Capitolo 2

RETI ELETTRICHE IN CORRENTE CONTINUA

2.1 Caratteristica esterna dei bipoli elettrici

La tensione e la corrente di un bipolo elettrico sono legate da una relazione biunivoca che può essere espressa in forma analitica mediante le seguenti relazioni:

$$\Delta V = f\left(I\right) \tag{2.1}$$

$$I = g\left(\Delta V\right) \tag{2.2}$$

La curva che esprime graficamente sul piano cartesiano la relazione tensione-corrente prende il nome di caratteristica esterna. In figura 1 è riportato un generico bipolo elettrico e la sua caratteristica esterna.

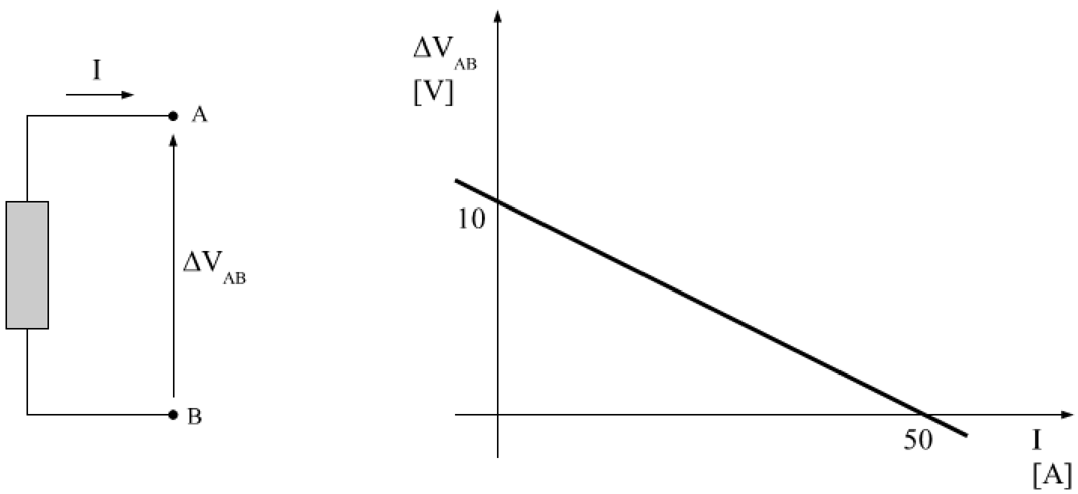


Figura 1 - Caratteristica esterna di un bipolo elettrico

Sull'asse delle ascisse è stata posta la corrente e sull'asse delle ordinate la tensione. In questo modo si è implicitamente optato di rappresentare la relazione $\Delta V = f\ (I)$. Nulla vieta di porre sull'ascissa la tensione e in ordinata la corrente in modo da rappresentare graficamente la relazione $I = g\ (\Delta V)$.
L'aggettivo esterna indica che il grafico descrive il comportamento del bipolo elettrico dal punto di vista esterno, ossia del circuito elettrico a cui è collegato, senza tener conto dei fenomeni che avvengono all'interno del bipolo. La caratteristica esterna può essere ottenuta sperimentalmente imponendo al bipolo una serie di valori di corrente, o di tensione, e misurando per ciascuno di essi la tensione e la corrente, che interessa il bipolo. Le coppie di valori (V,I) ottenuti vengono poi riportate su un diagramma.
La forma della caratteristica esterna permette di distinguere i bipoli elettrici in:

- bipoli lineari;
- bipoli non lineari.

La caratteristica dei bipoli lineari è una retta, mentre la caratteristica dei bipoli non lineari è una curva.
Un tipico esempio di bipolo non lineare è il diodo (Figura 2), un dispositivo elettronico realizzato con materiali semiconduttori.

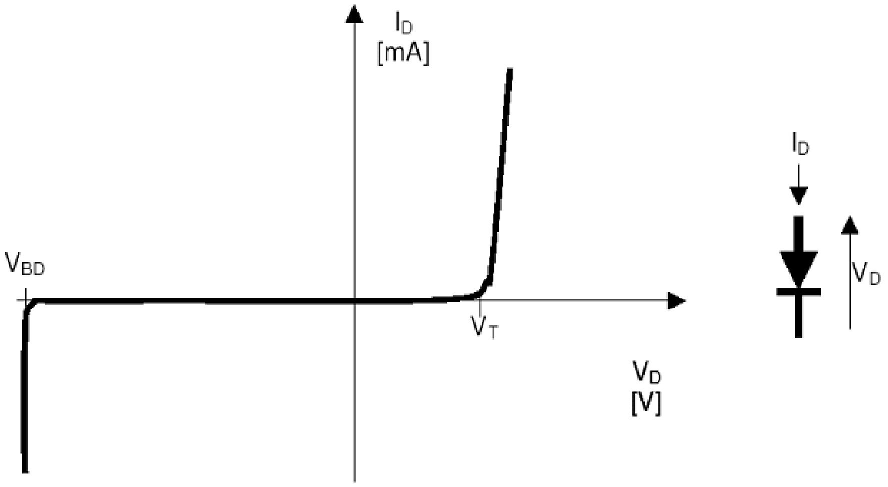


Figura 2 - Caratteristica esterna di un diodo

2.2 Tensione a vuoto e corrente di cortocircuito

Esaminando la caratteristica esterna di un bipolo elettrico è possibile definire le due seguenti grandezze:

Tensione a vuoto V_0. E’ la tensione che si ha ai morsetti del bipolo quando è nulla la corrente che vi circola, ovvero quando i due morsetti del bipolo sono sconnessi dal sistema elettrico. Il suo valore è dato dalla tensione nel punto di intersezione della caratteristica esterna con l’asse delle tensioni (I = 0).

Corrente di cortocircuito I_{CC} . E’ la corrente che si manifesta nel bipolo elettrico quando è nulla la tensione ai morsetti, ovvero quando i due morsetti del bipolo sono connessi direttamente tra di loro. Il suo valore è dato dalla corrente nel punto di intersezione della caratteristica esterna con l’asse delle correnti ($\Delta V = 0$).
In base ai valori assunti da V_0 e I_{CC} i bipoli elettrici si suddividono in:

- **bipoli passivi**, quando sia la tensione a vuoto che la corrente di cortocircuito sono entrambe e, di conseguenza, la caratteristica voltamperometrica passa per l’origine degli assi.

- **bipoli attivi**, quando sia la tensione a vuoto che la corrente di cortocircuito sono entrambe diverse da 0 e, di conseguenza, la caratteristica non passa per l’origine degli assi.

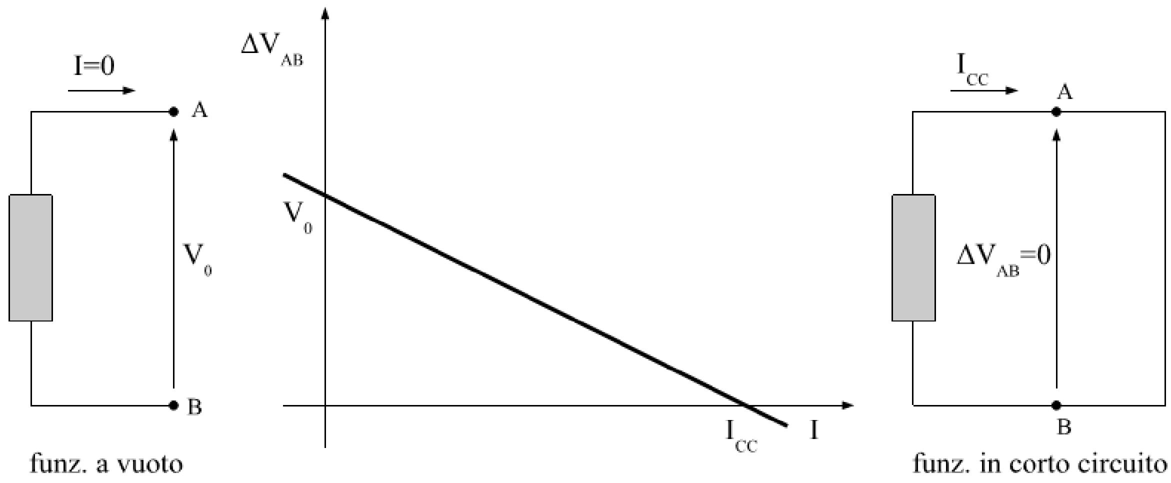


Figura 3 - Tensione a vuoto e corrente di cortocircuito

Esempi di bipolo passivo sono:

- il resistore: in esso avviene la trasformazione di energia elettrica in calore.
- il condensatore: in esso avviene la trasformazione di energia elettrica in energia potenziale elettrostatica.
- l'induttore: in esso avviene la trasformazione di energia elettrica in energia potenziale magnetica.

Esempi di bipolo attivo sono:

- il generatore a corrente continua[1]; in esso avviene la trasformazione di energia meccanica in energia elettrica.
- il motore a corrente continua: in esso avviene normalmente la trasformazione di energia elettrica in energia meccanica.
- La pila: essa trasforma energia chimica in energia elettrica.

Occorre tenere presente che sia il generatore che il motore a corrente continua sono due esempi di macchine elettriche, e come tali godono della proprietà di reversibilità. Ad esempio, se si impone la rotazione dell'albero di un motore a corrente continua ai capi dei due morsetti di alimentazione si rileva la presenza di una tensione; ciò significa che sta funzionando come un generatore. Se invece applichiamo una tensione ai capi di un generatore a corrente continua si nota che il suo albero inizia a muoversi, ovvero esso sta funzionando come motore.
Le pile generalmente non godono della proprietà di reversibilità, anche se nel caso delle pile ricaricabili si cerca di ottenere qualcosa di simile.
Da questa carrellata si può intuire che i bipoli attivi sono bipoli elettrici che sono in grado di funzionare sia da generatori che da utilizzatori, mentre i bipoli passivi possono funzionare solo da utilizzatori; infatti, quando vengono isolati dal resto del sistema elettrico attraverso un cortocircuito o aprendo il circuito (funzionamento a vuoto) non sono in grado né di erogare corrente né di mantenere autonomamente una tensione ai loro capi.
Nei bipoli attivi, a differenza dei passivi, i due morsetti sono dotati di segno, o polarità. In particolare, quando essi funzionano da generatori il morsetto da cui fuoriesce la corrente è denominato morsetto positivo, mentre quando funzionano da utilizzatori il morsetto positivo è il morsetto da cui entra la corrente.
Riassumendo, nei **bipoli passivi** avviene la trasformazione di energia elettrica in calore od in energia ancora di tipo elettrico, mentre nei **bipoli attivi** avviene la trasformazione di altra energia

[1] Denominato comunemente *dinamo*

in energia elettrica oppure di energia elettrica in energia diversa dall'energia termica e dall'energia elettrica.
La determinazione sperimentale della caratteristica esterna di un bipolo attivo funzionante come generatore può essere effettuata con l'ausilio di un reostato R (figura 4), ovvero un bipolo passivo dotato di una resistenza variabile in funzione della posizione di una presa intermedia mobile, denominata cursore.

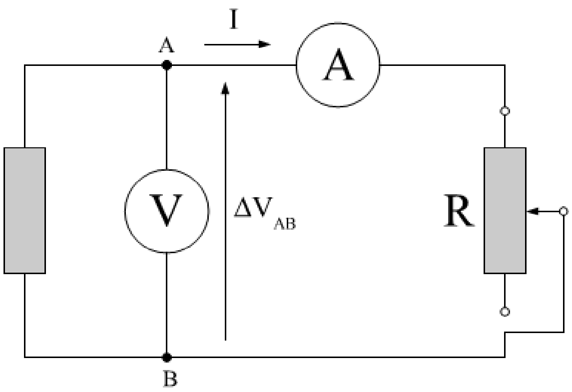


Figura 4 - Determinazione sperimentale della caratteristica esterna di un bipolo attivo

Variando la posizione del cursore si ottengono diverse coppie di valori di tensione e corrente rilevati rispettivamente dall'amperometro A e dal voltmetro V. Se il bipolo attivo si comporta in modo lineare tutti i punti individuati dalle le coppie di valori (V,I) devono appartenere alla stessa retta.
Da un punto di vista pratico il funzionamento in cortocircuito è di difficile rilevazione perché ad esso dovrebbe corrispondere una corrente enorme, la quale, a causa dell'effetto Joule, può portare ad un eccessivo riscaldamento dei componenti del circuito di misura. Il funzionamento a circuito aperto, invece, non presenta i pericoli del funzionamento in cortocircuito. Esso si ottiene disinserendo il reostato.

