

CAMPO MAGNETICO E CORRENTI

8.1 INTRODUZIONE

Nel capitolo precedente ci siamo occupati principalmente della forza esercitata da un campo magnetico su una carica in moto o su un conduttore percorso da corrente. Ora prendiamo in considerazione le sorgenti, cioè le cause, dei campi magnetici.

Tutti conosciamo le forze che i magneti esercitano l'uno sull'altro; ma una calamita può esercitare una forza magnetica anche su un conduttore percorso da corrente e su una carica in moto. Per esempio, il fascio di elettroni del cinescopio di un televisore può essere deflesso avvicinando un magnete allo schermo. (Ma non è consigliabile fare questo esperimento con un magnete potente!) Il magnete è la sorgente del campo magnetico che deflette il fascio di elettroni.

In questo capitolo analizzeremo in modo particolare il caso in cui la sorgente del campo magnetico è una corrente elettrica. Oersted scoprì nel 1819 che un ago di bussola posto in prossimità di un filo conduttore veniva deviato quando il filo era percorso da corrente. La corrente era la sorgente del campo magnetico che esercitava un momento sull'ago della bussola.

L'osservazione di Oersted mise in luce per la prima volta una connessione tra elettricità e magnetismo, che fino ad allora erano stati considerati privi di relazioni. Ulteriori connessioni tra questi campi saranno messe in luce nei prossimi capitoli. Cominciamo a studiare il campo magnetico prodotto da una distribuzione stazionaria di corrente elettrica.

8.2 LA LEGGE DI BIOT E SAVART

Immediatamente dopo la scoperta di Oersted che una corrente elettrica è sorgente di un campo magnetico, esperimenti condotti da A.M. Ampère (1775-1836), da J.B. Biot (1774-1862) e F. Savart (1791-1841) portarono a quella che oggi è nota come *legge di Biot e Savart* o anche come *la legge elementare di Laplace*. Tale legge determina, in un punto dello spazio, il campo di induzione magnetica generato da una distribuzione di correnti elettriche.

La legge di Biot e Savart è, per certi versi, analoga alla legge di Coulomb per l'elettrostatica, anche se tra le due vi sono notevoli differenze che vedremo meglio più avanti in questo paragrafo. La legge di Coulomb, unita alla definizione di campo elettrico, fornisce il campo elettrico prodotto da una distribuzione di carica. Se dq è un elemento infinitesimo di carica, il campo elettrico $d\mathbf{E}$ prodotto in un punto P da tale carica è dato dall'Equazione (1.6):

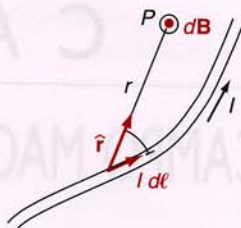
$$d\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

dove r è la distanza dell'elemento di carica dal punto P e $\hat{\mathbf{r}}$ è il versore diretto dalla carica al punto P . Integrando sulla distribuzione di carica si ottiene il campo elettrico nel punto P , $\mathbf{E} = \int d\mathbf{E}$.

Consideriamo ora una distribuzione di corrente come quella rappresentata nella Figura 8.1. Un elemento di corrente $I d\ell$ produce un contributo $d\mathbf{B}$ al campo di indu-

Figura 8.1

Un elemento di corrente $I d\ell$ produce un contributo $d\mathbf{B}$ al campo di induzione magnetica nel punto P . Se $I d\ell$ e $\hat{\mathbf{r}}$ giacciono nel piano della figura, $d\mathbf{B}$ è perpendicolare al piano e, in questo caso, uscente da esso.



zione magnetica in un punto P . Se r rappresenta la distanza dell'elemento di corrente dal punto P , e il versore $\hat{\mathbf{r}}$ è diretto dall'elemento di corrente al punto P , la legge di Biot e Savart per un elemento infinitesimo di corrente è

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\ell \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2} \quad (8.1)$$

La direzione di $d\mathbf{B}$ è data dalla direzione del prodotto vettoriale $I d\ell \times \hat{\mathbf{r}}$ ed è perpendicolare all'elemento di corrente $I d\ell$ e al versore $\hat{\mathbf{r}}$, mentre il verso è dato dalla regola della mano destra.

