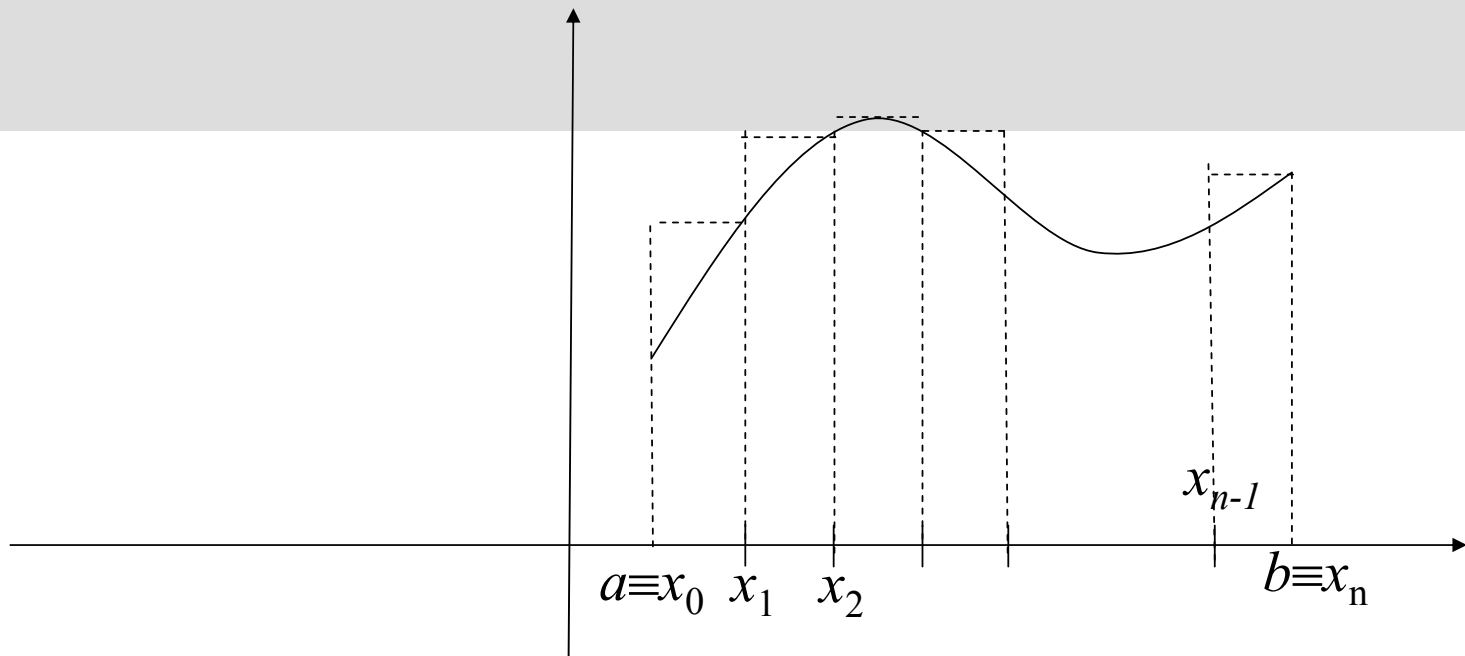


Così, la somma delle aree degli n rettangoli di altezza m_i è:

$$S_n = m_1 h + m_2 h + \dots + m_n h$$



A partire invece dai massimi M_i in ciascuno degli intervalli parziali, si possono costruire n rettangoli aventi la base sempre pari all'ampiezza h di ciascun intervallo parziale e l'altezza pari ad M_i , con $i = 1, \dots, n$