2.3 Bipoli ideali

Lo studio dei sistemi elettrici impone la modellizzazione di alcuni componenti elettrici reali come il generatore elettrico, i carichi resistivi, i conduttori di collegamento, ecc., mediante degli elementi aventi dei comportamenti ben definiti e soggetti a determinate ipotesi semplificative. Per questo motivo vengono introdotti i bipoli elettrici ideali, i quali sono dei bipoli lineari astratti dalla cui composizione possiamo ottenere la modellizzazione di sistemi elettrici anche complessi.

2.3.1. Generatore di tensione ideale

E' un bipolo attivo che mantiene ai suoi morsetti una tensione costante per qualunque corrente erogata. La tensione si indica con E ed è denominata **forza elettromotrice (f.e.m.)** o **tensione impressa**. La sua equazione caratteristica è:

$$\Delta V = E$$

Il simbolo del bipolo e la sua caratteristica esterna sono rappresentati in figura 5.

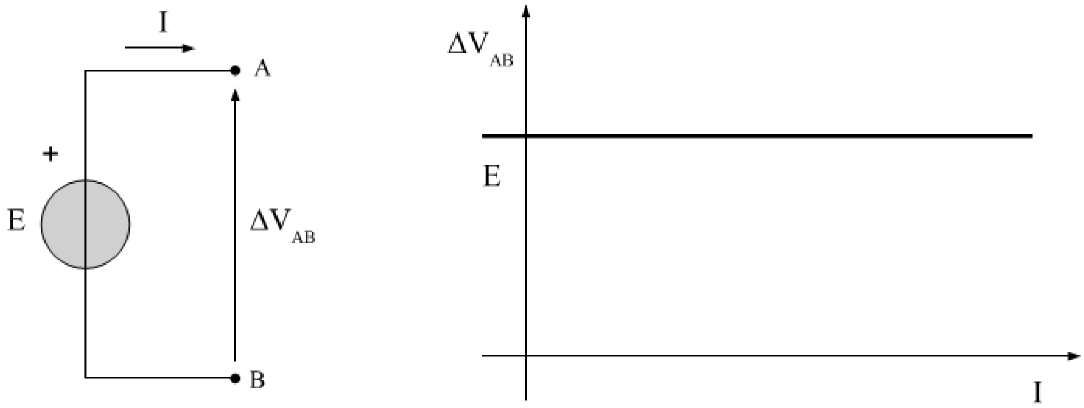


Figura 5 - Generatore ideale di tensione

2.3.2. Generatore di corrente ideale

E’ un bipolo attivo che eroga dai suoi morsetti una corrente costante a qualunque tensione. La corrente si indica con I_0 ed è denominata **corrente impressa**. La sua equazione caratteristica è:

$$I = I_0$$

Il simbolo del bipolo e la sua caratteristica esterna sono rappresentati in figura 6.

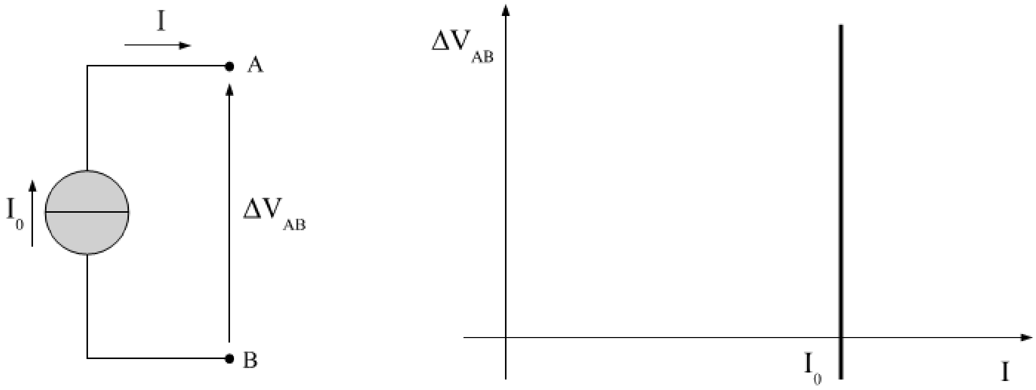


Figura 6 - Generatore ideale di corrente

2.3.3. Resistore ideale

E’ un bipolo passivo che mantiene un valore di resistenza costante qualunque siano i valori della tensione e della corrente. La sua equazione caratteristica deriva dalla legge di Ohm:

$$\Delta V_{AB} = R \cdot I \qquad\qquad I = G \cdot \Delta V_{AB}$$

La caratteristica esterna è una retta passante per l’origine, in conformità al fatto che è un bipolo passivo, avente inclinazione dipendente dal valore di R o di G.
Questo bipolo approssima il comportamento dei resistori reali, nei quali il valore della resistenza dipende dalla temperatura e da altre cause. Esistono diverse tipologie di resistori, anche molto diverse tra loro, che si differenziano principalmente per la potenza elettrica che sono in grado di dissipare senza subire danni.

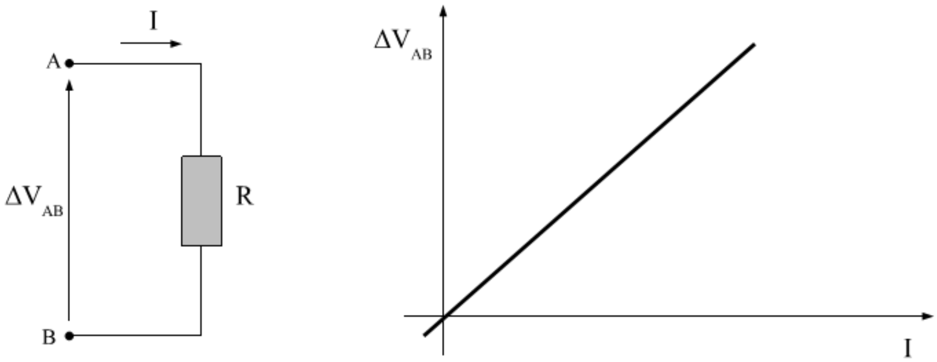


Figura 7 - Resistore ideale

2.3.4. Cortocircuito ideale

E’ un bipolo passivo che mantiene ai suoi morsetti una tensione nulla per qualunque valore della corrente che lo attraversa. Pertanto la sua equazione è semplicemente:

$$\Delta V_{AB} = 0$$

Il cortocircuito si rappresenta con una linea. In sostanza possono essere assimilati a cortocircuiti tutti i conduttori di collegamento tra un bipolo e l’altro. Il cortocircuito ideale è assimilabile a un resistore ideale di resistenza nulla per il quale si ha sempre:

$$\Delta V_{AB} = 0 \cdot I = 0$$

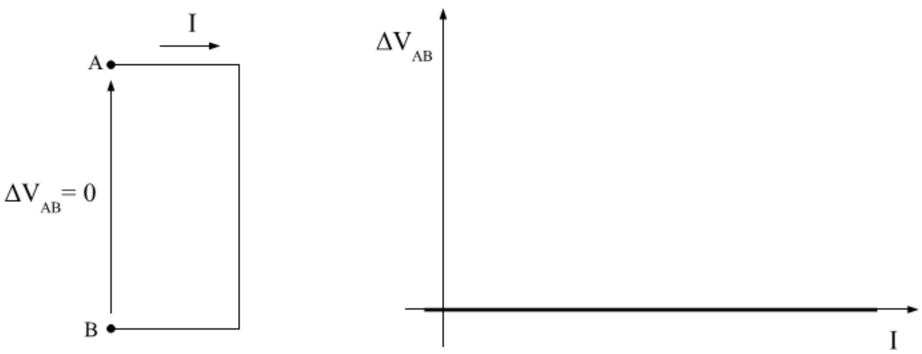


Figura 8 - Cortocircuito ideale

2.3.5. Circuito aperto ideale

E’ un bipolo passivo interessato da corrente nulla per qualunque valore di tensione posto ai suoi capi. La sua equazione consiste semplicemente in:

$$I = 0$$

Questo bipolo approssima un qualsiasi circuito aperto, come ad esempio un interruttore aperto. Gli interruttori, in realtà, quando sono sottoposti a d.d.p. molto elevate possono essere interessati dal fenomeno dell’arco elettrico. Il circuito aperto ideale può essere considerato anche una resistenza di valore infinito.

Esercizio proposto 2.1. Per ciascuna delle seguenti caratteristiche esterne, espresse in forma analitica, disegnare la loro rappresentazione grafica ed indicare a quale tipo di bipolo appartengono

1. $\Delta V = 12 \cdot I$.
2. $I = 10$ A
3. $\Delta V = 5$ V
4. $I = 0$ A

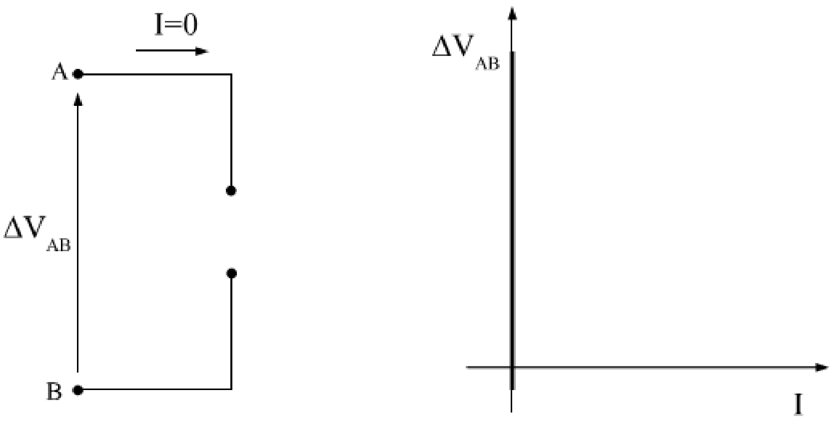


Figura 9 - Circuito aperto ideale

2.4 Bipoli collegati in serie e in parallelo

Si considerino due bipoli elettrici collegati come in figura 10.

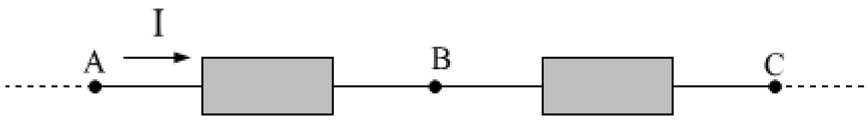


Figura 10 - Due bipoli in serie

Il collegamento dei due bipoli della figura è denominato *collegamento in serie*. Esso è tale per cui la corrente che interessa il bipolo con d.d.p V_{AB} è la stessa che interessa il bipolo con d.d.p. V_{BC}. In generale **due o più bipoli elettrici sono collegati in serie quando sono soggetti alla stessa corrente**.
Nella figura 11 i bipoli elettrici sono collegati in *parallelo*. In questo caso ciò che li caratterizza è l'essere sottoposti alla stessa differenza di potenziale.

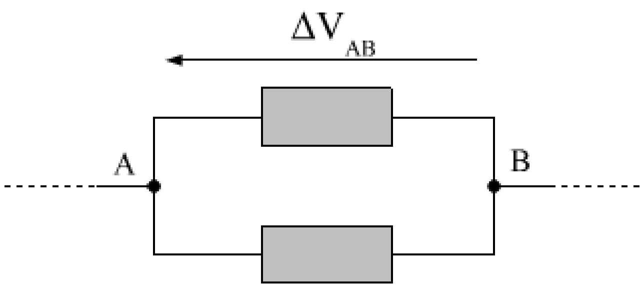


Figura 11 - Due bipoli in parallelo

In generale **due o più bipoli elettrici sono collegati in parallelo quando sono sottoposti alla stessa differenza di potenziale**.

2.5 Convenzioni e proprietà delle differenze di potenziale

La differenza di potenziale esistente tra due punti A ed B di un sistema elettrico si può rappresentare con il simbolo V_{AB} , omettendo il simbolo Δ, dove gli indici inferiori (A ed B) indicano tra quali punti del sistema si intende riferita la d.d.p..

$$V_{AB} = V_A - V_B$$

Si rammenta che:

- se $V_A > V_B \Rightarrow V_{AB} > 0$;
- se $V_B > V_A \Rightarrow V_{AB} < 0$.

Occorre prendere bene confidenza con le convenzioni e le proprietà delle d.d.p. per poter risolvere in seguito abbastanza agevolmente sistemi elettrici anche complessi.
Si prendono in considerazione i quattro casi elementari riportati in figura 12. Per ciascuno di essi si è indicata la d.d.p. tenendo conto di quanto esposto nel paragrafo 2.3.