Cioè, il pollice della mano destra disteso indica la direzione di $d\mathbf{B}$ se le altre dita si avvolgono nel senso di rotazione che porta la direzione di $I d\ell$ a coincidere con quella di $\hat{\mathbf{r}}$. Il modulo di $d\mathbf{B}$ è

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\ell \sin \theta}{r^2} \quad (8.2)$$

dove θ è l'angolo compreso tra le direzioni di $I d\ell$ e $\hat{\mathbf{r}}$. La costante μ_0 è chiamata *permeabilità magnetica* del vuoto ed è analoga a ϵ_0 , la costante dielettrica del vuoto nell'elettrostatica.

A causa delle connessioni che sussistono tra elettricità e magnetismo, i valori di ϵ_0 e μ_0 non sono indipendenti. Vedremo (Capitolo 14) che tali costanti sono legate alla velocità c delle onde elettromagnetiche nel vuoto dalla relazione $c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$. Nel SI l'unità di misura della velocità è data per cui il valore di c deve essere dedotto da misure sperimentali, il valore di μ_0 è implicitamente assegnato nella definizione dell'unità di misura della corrente elettrica per cui il valore di ϵ_0 , che abbiamo già utilizzato nei capitoli precedenti, è ricavato come $\epsilon_0 = 1/(\mu_0 c^2)$.

Il valore di μ_0 in unità SI risulta quindi, esattamente pari a $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ T m A}^{-1}$ (vedi Paragrafo 8.5), ovvero, poiché spesso ricorre il fattore $\mu_0/4\pi$,

$$\frac{\mu_0}{4\pi} = 1 \times 10^{-7} \text{ T m A}^{-1} \quad (\text{esattamente})$$

Le proprietà magnetiche dell'aria sono talmente simili a quelle del vuoto che, anche quando è presente l'aria, si può usare la permeabilità μ_0 del vuoto.

Vi sono alcune analogie tra la legge di Biot e Savart per il campo magnetico e la corrispondente legge di Coulomb per il campo elettrico.

1. Entrambe contengono la dipendenza $1/r^2$ dall'inverso del quadrato della distanza dalla sorgente puntiforme, che è $I d\ell$ per $d\mathbf{B}$ e dq per $d\mathbf{E}$.
2. La costante $1/4\pi\epsilon_0$ determina l'intensità dell'interazione elettrica, e la costante $\mu_0/4\pi$ determina l'intensità dell'interazione magnetica.

Ma ci sono anche alcune importanti differenze tra le due leggi.

1. La direzione di $d\mathbf{E}$ è radiale rispetto alla carica dq , mentre la direzione di $d\mathbf{B}$ è perpendicolare al piano che contiene $I d\ell$ e $\hat{\mathbf{r}}$.
2. Mentre la più semplice distribuzione di carica è una carica puntiforme isolata, un elemento di corrente isolato non esiste per una corrente stazionaria. La carica deve entrare nell'elemento da un'estremità e uscirne dall'altra estremità, e l'Equazio-

**Legge di Biot e Savart o
Prima legge elementare di
Laplace.**

**La permeabilità magnetica
del vuoto, μ_0 .**

**Analogie tra la legge di
Coulomb e la legge di Biot
e Savart.**

**Differenze tra la legge di
Coulomb e la legge di Biot
e Savart.**

ne (8.1) deve sempre essere integrata lungo la linea (o le linee) della distribuzione di corrente. Quindi nel punto P il campo magnetico dovuto a una distribuzione di corrente è dato dalla forma integrale della legge di Biot e Savart:

$$\mathbf{B} = \int \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\boldsymbol{\ell} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2} \quad (8.3)$$

dove l'integrale di linea è esteso all'intera distribuzione di corrente. Vale a dire che il campo magnetico in un punto è la sovrapposizione lineare dei contributi vettoriali dovuti a ciascuno degli elementi infinitesimi di corrente.