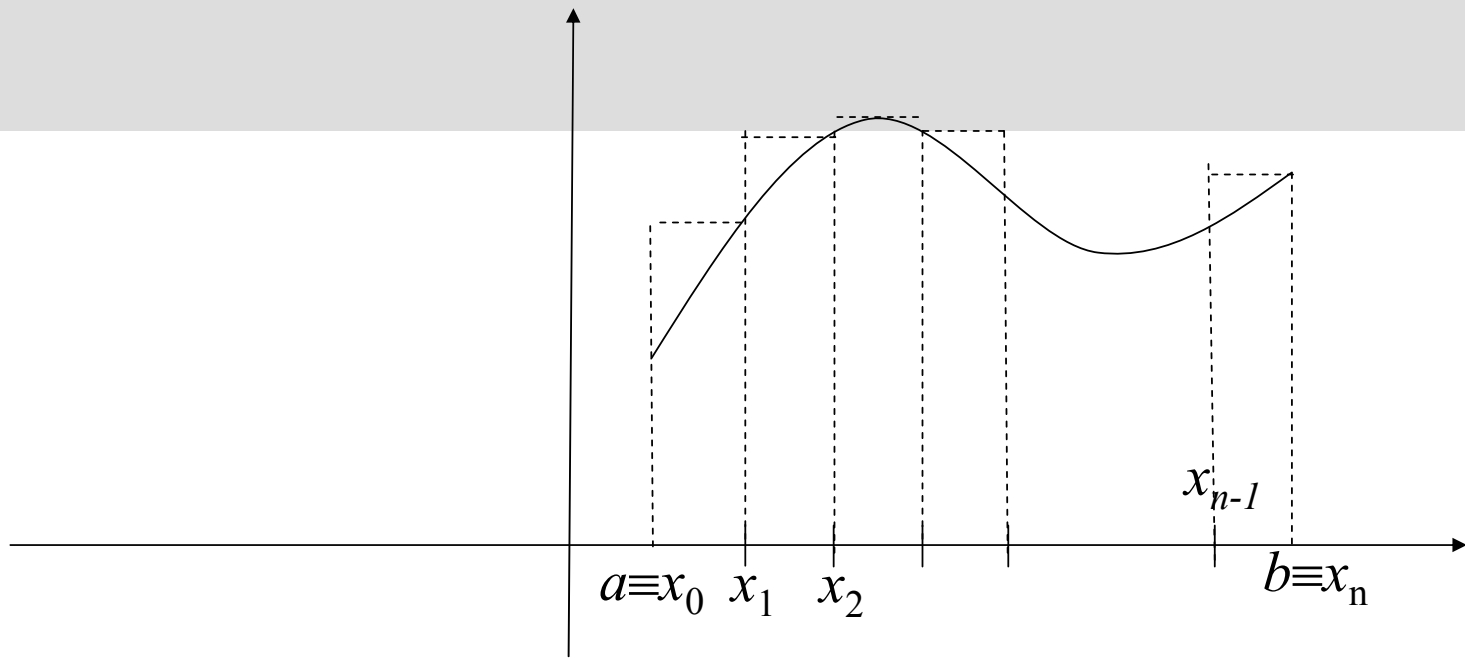


L'area del primo è: $M_1 h$

L'area del secondo è: $M_2 h$

...

L'area dell'n-esimo è: $M_n h$



Così, la somma delle aree degli n rettangoli di altezza M_i è:

$$S_n = M_1 h + M_2 h + \dots + M_n h$$

E sicuramente vale che:

$$s_n \leq S_n, \forall n \in \mathbb{N}$$

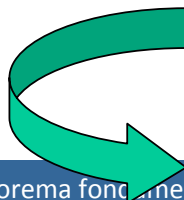
Cioè, qualunque sia la suddivisione dell'intervallo $[a,b]$ in intervalli parziali, l'area del plurirettangolo inscritto nel rettangoloide è sempre minore o uguale a quella del plurirettangolo circoscritto al rettangoloide

Vale poi che:

Teorema. Se $f(x)$ è una funzione definita e continua in un intervallo $[a,b]$ chiuso e limitato e se $f(x) \geq 0$ al variare della variabile x in $[a,b]$,

allora le somme s_n ed S_n hanno limite finito per $n \rightarrow +\infty$ ed in particolare hanno lo stesso limite coincidente con l'area del rettangoloide relativo alla funzione f :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \text{Area } R$$



ed in particolare:

Def. Il valore comune del limite delle somme s_n ed S_n si definisce integrale definito della funzione $f(x)$ esteso all'intervallo $[a,b]$ e si indica:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$$

e non è altro che l'area del rettangoloide relativo
alla funzione f

(ricordiamo che $f(x) \geq 0$ al variare della variabile x in $[a,b]$)

- i numeri a e b (estremi dell'intervallo di definizione della funzione), vengono definiti **estremi di integrazione** e in particolare:

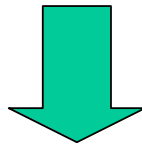
a è l'**estremo inferiore di integrazione**

b è l'**estremo superiore di integrazione**

- la funzione $f(x)$ viene definita **funzione integranda**
- la variabile x è la **variabile di integrazione**

In definitiva, quindi, per definizione, vale che:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \textit{Area } R$$



Nelle ipotesi poste, l'integrale definito è un numero > 0

Vediamo ora la relazione tra la primitiva ed il calcolo dell'area

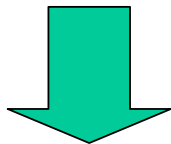
Teorema fondamentale del calcolo integrale

Sia $f(x)$ una funzione continua e positiva in $[a,b]$.

Fissato x in $[a,b]$, definiamo

$$A(x) = \int_a^x f(t) dt$$

cioè $A(x)$ è l'area della regione di piano compresa tra il grafico di f e le rette verticali a ed x .



La funzione $A(x)$ è primitiva di f e nel punto x si ha $A'(x) = f(x)$

L'integrale

$$\int_a^x f(t)dt$$

dipende dall'estremo $x \in [a, b]$ e quindi
è una funzione della x
che possiamo indicare come segue

$$A(x) = \int_a^x f(t)dt$$