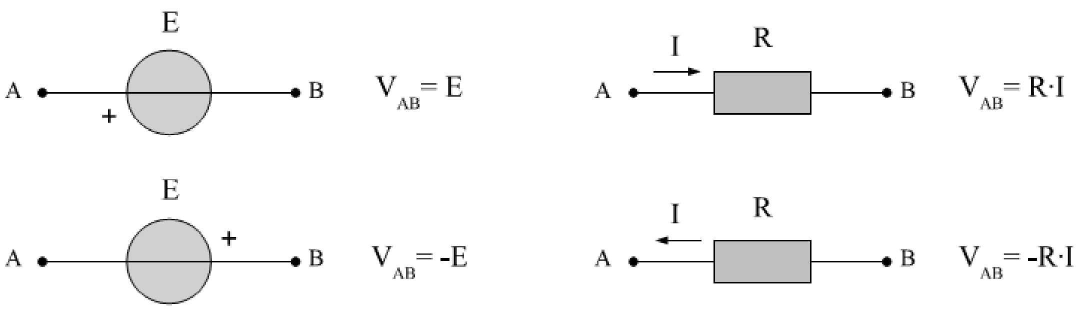


Figura 12 - d.d.p. in quattro casi elementari

I casi del generatore ideale di corrente e del circuito aperto non sono stati presi in considerazione perché la d.d.p. ai loro capi dipende dai vincoli imposti dal sistema elettrico in cui essi vengono inseriti.
Le d.d.p. calcolate prima sono relative a casi elementari; in generale, però, i punti A e B comprendono più bipoli elettrici. In tale caso è utile ricordare la proprietà fondamentale delle differenze di potenziale: il principio di additività delle d.d.p.

2.6 Principio di additività delle d.d.p.

Si riprendano in considerazione i due bipoli elettrici collegati in serie della figura 3.10. La differenza di potenziale tra i due estremi A e C si ottiene facendo la somma delle differenze di potenziale ai capi di ciascun bipolo.
Infatti si ha che:

$$V_{AC} = V_A - V_C = V_A - V_B + V_B - V_C = V_{AB} + V_{BC}$$

Le cose non cambiano se si è in presenza di tre o più bipoli collegati in serie (figura 13). In generale vale il seguente principio: **la differenza di potenziale ai capi di n bipoli collegati in serie è pari alla somma delle differenze di potenziale ai capi di ciascun bipolo elettrico.**

$$V_T = V_1 + V_2 + ... + V_n \tag{2.3}$$

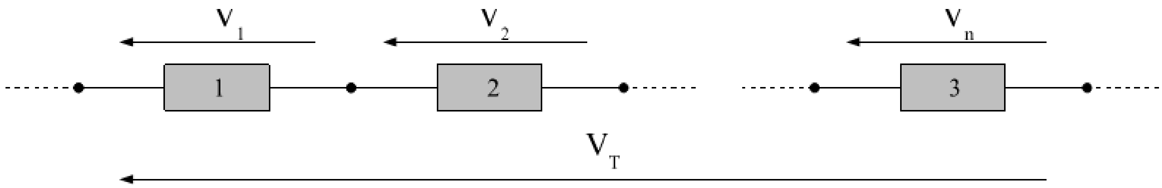
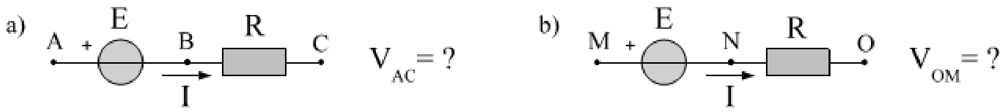


Figura 13 - d.d.p. per n bipoli in serie

Esso è conosciuto con il nome di principio di additività delle differenze di potenziale.

Esempio 2.1. Determinare le differenze di potenziale indicate nei seguenti casi.

E = 12V   I = 0,2A   R = 8Ω



Soluzione:

a) $V_{AC} = V_{AB} + V_{BC} = E + R \cdot I = 12 + 8 \cdot 0.2 = 13.6V$

b) $V_{OM} = V_{ON} + V_{NM} = \left(-R \cdot I\right) + \left(-E\right) = -8 \cdot 0.2 - 12 = -13.6V$

2.7 Reti elettriche

Per rete elettrica si intende un sistema elettrico comunque complesso, realizzato utilizzando componenti elettrici, in cui circolano una o più correnti elettriche.
Il sistema elettrico completo ed autonomo più semplice possibile è il circuito elettrico. L'esempio più elementare di circuito elettrico è già stato visto in precedenza quando sono stati introdotti i concetti di generatore ed utilizzatore.
In figura 14 è riportato un circuito elettrico composto solo da un generatore di tensione collegato ad un bipolo resistivo.

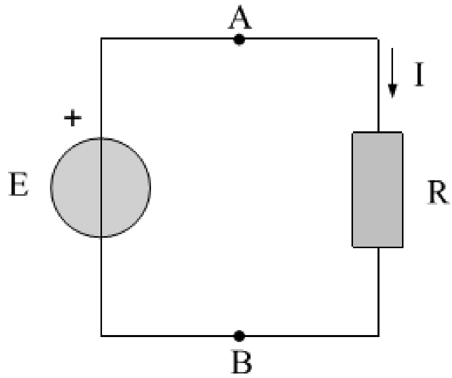


Figura 14 - Circuito elettrico elementare

Il circuito è attraversato da una corrente I il cui valore si può determinare agevolmente poiché si sa che la tensione V_{AB} ai capi del bipolo resistivo è pari alla f.e.m. E del generatore ideale di tensione.
Applicando la prima legge di Ohm si ottiene:

$$I = \frac{V_{AB}}{R} = \frac{E}{R}$$

I circuiti elettrici possono avere una complessità maggiore, come ad esempio quello riportato in figura 15.

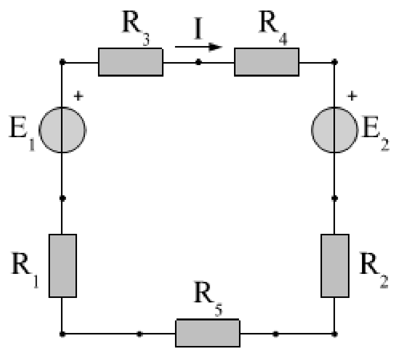


Figura 15 - Circuito elettrico complesso

Per quanto possa essere complesso un circuito elettrico, si intuisce che tutti gli elementi che lo compongono sono attraversati dalla stessa corrente elettrica.
Un ulteriore elemento di complicazione è la presenza di eventuali biforcazioni (figura 16). In questo caso non si parla non più di circuiti elettrici ma, più propriamente di reti elettriche.

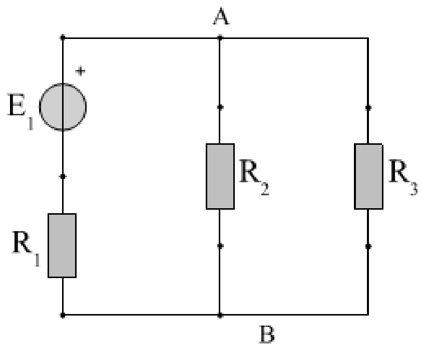


Figura 16 - Esempio di rete elettrica

Nella rete di figura 16 si possono individuare diversi elementi topologici[2].
Una rete elettrica è costituita dalla composizione dei seguenti tipi di elementi topologici:

- maglia: un possibile percorso chiuso della rete elettrica
- ramo: un tronco della rete elettrica, compreso tra due nodi, percorso da una sola corrente.
- nodo: punto di confluenza tra tre o più rami.

Ad esempio nella rete di figura 16 sono presenti rispettivamente 3 maglie, 2 nodi e 3 rami.

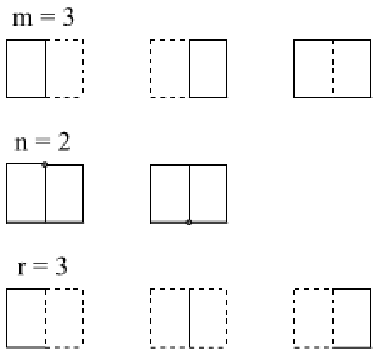


Figura 17 - Maglie, nodi e rami di una rete elettrica

[2] Il termine topologico deriva dal greco topòs che significa luogo.

Esercizio proposto 3.1. Disegnare una o più reti elettriche e determinare il numero n di nodi, il numero m di maglie ed il numero r di rami presenti in esse.

2.8 Principi di Kirchhoff

Nello studio delle reti elettriche capita di dover determinare alcune grandezze elettriche incognite (effetti) in base al valore assunto da altre grandezze elettriche note (cause). Per risolvere questo problema è necessario disporre di equazioni che mettano in relazione le cause con gli effetti. Lo scienziato tedesco Gustav Robert Kirchhoff (1824-1887) ricavò i due principi fondamentali per lo studio delle reti elettriche che permettono di scrivere tali equazioni. Egli dedusse i suoi principi da due leggi fisiche generali che non riguardano solo le reti elettriche.

2.8.1. Primo principio di Kirchhoff

Si consideri il nodo riportato in figura 18 appartenente ad una generica rete elettrica. In esso convergono diversi rami, ognuno percorso da una corrente elettrica avente il verso convenzionale è indicato in figura.
Si può ragionevolmente ritenere che la corrente totale che esce dal nodo sia uguale alla corrente totale che entra in esso. D'altronde se ciò non accadesse si avrebbe un accumulo od una rarefazione progressiva di cariche elettriche a seconda del termine che risulta maggiore. In pratica si ritiene costante la carica totale presente in ciascuna parte di una rete elettrica ovvero si ritiene valido il principio di stazionarietà della *carica elettrica*.
In regime stazionario la carica elettrica presente nel nodo deve rimanere costante e quindi, in uno stesso intervallo di tempo, alla carica che entra nel nodo deve corrispondere una uguale quantità di carica in uscita da esso.
Quanto appena affermato costituisce il ***primo principio di Kirchhoff*** .

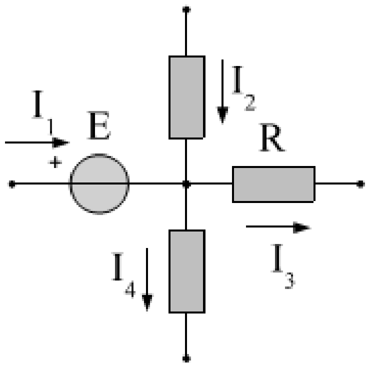


Figura 18 - Primo principio di Kirchhoff

In un nodo la somma delle correnti entranti è uguale alla somma delle correnti uscenti.

$$\sum I_{entranti} = \sum I_{uscenti} \qquad (2.4)$$

Considerando positive le correnti entranti e negative le correnti uscenti il primo principio di Kirchhoff può essere espresso nel seguente modo:
In un nodo la somma algebrica delle correnti è nulla.

$$\sum \pm I = 0 \qquad (2.5)$$

Applicando il primo principio di Kirchhoff a ciascun nodo di una rete elettrica si ottiene un numero di equazioni lineari pari al numero n di nodi. Queste equazioni sono denominate equazioni di nodo.

Esempio 2.2. Determinare la corrente I_2 entrante nel nodo di figura 18 sapendo che I_1 = 2.2 A, I_3 = 0.1 A e I_4 = 470 mA.
Soluzione: dal primo principio di Kirchhoff si ha:

$$I_1 + I_2 = I_3 + I_4$$

Per cui:

$$I_2 = I_3 + I_4 - I_1 = 0.1 + 0.47 - 2.2 = -1.63A$$

Il segno negativo indica che il verso effettivo della corrente I_2 è opposto a quello riportato in figura, per cui in realtà I_2 è una corrente uscente.