Campo magnetico di un lungo filo rettilineo percorso da corrente. Per illustrare l'uso delle Equazioni (8.1) e (8.3), determiniamo il campo magnetico prodotto da una corrente stazionaria di intensità I che percorre un lungo filo rettilineo. Salvo esplicito avviso contrario, ammetteremo che i fili percorsi da corrente abbiano spessore trascurabile, così da poter essere rappresentati da linee.

In Figura 8.2 è rappresentato un generico elemento di corrente $I d\boldsymbol{\ell}$ mentre il punto P si trova a una distanza R dal filo. Il contributo $d\mathbf{B}$ al campo di induzione magnetica in tale punto è dato dall'Equazione (8.1).

Applicando la regola della mano destra al prodotto vettoriale si vede che la direzione di $d\mathbf{B}$ è perpendicolare al piano della figura e uscente da esso. L'intensità dB è data dall'Equazione (8.2), con $r^2 = x^2 + R^2$ e $I d\boldsymbol{\ell} = I dx$. Quindi

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dx \sin \theta}{x^2 + R^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{IR dx}{(x^2 + R^2)^{3/2}}$$

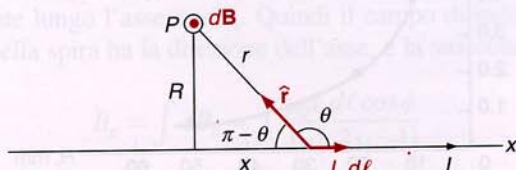
dove si è fatto uso della relazione (vedi Figura 8.2) $\sin \theta = \sin(\pi - \theta) = R/(x^2 + R^2)^{1/2}$.

La legge di Biot e Savart in forma integrale, Equazione (8.3), contiene l'integrale di un vettore. Quando si integra un vettore si deve prestare una particolare attenzione alla direzione. In questo caso l'integrale comporta la somma dei contributi $d\mathbf{B}$ relativi a ciascun elemento di corrente lungo l'asse x . Per ogni posizione, come quella indicata in Figura 8.2, la direzione di $d\mathbf{B}$ è perpendicolare al piano della pagina e uscente da esso. L'integrale rappresenta la somma di questi contributi infinitesimali, tutti con la stessa direzione. Pertanto anche la somma ha quella direzione, e il suo modulo è la somma o integrale dei moduli dB dei contributi. Quindi la direzione di $\mathbf{B}$ nel punto P è perpendicolare al piano della pagina e uscente da esso, e l'intensità è data da

$$B = \int dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{IR}{(x^2 + R^2)^{3/2}} dx$$

Dai limiti di integrazione adottati si desume che stiamo prendendo in considerazione il caso ideale di un filo di lunghezza infinita. Questo integrale può essere rintracciato nelle tabelle; in alternativa può essere calcolato ricorrendo alla sostituzione $x = R \cot(\pi - \theta)$, come suggerisce la Figura 8.2. Il risultato è

$$B = \frac{\mu_0 IR}{4\pi} \left[\frac{x}{R^2(x^2 + R^2)^{1/2}} \right]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\mu_0 IR}{4\pi R^2} \frac{2}{1}$$



Forma integrale della legge di Biot e Savart.

Campo magnetico di un lungo filo rettilineo percorso da corrente.

Figura 8.2

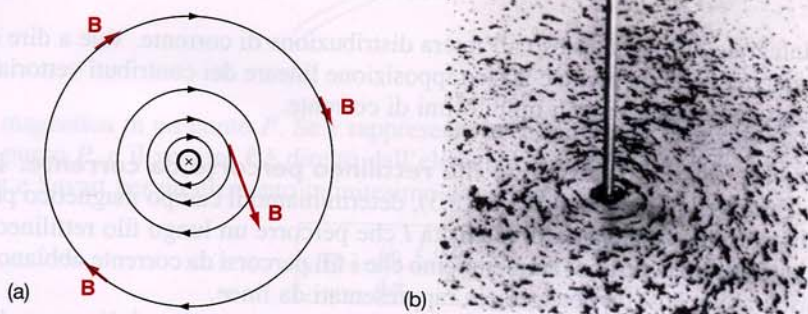
Un lungo filo rettilineo percorso da una corrente di intensità I . L'elemento di corrente $I d\boldsymbol{\ell}$ fornisce un contributo $d\mathbf{B}$ al campo di induzione magnetica nel punto P . La direzione di $d\mathbf{B}$ è uscente dal piano della figura.