2.8.2. Secondo principio di Kirchhoff

Il campo elettrico, così come quello gravitazionale è di tipo conservativo. Ciò implica che la variazione di energia potenziale subita da una carica di prova q per passare da un punto a un altro della rete non dipende dal percorso seguito. Vediamo cosa comporta questo aspetto.
Si consideri una maglia presente all'interno di una generica rete elettrica (Figura 19). Vogliamo determinare la differenza di potenziale V_{AE}. Applicando il principio di additività delle d.d.p. possiamo però affermare che:

$$V_{AE} = V_{AB} + V_{BC} + V_{CD} + V_{DE}$$

oppure, in modo equivalente, scegliendo l'altro percorso

$$V_{AE} = V_{AG} + V_{GF} + V_{FE}$$

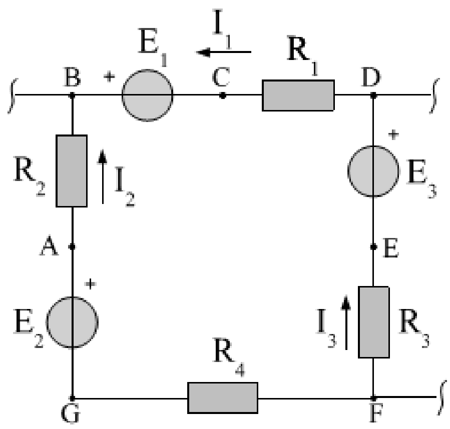


Figura 19 - Secondo principio di Kirchhoff

Essendo il campo elettrico conservativo è evidente che la differenza di potenziale V_{AE} calcolata nel primo modo è uguale alla differenza di potenziale calcolata nel secondo modo. Mettendo insieme le due relazioni si ottiene

$$V_{AB} + V_{BC} + V_{CD} + V_{DE} = V_{AG} + V_{GF} + V_{FE}$$

Da cui, dopo semplici passaggi:

$$V_{AB} + V_{BC} + V_{CD} + V_{DE} + V_{EF} + V_{FG} + V_{GA} = 0$$

Si intuisce che tensioni precedentemente elencate non possono assumere tutte solo un valore positivo o solo negativo, ma, in base al regime di funzionamento della rete, alcune di esse saranno positive, altre saranno positive. Pertanto la sommatoria precedente non è una sommatoria

aritmetica ma algebrica.
Possiamo affermare in termini generali il secondo principio di Kirchhoff nel seguente modo:
In una maglia la somma algebrica delle tensioni è uguale a zero.
La precedente affermazione può essere espressa con un linguaggio matematico mediante la seguente espressione analitica:

$$\sum_i \pm V_i$$

Per ogni maglia presente in una rete elettrica il secondo principio di Kirchhoff permette di determinare una equazione, denominata (equazione di maglia).
Per scrivere correttamente le equazioni di maglia possono essere di aiuto le seguenti regole pratiche:

- fissare un verso di percorrenza
- considerare positive le f.e.m. che hanno il verso concorde con il verso di percorrenza e negative le f.e.m. che hanno il verso discorde con il verso di percorrenza
- considerare positive le cadute di tensione date da correnti concordi con il verso di percorrenza e negative le cadute di tensione date da correnti con il verso concorde con il verso di percorrenza.

Esempio 2.3. Scrivere l'equazione di maglia relativa alla maglia di figura 19.
Soluzione: Utilizzando le regole pratiche appena esposte e fissando il verso di percorrenza orario si ottiene la seguente equazione:

$$E_1 - R_1 \cdot I_1 + E_3 - R_3 \cdot I_3 + R_4 \cdot I_4 - E_2 + R_2 \cdot I_2 = 0$$

Rimaneggiando l'equazione dell'esempio 2.3 si ottiene la seguente espressione:

$$E_1 - E_2 + E_3 = R_1 \cdot I_1 - R_2 \cdot I_2 + R_3 \cdot I_3 - R_4 \cdot I_2$$

Questa espressione suggerisce il seguente modo di enunciare il secondo principio di Kirchhoff.
In una maglia, la somma algebrica delle forze elettromotrici uguaglia la somma algebrica delle cadute di potenziale.
All'enunciato precedente corrisponde la seguente espressione analitica:

$$\sum \pm E = \sum \pm R \cdot I \tag{2.6}$$

2.9 Reti elettriche con una sola maglia

Le reti elettriche composte da una sola maglia sono denominate anche circuiti elettrici. In essi non sono presenti nodi, pertanto vi circola una sola corrente I e i bipoli sono connessi in serie. Iniziamo da un esempio. Si consideri il circuito elettrico riportato in figura 20. Per l'azione del generatore di tensione scorre una corrente I che provoca due cadute di tensione su R1 e su R2
Risolvere questo circuito elettrico equivale a determinare il valore della corrente I che circola in esso. Il verso della corrente è stato fissato tenendo conto che in un generatore la corrente esce dal morsetto positivo.

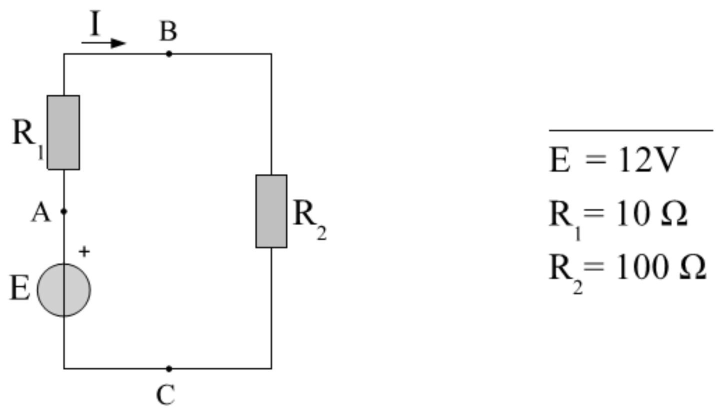


Figura 20 - Circuito elettrico

Applichiamo il secondo principio di Kirchhoff scegliendo il verso orario e partendo dal punto A:

$$V_{AB} + V_{BC} + V_{CD} = 0$$

Sostituendo, si ha:

$$R_1 I + R_2 I + (-E) = 0$$

Da cui si ottiene:

$$I = \frac{E}{R_1 + R_2} = \frac{12}{10+100} \cong 0.109A$$

Osservando le espressioni trovate per la corrente I negli esempi precedenti possiamo enunciare quella che è comunemente conosciuta come legge di Ohm per un circuito chiuso (o legge di Ohm generalizzata). La corrente circolante in un circuito chiuso è data dal rapporto tra la somma algebrica delle f.e.m. del generatore e la resistenza totale del circuito

2.10 Bipoli equivalenti

Un bipolo si dice ***equivalente*** *ad una rete elettrica, vista da due punti A e B, quando applicando al bipolo equivalente la stessa differenza di potenziale V_{AB} applicata alla rete si ottiene la stessa corrente I.*

In pratica se si sostituisce la porzione di rete designata con il suo bipolo equivalente la rete elettrica esterna alla rete designata non modifica il suo comportamento. Una prima applicazione del concetto di bipolo equivalente si rende disponibile con le reti di resistori, ovvero reti elettriche in cui sono presenti solo resistori.

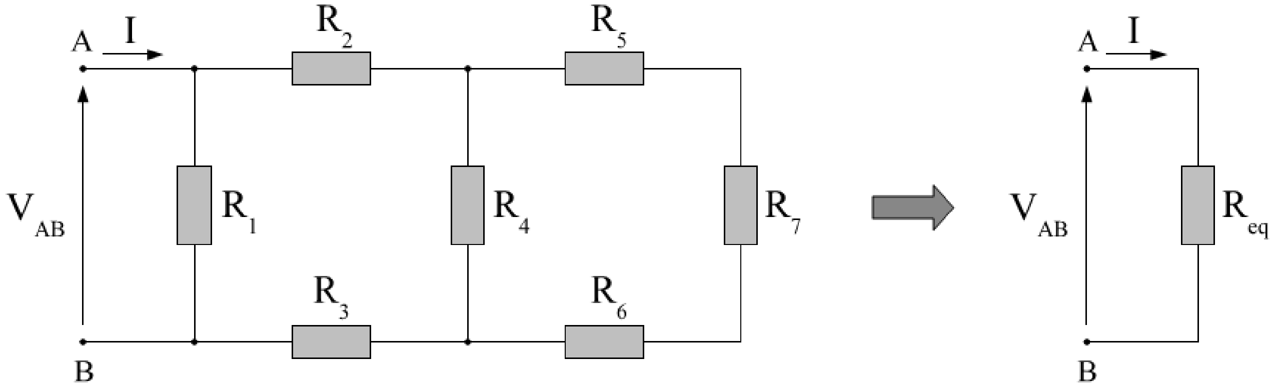


Figura 21 - resistenza equivalente di una serie di resistori

Una resistenza si dice ***equivalente*** *di una rete di resistori vista da due punti A e B quando*

applicando alla resistenza la stessa differenza di potenziale V_{AB} applicata alla rete si ottiene la stessa corrente I.
La seguente figura mostra una rete di resistori e la sua resistenza equivalente rispetto ai punti A e B. La resistenza equivalente si può ottenere operativamente calcolando la corrente I che attraversa la rete elettrica in funzione della d.d.p. V_{AB} ed effettuando poi il rapporto tra V_{AB} e l'espressione I. Si noterebbe che, immancabilmente, la tensione V_{AB} presente sia al numeratore che al denominatore si semplifica ottenendo così un'espressione dipendente dai soli valori delle resistenze.
In realtà, per ottenere la resistenza equivalente di una rete di resistori si segue un algoritmo in cui è di grande aiuto considerare la rete elettrica come una composizione di resistori in serie e in parallelo.

2.11 Resistori in serie

Vogliamo determinare la resistenza equivalente di n resistori collegati in serie. Consideriamo, a tale scopo, i 2 resistori della figura 22, a cui è applicata la tensione V_{AC} ed attraversati dalla corrente I.

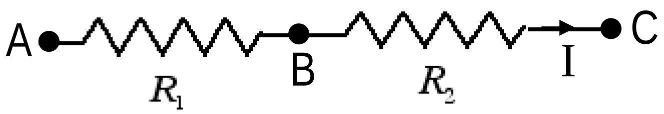


Figura 22 – Coppia di resistori in serie

Applichiamo la definizione di differenza di potenziale al circuito in figura:

$$V_{AC} = V_A - V_C = V_A - V_B + V_B - V_C = V_{AB} + V_{BC}$$

Da cui si ricava che effettivamente la differenza di tensione totale è data dalla somma delle cadute sulle singole resistenza, applicando la legge di ohm si ottiene:

$$V_{AB} = R_1 \cdot I; V_{BC} = R_2 \cdot I;$$

E quindi:

$$V_{AC} = R_1 \cdot I + R_2 \cdot I = \left(R_1 + R_2\right) \cdot I$$

Sapendo che la resistenza equivalente di ottiene facendo il rapporto tra V_{AC} ed I otteniamo che:

$$R_{tot} = \frac{V_{AC}}{I} = \frac{\left(R_1 + R_2\right) \cdot I}{I} = \left(R_1 + R_2\right)$$

Nel caso di tre resistori in serie, utilizzando lo stesso procedimento otteniamo:

$$R_{tot} = \left(R_1 + R_2 + R_3\right)$$

Generalizzando ad n resistori in serie si ha:

$$R_{tot} = \left(R_1 + R_2 + R_3 + ... + R_n\right)$$

Osservazioni
Le formule precedenti ci permettono di fare le seguenti osservazioni:

- La resistenza equivalente di più resistori in serie è sempre più grande della più grande delle resistenze.
- La serie di due resistenze uguali è pari al doppio del valore della singola resistenza

2.12 Resistori in parallelo

Due o più dipoli sono in parallelo quando sono connessi tra loro in modo tale da essere sottoposti alla stessa differenza di potenziale. Vogliamo determinare la resistenza equivalente di due resistori in parallelo.

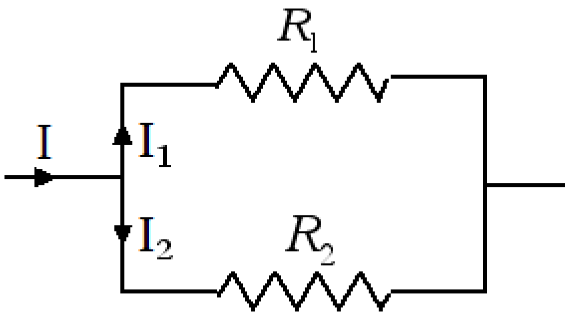


Figura 23 -Coppia di resistori in parallelo

Applichiamo il primo principio di Khirchhoff al nodo A della rete di figura 23:

$$I = I_1 + I_2$$

Applicando la legge di Ohm ai resistori R_1 e R_2 si ha:

$$I_1 = \frac{V_{AB}}{R_1}; I_2 = \frac{V_{AB}}{R_2}$$

Sostituendo nell'espressione di I si ottiene:

$$I = \frac{V_{AB}}{R_1} + \frac{V_{AB}}{R_2} = V_{AB} \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

da cui, sapendo che la resistenza equivalente di ottiene facendo il rapporto tra V_{AB} ed I:

$$\frac{1}{R_{tot}} = G_{tot} = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \Leftrightarrow R_{tot} = \frac{1}{G_{tot}} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$$

Nel caso di tre resistori in parallelo, utilizzando lo stesso procedimento otteniamo:

$$\frac{1}{R_{tot}} = G_{tot} = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) \Leftrightarrow R_{tot} = \frac{1}{G_{tot}} = \frac{R_1 \cdot R_2 \cdot R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$$

Generalizzando ad n resistori in parallelo si ha:

$$\frac{1}{R_{tot}} = G_{tot} = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + ... + \frac{1}{R_n} \right) \Leftrightarrow R_{tot} = \frac{1}{G_{tot}} = \frac{R_1 \cdot R_2 \cdot R_3 \cdot ... \cdot R_n}{R_1 + R_2 + R_3 + ... + R_n}$$

2.13 Partitori di tensione e corrente

2.13.1 Partitori di tensione

Il partitore di tensione è una rete elettrica, composta da due resistori in serie e da una forza elettromotrice, schematizzabile nella sua forma più semplice come in figura 24.

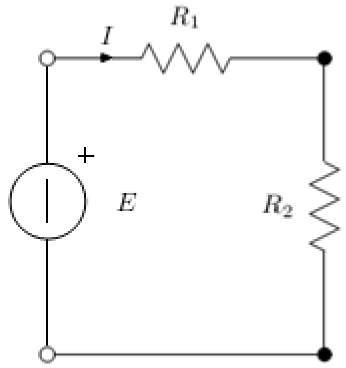


Figura 24 - Partitore di tensione

Facciamo l'analisi del circuito: applichiamo in entrata una f.e.m. E e indichiamo con I la corrente circolante nel partitore. Scriviamo l'equazione della maglia:

$$E = \left(R_1 + R_2\right) \cdot I \Leftrightarrow I = \frac{E}{R_1 + R_2}$$

Le tensioni ai capi delle due resistenze valgono rispettivamente:

$$V_{R_1} = R_1 \cdot I$$

$$V_{R_2} = R_2 \cdot I$$

Sostituiamo l'espressione della corrente, ottenendo:

$$V_{R_1} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \cdot E$$

$$V_{R_2} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot E$$

Osserviamo che la tensione sulle resistenze è in proporzione con alla f.e.m. imposta dal generatore. Il fattore di proporzionalità è pari al rapporto tra il valore di resistenza dell'elemento del quale vogliamo valutare la d.d.p. e la serie delle due resistenze.
Nel caso di n resistori in serie, le formule si generalizzano nel seguente modo:

$$V_{R_1} = \frac{R_1}{R_1 + R_2 + \ldots + R_n} \cdot E$$

$$V_{R_2} = \frac{R_2}{R_1 + R_2 + \ldots + R_n} \cdot E$$

$$V_{R_n} = \frac{R_n}{R_1 + R_2 + \ldots + R_n} \cdot E$$

2.13.2 Partitori di corrente

Il partitore di corrente è una rete elettrica, composta da due resistori in parallelo, schematizzabile nella sua forma più semplice come in figura 25.

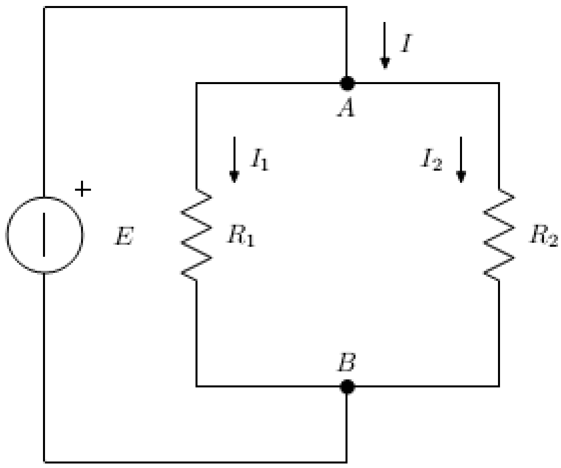


Figura 25 - Partitore di corrente

Con riferimento allo schema di figura 25, si ritengono note la corrente I e le resistenze R_1 ed R_2, mentre si calcolano, in funzione dei suddetti parametri noti: le correnti I_1 e I_2.
Si può scrivere:

$$V_{AB} = R_1 \cdot I_1 = R_2 \cdot I_2 = R_p \cdot I$$

Dove $R_p = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$

Dall'espressione sopra scritta si ricavano le correnti I_1 e I_2:

$$I_2 = \frac{R_p}{R_2} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \cdot I$$

$$I_1 = \frac{R_p}{R_1} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot I$$

Queste formule possono essere commentate affermando che: la corrente che attraversa una delle due resistenze in parallelo è una frazione della corrente totale I che entra nel parallelo, e che tale frazione è data dalla resistenza dell'altro ramo (ramo opposto) diviso la somma, $R_1 + R_2$, delle resistenze dei due rami.
Per il caso generale con n resistori in parallelo, si ha:

$$I_1 = \frac{R_2 \cdot R_3 \cdot \ldots \cdot R_n}{R_1 + R_2 + \ldots + R_n} \cdot I$$

$$I_2 = \frac{R_1 \cdot R_3 \cdot \ldots \cdot R_n}{R_1 + R_2 + \ldots + R_n} \cdot I$$

$$I_n = \frac{R_1 \cdot R_2 \cdot \ldots \cdot R_{n-1}}{R_1 + R_2 + \ldots + R_n} \cdot I$$

2.14 Reti elettriche con un solo generatore

Le reti elettriche in cui vi è presente un solo generatore che vede una rete resistiva più o meno complessa possono essere risolte applicando un algoritmo composto dai seguenti passi:

- individuazione dei bipoli resistivi collegati in serie, in parallelo:

- riduzione della rete resistiva ad un unico resistore equivalente;
- determinazione della corrente erogata dal generatore di tensione;
- determinazione delle differenze di potenziale e delle correnti relative a ciascun resistore

2.15 Generatore elettrico reale

In precedenza sono stati introdotti due bipoli attivi ideali, ovvero il generatore ideale di tensione ed il generatore ideale di corrente.
Se si prende in considerazione il comportamento reale di un generatore elettrico reale, come ad esempio una batteria d’auto od un alimentatore da banco, si deve osservare che il generatore ideali di tensione è un modello eccessivamente semplificato di esso. In particolare, introducendo i generatori ideali non si è tenuto conto di due aspetti fondamentali:

- Una parte della potenza generata viene persa all’interno dello stesso generatore elettrico a causa di fenomeni dissipativi di origine elettrica, magnetica e meccanica.
- I generatori reali non sono mai solo di tensione o solo di corrente. Essi, in realtà, forniscono contemporaneamente sia una tensione che una corrente.

Per rappresentare un generatore elettrico reale si possono utilizzare due modelli che rispecchiano più fedelmente i due aspetti appena menzionati:

- generatore reale di tensione, formato dalla serie tra un generatore ideale di tensione E, denominato anche f.e.m, e una resistenza R_i, denominata anche resistenza interna;
- generatore reale di corrente, formato dal parallelo tra un generatore ideale di corrente I, denominato anche corrente impressa, e una resistenza R_i, denominata anche resistenza interna;

2.16 Caratteristica esterna di un generatore reale

I generatori elettrici sono macchine che trasformano energia di altro tipo in energia elettrica. Per ora ci limitiamo a considerare generatori di tensione e corrente continua, ma esistono (ed anzi sono molto più diffusi in ambito elettrotecnico) anche i generatori di tensione e corrente alternata. Il motivo per il quale esistono due diversi modelli, generatore di tensione e generatore di corrente, per la stessa macchina è dovuto al fatto che nelle applicazioni si hanno sia dispositivi che tendono a mantenere costante la tensione d'uscita al variare della resistenza dell'utilizzatore alimentato, e per essi è più opportuno come modello il generatore di tensione, sia dispositivi che tendono a mantenere costante la corrente erogata al variare della resistenza dell'utilizzatore alimentato, e per essi è più opportuno come modello il generatore di corrente.
Per caratteristica esterna di un generatore si intende la funzione V = f (I) ovvero la tensione d'uscita in funzione della corrente erogata.
Vediamo nel caso di generatori ideali (cioè privi di dissipazioni interne di potenza) quale è l'andamento della caratteristica esterna, allo scopo supponiamo che i generatori alimentino un utilizzatore avente una resistenza R_u che dobbiamo immaginare variabile tra ∞ Ω (funzionamento a vuoto del generatore) e 0 Ω (funzionamento in cortocircuito del generatore):
Per il generatore ideale di tensione la caratteristica esterna sarà una retta orizzontale di equazione $V = V_0$ in quanto la sua tensione d'uscita è rigorosamente uguale alla sua forza elettromotrice, qualsiasi sia la resistenza dell'utilizzatore alimentato e quindi qualsiasi sia la corrente erogata. Per il generatore ideale di corrente la caratteristica esterna sarà una retta verticale di equazione $I = I_0$ in quanto la corrente erogata è rigorosamente uguale alla sua corrente impressa, qualsiasi sia la resistenza dell'utilizzatore alimentato e quindi qualsiasi sia la tensione d'uscita.

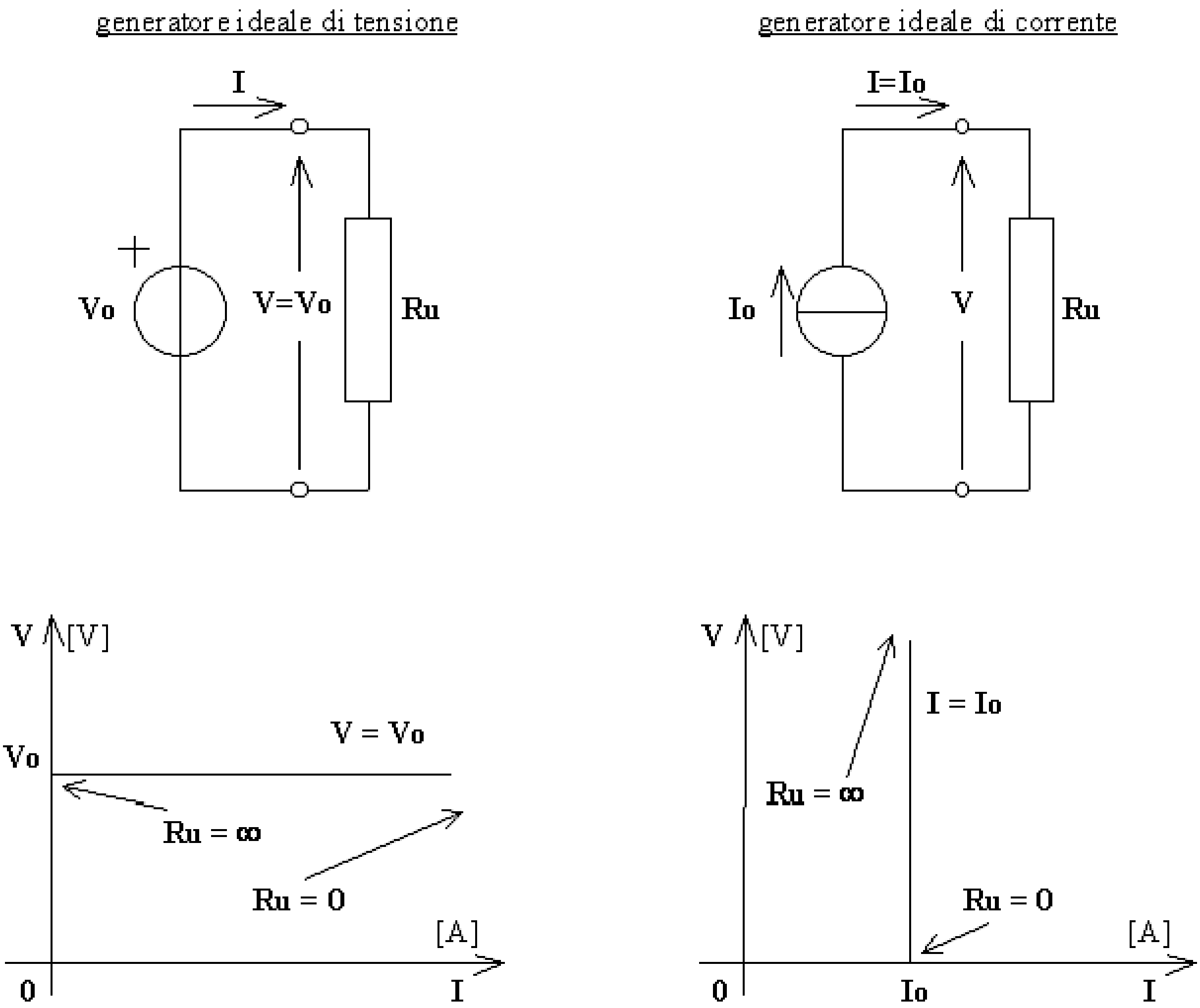


Figura 26 - Caratteristiche esterne dei generatori ideali di tensione e di corrente