Figura 8.3

(a) Il campo magnetico di un lungo filo rettilineo percorso da una corrente entrante nel piano della pagina è rappresentato da linee di forza continue.

L'intensità del campo diminuisce all'aumentare della distanza dal filo. (b) La limatura di ferro visualizza l'andamento del campo magnetico di un filo percorso da corrente.

(Fundamental Photographs)



Semplificando si ottiene l'intensità del campo di induzione magnetica a una distanza R da un lungo filo rettilineo percorso da una corrente I :

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \quad (8.4)$$

La direzione del campo in un punto è perpendicolare al piano che contiene il filo e il punto, in accordo con la *regola della mano destra*:

Se si afferra il filo con la mano destra in modo che il pollice disteso sia rivolto nel senso della corrente, le altre dita piegate indicano il senso del campo.

La Figura 8.3a mostra le linee di forza che rappresentano il campo magnetico in un piano perpendicolare al filo. Queste linee sono circolari e chiuse su se stesse. Le si confronti con la disposizione della limatura di ferro in prossimità di un filo percorso da corrente (Figura 8.3b).

■ Esempio 8.1

Un lungo filo rettilineo è percorso da una corrente di 20 A. Determinare l'intensità del campo di induzione magnetica in punti distanti 10, 20 e 50 mm dal filo e costruire un grafico di B in funzione della distanza R dal filo.

Soluzione

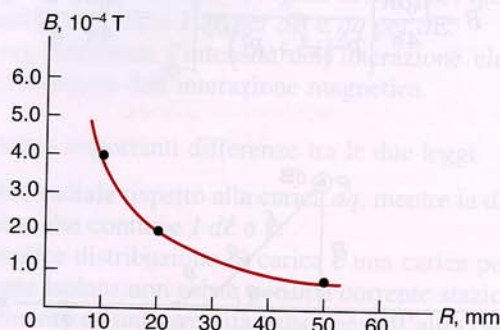
L'intensità del campo è data dall'Equazione (8.4). Per $R = 10$ mm, il campo (tenendo presente che $\mu_0/2\pi = 2 \times 10^{-7} \text{ T m A}^{-1}$) ha intensità

$$B = \frac{(2 \times 10^{-7} \text{ T m A}^{-1})(20 \text{ A})}{0.01 \text{ m}} = 4 \times 10^{-4} \text{ T}$$

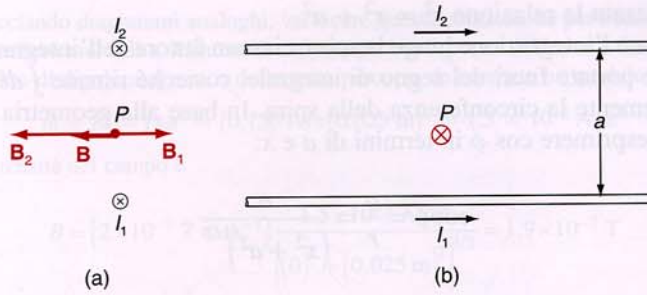
Poiché B è inversamente proporzionale a R , l'intensità del campo a 20 mm dal filo è la metà di quella a 10 mm dal filo, ossia $B = 2 \times 10^{-4} \text{ T}$. Analogamente, a 50 mm dal filo $B = 0.8 \times 10^{-4} \text{ T}$. Questi valori sono riportati nel grafico di Figura 8.4, che illustra la dipendenza di B da R .

Figura 8.4

Esempio 8.1.



La direzione di $\mathbf{B}$ è data dalla regola della mano destra.

**Figura 8.5**

Esempio 8.2: Il campo di induzione magnetica nel punto P è la somma dei contributi dovuti alle due correnti. (a) Veduta frontale. (b) Veduta laterale.