Passiamo ora ad esaminare il caso di generatori reali (cioè generatori per i quali si considerino i fenomeni dissipativi interni). Il circuito equivalente dei generatori dovrà ora prevedere una resistenza interna R_0 grazie la quale si può tenere conto delle perdite interne di potenza. Tale resistenza verrà messa in serie nel caso del generatore di tensione (e vale zero se il generatore è ideale), mentre verrà messa in parallelo nel caso del generatore di corrente (e vale infinito se il generatore è ideale). Infatti la resistenza interna, oltre che delle perdite di potenza, dovrà pure tenere conto della diminuzione della tensione d'uscita all'aumentare della corrente erogata per il generatore reale di tensione e della diminuzione della corrente erogata all'aumentare della tensione d'uscita per il generatore reale di corrente.
Vediamo la discussione nel caso del generatore reale di tensione, il caso del generatore reale di corrente è del tutto analogo. L'equazione della caratteristica esterna V = f(I) si determina applicando la legge di Ohm al tronco di circuito comprendente il generatore:

$$V = V_0 - (R_0 \cdot I)$$

si tratta dell'equazione di una retta sul piano cartesiano (I,V) avente pendenza negativa, la pendenza è tanto più accentuata quanto più è grande la resistenza interna del generatore. L'intersezione con l'ordinata rappresenta il punto di funzionamento a vuoto essendo nulla la corrente erogata, quindi con resistenza dell'utilizzatore di valore infinito, e la tensione d'uscita è in tal caso pari alla f.e.m. del generatore. L'intersezione con l'ascissa rappresenta il punto di funzionamento in cortocircuito essendo nulla la tensione d'uscita, quindi con resistenza dell'utilizzatore di valore nullo, e la corrente erogata è in tal caso uguale a:

$$V = 0\ V; \qquad I_{CC} = V_0 / R_0$$

Per una generica condizione di funzionamento del generatore si avrà una tensione d'uscita che risulterà inferiore alla f.e.m. del generatore stesso di una quantità pari a $R_0 \cdot I$ che rappresenta la caduta di tensione interna al generatore dovuta alla sua resistenza interna. Viene chiamata retta di carico l'equazione corrispondente alla legge di Ohm applicata all'utilizzatore, ovvero:

$$V = R_u \cdot I$$

Sul piano cartesiano (I,V) tale equazione rappresenta una retta passate per l'origine ed avente pendenza positiva. Se i due assi hanno il medesimo fattore di scala, risulta essere:

$$tg(\alpha) = R_u$$

quindi la retta di carico coincide con l'ascissa se $R_u = 0$, coincide con l'ordinata se $R_u = \infty$. Il punto di intersezione tra la caratteristica esterna e la retta di carico individua il punto di lavoro del sistema formato dal generatore e dall'utilizzatore, ovvero la coppia di valori (I,V) che soddisfa il sistema elettrico complessivo.

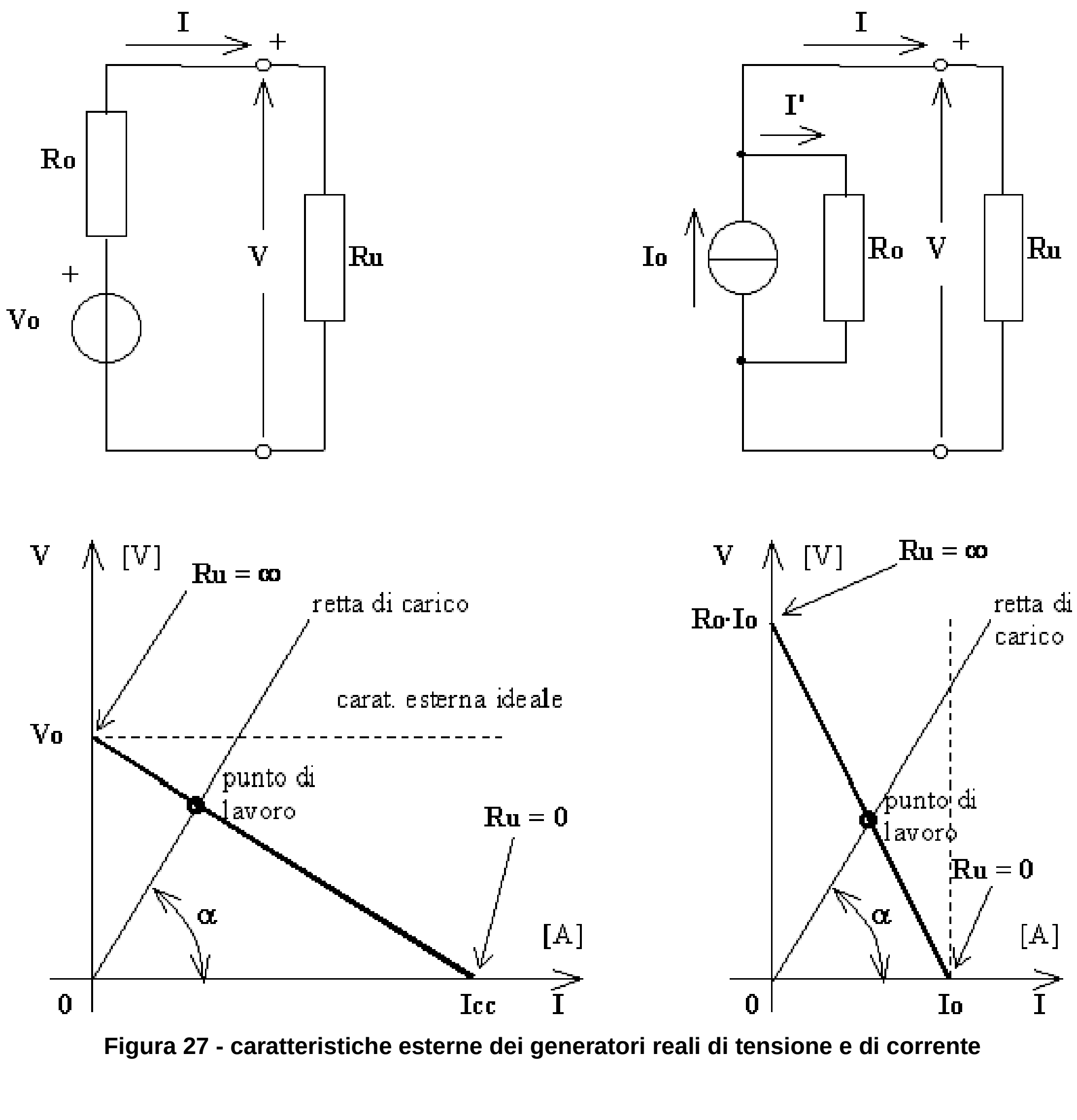


Figura 27 - caratteristiche esterne dei generatori reali di tensione e di corrente

2.17 Equivalenza tra il generatore reale di tensione ed il generatore di tensione

Il generatore reale di tensione ed il generatore reale di corrente sono due modelli dello stesso sistema elettrico, il generatore elettrico.
Le condizioni di equivalenza tra il generatore reale di tensione e il generatore reale di corrente si

determinano sottoponendo entrambi i generatori allo stesso carico e imponendo che la corrente I_C e la tensione V_C presenti sul carico siano uguali.

2.18 Generatori equivalenti di Thevenin e Norton

Nello studio delle reti elettriche affrontato fino ad ora diverse volte si è provveduto a sostituire parti di reti elettriche in altri bipoli o reti elettriche, come nelle seguenti trasformazioni:

- resistenza equivalente;
- da generatore reale di tensione a generatore reale di corrente;
- da generatore reale di corrente a generatore reale di tensione.

Tutte queste operazioni di trasformazione soddisfano il principio di equivalenza agli effetti esterni che ora enunciamo in modo esplicito e circostanziato.

2.18.1 Teorema di Thevenin

Il teorema di Thevenin risulta particolarmente adatto per determinare la corrente I_r che circola in un qualsiasi ramo (o la tensione V_r ai capi di esso) di una rete elettrica lineare. dato un qualunque circuito, a meno che non sia costituito da un singolo componente, è sempre possibile pensarlo come composto di almeno due parti o sottocircuiti componenti. A tale fine è sufficiente individuare nel circuito i due punti di connessine delle due parti: alcuni componenti del circuito si dovranno trovare alla loro sinistra, mentre gli altri si dovranno necessariamente trovare alla loro destra.

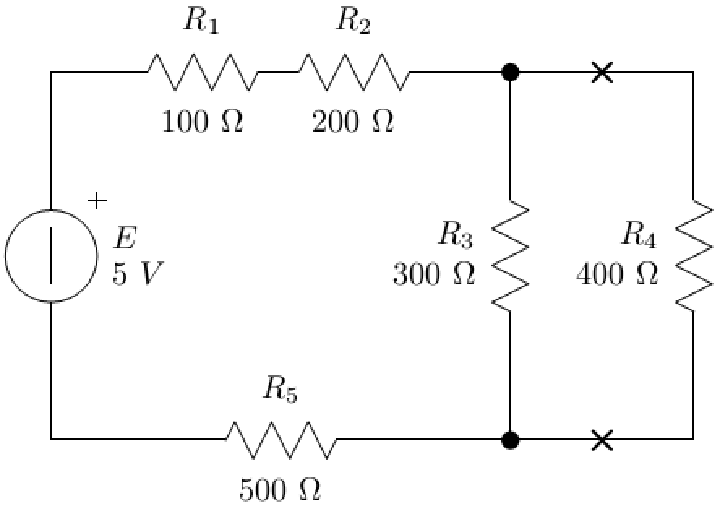


Figura 28 - Rete elettrica

A titolo esemplificativo, nella rete elettrica di figura 28 i punti di connessione sono stati presi ai capi della resistenza R_4. In questo modo il circuito è pensato come composto dal sottocircuito 1 di sinistra, comprensivo del generatore e delle resistenze: R_1, R_2, R_3, R_5 e dal sottocircuito 2 di destra, comprensivo della sola R_4. Avendo internamente un generatore, la prima sottorete è attiva, mentre la seconda è passiva.
Relativamente alle reti passive composte di sole resistenze, come la sottorete 2, sappiamo già che si comportano complessivamente come una unica resistenza, e che, quindi, è possibile semplificare ogni sottorete passiva, sostituendola con la sua resistenza complessiva.
Ci chiediamo allora: è possibile operare nello stesso modo, ovvero semplificare anche le sottoreti attive, come la sottorete 1?
La risposta a questa domanda è affermativa. Però, essendoci nella rete anche dei dispositivi attivi, essa non può essere ricondotta ad una sola resistenza, come le reti passive, ma in serie alla resistenza, ci deve essere anche un generatore che esprima l'effetto complessivo dei generatori

interni. L'assunto è stato dimostrato matematicamente e va sotto il nome di: teorema di Thevenin. L'enunciato del teorema è il seguente:

> *Teorema di Thevenin:* un qualunque sottocircuito bipolare e lineare è equivalente ad un circuito, denominato circuito equivalente, costituito da un generatore ideale equivalente di tensione e da una resistenza equivalente posta in serie ad esso.

Il concetto di equivalenza tra circuiti comporta il medesimo comportamento elettrico degli stessi in qualunque situazione di funzionamento, ovvero la medesima caratteristica elettrica e dunque implica la possibilità di semplificare una qualunque sottorete bipolare e lineare con la sua rete equivalente.
Per determinare la rete equivalente è necessario, secondo il teorema, determinare due parametri fondamentali:
la f.e.m. (E_{eq} = V_{ABo}) del generatore equivalente di tensione il valore ohmico della resistenza equivalente (R_{eq}). A tale riguardo Thevenin ha dimostrato anche che:

- la f.e.m. del generatore equivalente di tensione (E_{eq}) corrisponde alla tensione che presenta la sottorete ai propri morsetti di uscita nella prova di funzionamento a vuoto, quindi quando la sottorete stessa è staccata dal resto del circuito.

- la resistenza equivalente (R_{eq}) posta in serie al generatore corrisponde alla resistenza interna della sottorete, cioè alla resistenza che la sottorete presenta tra i propri morsetti di uscita, quando è staccata dal resto del circuito, e tutti i generatori indipendenti interni ad essa sono annullati.

- Per annullare i generatori di tensione bisogna sostituirli con un conduttore perfetto, ovvero con un corto circuito, mentre per annullare i generatori di corrente, essi vanno sostituiti con un isolante perfetto, ovvero lasciati aperti.

Il teorema di Thevenin è molto importante, oltre che per la semplificazione delle reti ed il calcolo di correnti e d.d.p., soprattutto perché ci consente di avere una visione astratta di una sottorete lineare, a prescindere dalla sua particolare composizione interna. Per quanto una scheda possa essere complessa, noi la possiamo immaginare come costituita da due elementi fondamentali: la sua f.e.m. equivalente e la sua resistenza equivalente. Tutto il suo comportamento, allora, dipenderà fondamentalmente dai valori assunti da tali elementi, ovvero da due semplici parametri. Per ottenerli basterà fare due singole prove, una delle quali è la prova di funzionamento a vuoto.
Per vedere concretamente come si fa, applichiamo il teorema al circuito del nostro esempio, procedendo per passi successivi.

1° passo: f.e.m. equivalente

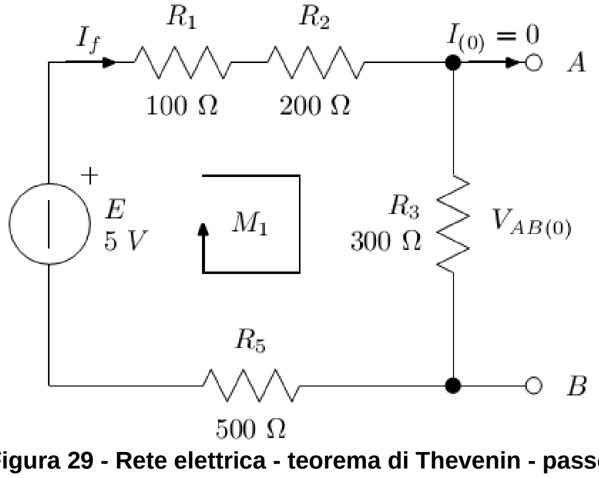


Figura 29 - Rete elettrica - teorema di Thevenin - passo 1

Stacchiamo la R_4 e calcoliamo la tensione che la sottorete presenta in uscita a vuoto. Tale d.d.p. corrisponde al valore della f.e.m. equivalente. Non essendoci corrente verso R_4, nella maglia circola una corrente fittizia che indichiamo con I_f. Scriviamo l'equazione della maglia e calcoliamo I_f e la d.d.p. in uscita a vuoto:

$$E = (R_1 + R_2 + R_3 + R_5) I_f$$

$$R_p = 1100\Omega$$

$$I_f = \frac{E}{R_p} = \frac{5}{1100} = 4.55mA$$

$$E_0 = V_{AB_{(0)}} = R_3 I_3 = 300 \cdot 0.00455 = 1.36V$$

2° passo: resistenza equivalente

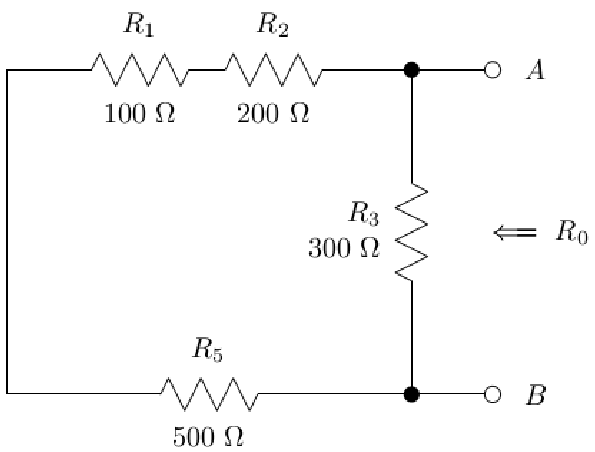


Figura 30 - Rete elettrica - teorema di Thevenin - passo 2

Stacchiamo la R_4 e annulliamo il generatore. Otteniamo il circuito passivo di figura, dove calcoliamo la resistenza complessiva. Notiamo che, rispetto ai morsetti della rete, R_1, R_2 ed R_5 risultano in serie, mentre R_3 è in parallelo.
Abbiamo quindi:

$$R = (R_1 + R_2 + R_5) \,||\, R_3 = \frac{800 \cdot 300}{1100} = 218\Omega$$

3° passo: circuito equivalente

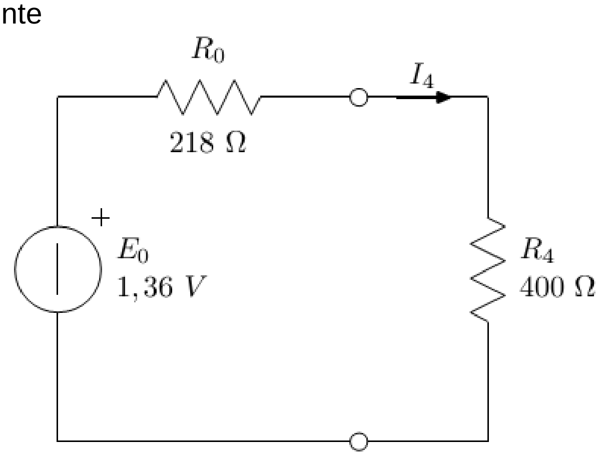


Figura 31 - Rete elettrica - teorema di Thevenin - passo 3

Ora semplifichiamo la nostra sottorete, sostituendola con il circuito equivalente ricavato. La $R_{4,}$ che prima avevamo staccato, ora la ricolleghiamo, ma al circuito equivalente. Partendo dall'equazione della maglia, calcoliamo la corrente I_4 e la d.d.p. che si sviluppa su R_4

$$E_0 = (R_0 + R_4) \cdot I_4$$
$$I_4 = \frac{E_0}{R_0 + R_4} = \frac{1.36}{618} = 2.2mA$$
$$V_4 = R_4 \cdot I_4 = 400 \cdot 0.0022 = 0.88V$$

2.18.2 Teorema di Norton

Procedendo in modo analogo a quanto detto per il teorema di Thevenin, l'enunciato del teorema di Norton è il seguente:

> Teorema di Norton: un qualunque sottocircuito bipolare e lineare è equivalente ad un circuito, denominato circuito equivalente, costituito da un generatore ideale equivalente di corrente e da una resistenza equivalente posta in parallelo ad esso.

Per determinare la rete equivalente è necessario, secondo il teorema, determinare due parametri fondamentali: la corrente (I_{eq} = I_{ABcc}) del generatore equivalente di corrente, ed il valore ohmico della resistenza equivalente (R_{eq}).
A tale riguardo Norton ha dimostrato anche che:

- la corrente (I_{eq}) del generatore equivalente di corrente corrisponde alla corrente che circolerebbe tra i morsetti di uscita A e B qualora essi fossero cortocircuitati (I_{ABcc}), cioè nella prova di funzionamento in corto circuito, quindi quando la sottorete stessa è cortocircuitata.

- la resistenza equivalente (R_{eq}) posta in parallelo al generatore corrisponde alla resistenza interna della sottorete, cioè alla resistenza che la sottorete presenta tra i propri morsetti di uscita A e B, quando è staccata dal resto del circuito, e tutti i generatori indipendenti interni ad essa sono annullati.

- Per annullare i generatori di tensione bisogna sostituirli con un conduttore perfetto, ovvero con un corto circuito, mentre per annullare i generatori di corrente, essi vanno sostituiti con un isolante perfetto, ovvero lasciati aperti.

I teoremi di Thevenin e Norton si dicono duali, poiché uno si può ottenere dall'altro scambiando il termine «serie» con «parallelo», «tensione» con «corrente», morsetti «aperti» con morsetti in «cortocircuito».
Applicando il teorema di Norton è possibile convertire un generatore reale di tensione in uno di corrente; viceversa, applicando il teorema di Thevenin è possibile convertire un generatore reale di corrente in uno di tensione, come mostrato in figura 32.

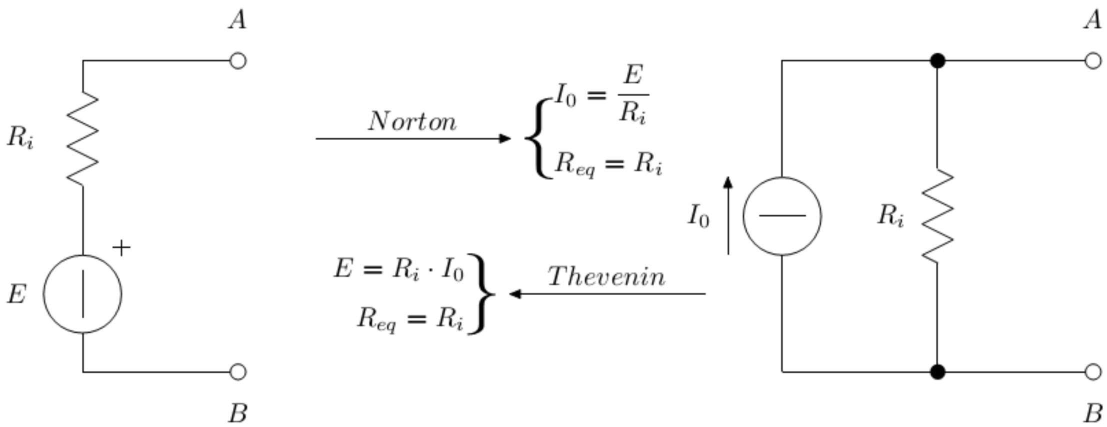


Figura 32 - Equivalenza tra circuito equivalente di Thevenin e circuito equivalente di Norton

2.19 Reti elettriche con più maglie

E’ evidente che una rete elettrica dotata di più maglie, come ad esempio quella riportata in figura 33, è sicuramente dotata di due o più nodi e di tre o più rami. La risoluzione di una rete elettrica consiste nella determinazione delle correnti circolanti in ciascun ramo.
Dal valore assunto da ciascuna corrente di ramo si risale facilmente alle tensioni applicate a ciascun bipolo applicando le equazioni caratteristiche di ciascuno bipolo, come ad esempio la legge di Ohm.
In realtà non sempre è richiesta la soluzione completa della rete elettrica, a volte è richiesta la determinazione della corrente in un solo ramo o della tensione ai capi di un certo bipolo. In tale caso si parla di risoluzione parziale della rete elettrica. Una rete elettrica è lineare quando tutti i bipoli elettrici che la compongono sono lineari.
L’ipotesi di linearità permette di applicare per la soluzione completa o parziale di una rete elettrica una serie di metodi e di teoremi che facilitano notevolmente il compito. Si è già visto che quando vi è presente un solo generatore si è in grado di risolvere completamente la rete elettrica applicando quello che può essere definito il metodo della resistenza equivalente.
Ma quando i generatori sono più di uno il metodo precedente non è più applicabile. In questo caso è necessario ricorrere a metodi di soluzione completa più sistematici.