■ Esempio 8.2

Due lunghi fili rettilinei che corrono paralleli a 240 mm di distanza sono percorsi dalle correnti $I_1 = 20.0$ A e $I_2 = 30.0$ A. Le correnti hanno il medesimo senso, come mostra la Figura 8.5. La legge di Biot e Savart implica che il campo di induzione magnetica generato da diverse correnti sia la somma dei campi che sarebbero prodotti separatamente da ciascuna corrente; tale conclusione è confermata dagli esperimenti. Determinare il campo di induzione magnetica nel piano dei due fili in un punto P equidistante da essi.

Soluzione

Il campo di induzione magnetica in un punto è la somma vettoriale del campo B_1 generato dalla corrente I_1 e del campo B_2 generato dalla corrente I_2 . Le intensità dei due campi sono date dall'Equazione (8.4):

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi R_1} \quad B_2 = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi R_2}$$

Le direzioni dei due campi, rappresentate nella Figura 8.5a, sono determinate dalla regola della mano destra. Nel punto P i due contributi hanno direzioni opposte. La somma vettoriale $B = B_1 + B_2$ ha la direzione di B_2 , il contributo di modulo maggiore, e l'intensità della somma è data da

$$B = B_2 - B_1 = \frac{\mu_0}{2\pi} \left(\frac{I_2}{R_2} - \frac{I_1}{R_1} \right) = (2 \times 10^{-7} \text{ T m A}^{-1}) \left(\frac{30.0 \text{ A}}{0.12 \text{ m}} - \frac{20.0 \text{ A}}{0.12 \text{ m}} \right) = 1.7 \times 10^{-5} \text{ T}$$

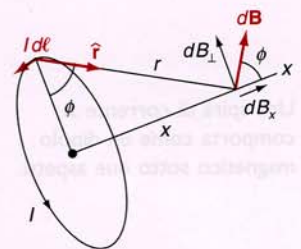
Supponiamo che il senso di I_2 sia opposto al senso di I_1 ; mostrare che, nel punto P , $B = 8.3 \times 10^{-5}$ T.

Campo magnetico sull'asse di una spira percorsa da corrente. Come ulteriore applicazione della legge di Biot e Savart, consideriamo il campo magnetico prodotto da una spira circolare di raggio a percorsa da una corrente di intensità I . Ci limiteremo a calcolare il campo nei punti dell'asse della spira. Ciascuno di tali punti è equidistante dai punti della spira. Nella Figura 8.6 l'asse della spira è stato scelto come asse x e $I d\ell$ è un generico elemento di corrente. Il relativo contributo dB al campo in un punto dell'asse è dato dall'Equazione (8.1) ed è rappresentato in figura. Per qualunque punto della spira, l'elemento di corrente $I d\ell$ e il vettore $\hat{r}$ sono perpendicolari. Il modulo del contributo al campo è ($\theta = 90^\circ$ e $\sin \theta = 1$ nell'Equazione 8.2)

$$dB = \frac{\mu_0 I d\ell}{4\pi r^2}$$

Il modulo di dB è lo stesso per ogni elemento di corrente della spira, ma la direzione dei vari contributi è diversa. Scomponiamo dB nelle componenti $dB_x = dB \cos \phi$, lungo l'asse della spira, e $dB_\perp = dB \sin \phi$, perpendicolare all'asse. Per ragioni di simmetria, l'integrale esteso alla spira della componente perpendicolare $dB_\perp$ è nullo. Basterà allora integrare la componente lungo l'asse x , dB_x . Quindi il campo di induzione magnetica in un punto dell'asse della spira ha la direzione dell'asse, e la sua componente è

$$B_x = \int dB_x = \int \frac{\mu_0 I d\ell \cos \phi}{4\pi (x^2 + a^2)}$$

**Figura 8.6**

Un elemento di corrente di una spira circolare produce un contributo dB al campo di induzione magnetica in un punto dell'asse della spira. I vettori $I d\ell$ e $\hat{r}$ sono perpendicolari.