2.20 Metodo di Kirchhoff

Il primo e il secondo principio di Kirchhoff vengono utilizzati per risolvere le reti, ossia per calcolare l’intensità di corrente nei singoli rami di esse, quando siano assegnati i valori delle f.e.m. agenti e di tutte le resistenze.
La soluzione di una rete mediante applicazione dei principi di Kirchhoff richiede l’impostazione di un sistema di tante equazioni indipendenti quante sono le correnti incognite, ossia quanti sono i rami, se sono noti i valori delle f.e.m. e delle resistenze. Le equazioni vengono scritte in parte ai nodi (primo principio) e in parte alle maglie (secondo principio).
Il numero delle equazioni indipendenti che è possibile scrivere ai nodi è $(n - 1)$, se n è il numero dei nodi della rete.
Il numero delle equazioni indipendenti che occorre scrivere per le maglie è pari al numero totale delle incognite (ossia al numero dei rami), diminuito del numero $(n - 1)$ di equazioni indipendenti che è possibile scrivere ai nodi. Pertanto, detto r il numero dei rami, n il numero dei nodi, m il numero delle maglie indipendenti, il numero di equazioni che bisogna scrivere per queste ultime è:

$$m = r - (n - 1) = r - n + 1$$

Per quanto riguarda l’individuazione delle maglie indipendenti, si può affermare che una maglia è indipendente se comprende almeno un ramo che non sia stato già percorso per scrivere un’equazione precedente (metodo alternativo: una maglia è indipendente quando non risulta da

nessuna composizione delle maglie indipendenti già scelte).
.
Esempio 1
Come primo esempio consideriamo lo schema di figura 33, dove supponiamo:
$E_1 = 10$ V; $E_2 = 4$ V; $R_1 = 100\ \Omega$; $R_2 = 150\ \Omega$; $R_3 = 200\ \Omega$;

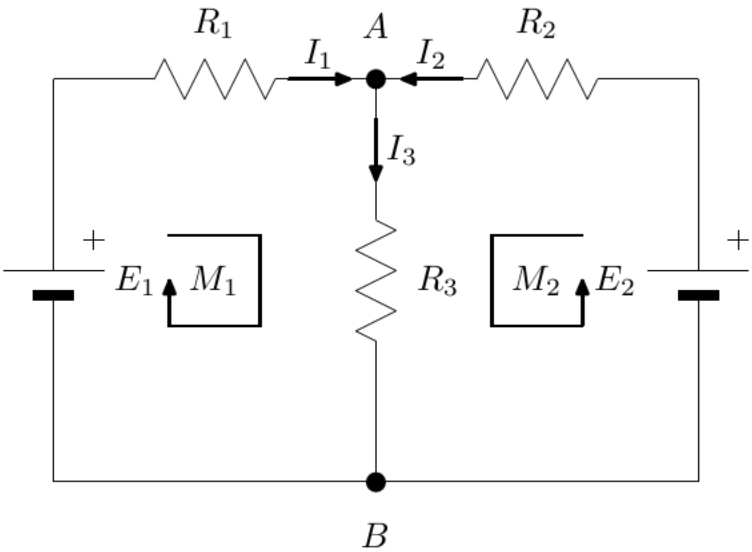


Figura 33 - rete elettrica dell'esempio 1

La rete è costituita da: tre maglie, tre rami e due nodi. Risolviamo dapprima applicando i principi di Kirchhoff. A tale scopo fissiamo le correnti nel circuito: essendoci più rami dobbiamo fissare tante correnti quanti sono i rami.
Ricordiamo: gli elementi di ciascun ramo vanno considerati in serie e sono attraversati dalla stessa intensità di corrente.
Per fissare le correnti nei rami dobbiamo fare due cose: stabilire il nome ed il verso delle correnti. Entrambe queste scelte sono convenzionali, cioè devono essere stabilite a priori, anche se non si è in grado di prevedere, ad esempio, quale sarà il verso effettivo della corrente.
Possiamo già applicare il 1° principio di Kirchhoff ai nodi, cominciando dal nodo A:
somma delle correnti entranti nel nodo = somma delle correnti uscenti dal nodo.

$$I_1 + I_2 = I_3$$

Abbiamo ottenuto una equazione (equazione ai nodi) che stabilisce un primo legame tra le correnti. Chiediamoci: quante equazioni ci servono per trovare le correnti? Essendoci tre correnti, abbiamo tre incognite, quindi ci servono tre equazioni. Il primo impulso è quello di andare a scriverci una seconda equazione nel nodo B, ma ci accorgiamo che si ottiene la medesima equazione di prima! Infatti quello che è successo nel primo nodo, succede esattamente al contrario nel secondo.
Le altre due equazioni che ci servono le dobbiamo cercare nelle maglie: abbiamo tre maglie a disposizione e per ciascuna di esse possiamo scrivere una equazione in base al 2° principio di Kirchhoff. Ne scegliamo due, però, prima di scrivere le equazioni, dobbiamo fissare i versi di percorrenza delle maglie e li fissiamo come in figura 33.
Ora possiamo scrivere le equazioni:
la somma algebrica delle f.e.m. = alla somma algebrica delle d.d.p. degli elementi passivi della maglia.
Nello scrivere le equazioni dobbiamo tener conto anche delle convenzioni relative alle f.e.m. ed alle d.d.p. : le prime le prendiamo positive se contribuiscono alla corrente di maglia e le seconde le scriviamo come prodotti R · I , presi positivi se le rispettive correnti delle resistenze sono concordi con la corrente di maglia. Attenzione quindi: il verso della corrente di maglia gioca un ruolo molto importante. Nel nostro caso tutto è concorde, quindi le equazioni sono le seguenti:

$$M_1\!: E_1 = +R_1 \cdot I_1 + R_3 \cdot I_3$$

M_2: $E_2 = +R_2 \cdot I_2 + R_3 \cdot I_3$

Notiamo che l'equazione della terza maglia, quella grande, non serve; infatti essa può essere ottenuta dalla somma algebrica delle prime due equazioni. Mettiamo assieme le nostre equazioni e otteniamo un sistema di 3 equazioni nelle 3 incognite rappresentate dalle correnti:

$$\begin{cases} I_3 = I_1 + I_2 \\ E_1 = R_1 \cdot I_1 + R_3 \cdot I_3 \\ E_2 = R_2 \cdot I_2 + R_3 \cdot I_3 \end{cases}$$

Passiamo adesso al calcolo delle correnti. A tale scopo dobbiamo sostituire i valori dei componenti nelle equazioni e risolvere il sistema.

1° passaggio
sostituiamo i valori

$$\begin{cases} I_3 = I_1 + I_2 \\ 10 = 100 \cdot I_1 + 200 \cdot I_3 \\ 4 = 150 \cdot I_2 + 200 \cdot I_3 \end{cases}$$

2° passaggio
prima sostituzione;
Nella 1ª equazione abbiamo una espressione per I_3 e la sostituiamo ovunque vediamo I_3, nelle altre equazioni.

$$\begin{cases} I_3 = I_1 + I_2 \\ 10 = 100 \cdot I_1 + 200 \cdot (I_1 + I_2) \\ 4 = 150 \cdot I_2 + 200 \cdot (I_1 + I_2) \end{cases}$$

3° passaggio
riduzione dei termini simili;
ora la seconda e la terza equazione contengono solo I_1 e I_2

$$\begin{cases} I_3 = I_1 + I_2 \\ 10 = 300 \cdot I_1 + 200 \cdot I_2 \\ 4 = 200 \cdot I_1 + 350 \cdot I_2 \end{cases}$$

4° passaggio
isoliamo un'incognita;
isoliamo il termine con I_2 nella 2ª equazione

$$\begin{cases} I_3 = I_1 + I_2 \\ I_2 = \dfrac{10 - 300 \cdot I_1}{200} \\ 4 = 200 \cdot I_1 + 350 \cdot I_2 \end{cases}$$

5° passaggio
seconda sostituzione;
ricaviamo I_2 nella seconda equazione facendo la divisione e la sostituiamo nella terza

$$\begin{cases} I_3 = I_1 + I_2 \\ I_2 = 0.05 - 1.5 \cdot I_1 \\ 4 = 200 \cdot I_1 + 350 \cdot I_2 \end{cases}$$

6° passaggio
troviamo I_1;
ora l'ultima equazione ha una sola incognita e la ricaviamo

$$4 = 200 \cdot I_1 - 525 \cdot I_1 + 17.5$$

$$325 \cdot I_1 = 13.5$$

$$I_1 = \frac{13.5}{325} = 0.0415A = 41.5mA$$

7° passaggio
troviamo I_2 e I_3 sostituendo il valore trovato

$$\begin{cases} I_3 = 0.0415 - 0.0122 = 0.0293A = 29.3mA \\ I_2 = 0.05 - 1.5 \cdot 0.0415A = -0.0122A = -12.2mA \\ I_1 = 0.0415A = 41,5mA \end{cases}$$

Osserviamo che il valore di I_2 è negativo. Ciò significa che il verso che abbiamo scelto convenzionalmente per I_2 non è quello reale della corrente, ma non c'è niente di sbagliato.

Dobbiamo entrare nell'ordine di idee che i risultati possono essere sia positivi che negativi e che entrambi vanno accettati. Essi sono consistenti con le convenzioni che abbiamo fissato all'inizio. Se qualcun altro ha fissato le convenzioni in modo diametralmente opposto, allora troverà gli stessi risultati in valore assoluto, ma con il segno cambiato.

Calcolo della V_{AB}
Per verificare la correttezza del risultato determiniamo la V_{AB} con la legge di Ohm generalizzata nei tre rami e confrontiamo i risultati.

1° ramo:
$V_{AB} = -R_1 \cdot I_1 + E_1 = -100 \cdot 0,0415 + 10 = 5,85$ V

2° ramo:
$V_{AB} = R_3 \cdot I_3 = 200 \cdot 0,0293 = 5,86$ V

3° ramo:
$V_{AB} = -R_2 \cdot I_2 + E_2 = -150 \cdot (-0,0122) + 4 = 5,83$ V

OK. I tre valori corrispondono entro le approssimazioni introdotte.

Esempio 2
Come secondo esempio consideriamo lo schema di figura, con i dati riportati a lato:
E1 = 12 V; E2 = 8 V; R1 = 40 Ω; R2 = 60 Ω; R3 = 30 Ω; R4 = 50 Ω;

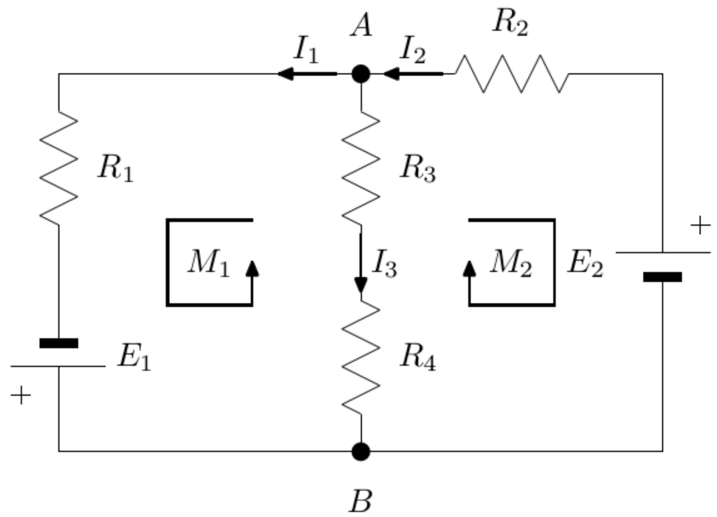


Figura 34 - elettrica dell'esempio 1

- Fissiamo le correnti I_1 ed I_3 uscenti dal nodo A e la corrente I_2 entrante nel nodo A.
- Fissiamo i versi di percorrenza delle maglie come in figura.
- Applichiamo i principi di Kirchhoff; facciamo attenzione che nella prima maglia il verso di I_3 è contrario al verso di percorrenza di M_1

$$N_A : I_2 = I_1 + I_3$$

$$M_1 : E_1 = +R_1 \cdot I_1 - (R_3 + R_4) \cdot I_3$$

$$M_2 : E_2 = +R_2 \cdot I_2 + (R_3 + R_4) \cdot I_3$$

Risolviamo il sistema calcolando le correnti. Si lascia allo studente il compito di svolgere i passaggi matematici richiesti e si d`a direttamente il risultato:

$$\begin{cases} I_3 = 0.0415 - 0.0122 = 0.0293A = 29.3mA \\ I_2 = 0.05 - 1.5 \cdot 0.0415A = -0.0122A = -12.2mA \\ I_1 = 0.0415A = 41{,}5mA \end{cases}$$

Osserviamo che il valore di I_3 è negativo. Significa che il verso che abbiamo scelto convenzionalmente per I_3 non è quello reale della corrente.

• Calcolo della V_{AB}
Per verificare la correttezza del risultato determiniamo la V_{AB} con la legge di Ohm generalizzata nei tre rami e confrontiamo i risultati.

1° ramo:
$V_{AB} = R_1 \cdot I_1 - E_1 = 40 \cdot 0,223 - 12 = -3,08$ V

2° ramo: $V_{AB} = R_3 \cdot I_3 + R_4 \cdot I_4 = 80 \cdot (-0,0385) = -3,08$ V

3° ramo:
$V_{AB} = -R_2 \cdot I_2 + E_2 = -60 \cdot 0,185 + 8 = -3,01$ V

I tre valori corrispondono entro le approssimazioni introdotte, quindi il risultato è accettabile.

In sintesi, i passi per risolvere con il metodo di Kirchhoff una rete elettrica con r rami e dunque r incognite, sono:

1. Assegnazione dei versi alle correnti di ciascun ramo.
2. Scrittura di n - 1 equazioni di nodo.
3. Scelta di m = r - (n - 1) maglie indipendenti e del loro verso di percorrenza.
4. Scrittura di m = r - (n - 1) equazioni di maglia.
5. Risoluzione del sistema di r equazioni.
6. Interpretazione dei segni delle correnti convenzionali ottenute per stabilire il verso effettivo delle correnti.