Risoluzione delle equazioni di terzo grado

$$y^3 - ay^2 + by - c = 0, \qquad a, b, c \in \mathbb{C}. \tag{1}$$

Ricordiamo innanzitutto la formula

$$\cos^3 \alpha - \frac{3}{4} \cos \alpha = \frac{1}{4} \cos(3\alpha), \tag{2}$$

che si verifica facilmente elevando al cubo $\cos \alpha = \frac{e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}}{2}$. Ridefinendo $z := y - \frac{a}{3}$, l'equazione (1) diventa

$$z^3 - \left(\frac{a^2}{3} - b\right) z + \frac{ab}{3} - \frac{2a^3}{27} - c = 0.$$

Se $b = \frac{a^2}{3}$ allora z è una delle 3 soluzioni di $z^3 = c - \frac{ab}{3} + \frac{2a^3}{27}$, cioè una delle tre radici cubiche del secondo membro. In caso contrario, cercando z nella forma $z = d \cos \alpha$ quest'ultima diventa

$$d^3 \left[\cos^3 \alpha + \frac{1}{d^2} \left(b - \frac{a^2}{3}\right) \cos \alpha\right] = c + \frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3}; \tag{3}$$

poi impongo

$$\frac{1}{d^2} \left(b - \frac{a^2}{3}\right) = -\frac{3}{4} \qquad \Rightarrow \qquad d = \pm \frac{2}{3} \left(a^2 - 3b\right)^{\frac{1}{2}} \tag{4}$$

in modo che, grazie a (2), la (3) diventi

$$\cos(3\alpha) = s := \frac{4}{d^3} \left[c + \frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3}\right] = \pm \frac{27c + 2a^3 - 9ab}{2\left(a^2 - 3b\right)^{\frac{3}{2}}}. \tag{5}$$

Restano da determinare le soluzioni α di quest'equazione per entrambe le scelte del segno a destra; scegliamo prima il $+$. Osserviamo innanzitutto che, datane una α_0, per la periodicitá del coseno di 2π ne esistono infinite altre: $\alpha_k = \alpha_0 + \frac{2\pi k}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$; tuttavia gli $z_k = d \cos \alpha_k$ assumeranno solo tre valori diversi (poiché $z_k = z_{k+3}$), quelli relativi a $k = -1, 0, 1$. Ricordiamo poi che la funzione $\cos \phi$ è invertibile in ogni striscia del campo complesso $\Phi_k := \{\phi \in \mathbb{C} \mid \pi k \leq \Re\phi \leq \pi(k+1)\}$. Per fissare le idee definiamo l'inversa in modo che

$$\cos^{-1} : \phi \in \mathbb{C} \mapsto \Phi_0. \tag{6}$$

La (5) è risolta da $\alpha_k := \frac{1}{3} \cos^{-1}(s) + \frac{2\pi k}{3}$. Ricapitolando, le

$$\begin{aligned} y_k &= \frac{a}{3} + d \cos \alpha_k = \frac{a}{3} + d \cos \left[\frac{1}{3} \cos^{-1}(s) + \frac{2\pi k}{3}\right] \qquad k = -1, 0, 1 \\ &= \frac{a}{3} + \frac{2}{3} \left(a^2 - 3b\right)^{\frac{1}{2}} \cos \left\{\frac{1}{3} \cos^{-1} \left[\frac{27c + 2a^3 - 9ab}{2\left(a^2 - 3b\right)^{\frac{3}{2}}}\right] + \frac{2\pi k}{3}\right\} \end{aligned} \tag{7}$$

sono soluzioni della (1). Non ce ne sono altre: cambiare il segno a d significa sostituire $d \mapsto -d$, $s \mapsto -s$, $\alpha_k \mapsto \alpha_k + \pi/3 = \alpha_{k-1} + \pi$, $\cos \alpha_k \mapsto -\cos \alpha_{k-1}$ e quindi $y_k \mapsto y_{k-1}$, cioè permutare le soluzioni.

Se a, b, c sono reali allora facendo il complesso coniugato di (1) si trova che $\overline{y}$ è soluzione se y è soluzione; di conseguenza, la (1) ammette o tre soluzioni reali, o una reale e due complesse coniugate. Mostriamo che le y_k sono tutte reali se e solo se

$$a^2 - 3b \geq 0, \qquad \Delta := a^2b^2 - 4b^3 - 4a^3c - 27c^2 + 18abc \geq 0. \tag{8}$$

La $(8)_1$ implica in virtú di (4-5) che d, s sono entrambi reali; inoltre è facile verificare che la $(8)_2$ è equivalente a $-1 \leq s \leq 1$ [1]. Queste ultime diseguaglianze garantiscono che $\alpha_0 = \cos^{-1} s \in \mathbb{R}$, e quindi che tutte le α_k, e tutte le y_k, siano reali. Abbiamo cosí mostrato che (8) è sufficiente a garantire la realtá di tutte le y_k.

Per mostrare che è anche necessaria basta mostrare che negli altri casi solo una delle tre y_k èreale. Preliminarmente, posto $x := e^{3i\alpha}$, la (5) equivale all'equazione di secondo grado $x^2 - 2sx + 1 = 0$, le cui soluzioni sono

$$x_+ = s + (s^2-1)^{\frac{1}{2}}, \qquad x_- = s - (s^2-1)^{\frac{1}{2}} = 1/x_+; \tag{9}$$

scegliendo $e^{3i\alpha} = x_+$ e prendendone il logaritmo naturale esprimiamo $\cos^{-1} s$ e le soluzioni di (5) in termini del logaritmo del modulo e dell'argomento del numero complesso $s+(s^2-1)^{\frac{1}{2}}$:

$$\alpha_k = \frac{1}{3i} \log\left[s + (s^2-1)^{\frac{1}{2}}\right] + \frac{2\pi k}{3} = \frac{1}{3i} \log\left|s + (s^2-1)^{\frac{1}{2}}\right| + \frac{1}{3} \arg\left[s + (s^2-1)^{\frac{1}{2}}\right] + \frac{2\pi k}{3}. \tag{10}$$

Di qui, se (8) è soddisfatta ritroviamo $s \in [-1, 1]$, da cui $|s+(s^2-1)^{\frac{1}{2}}| = 1$, $\alpha_k = \frac{1}{3} \arg\left[s + i(1-s^2)^{\frac{1}{2}}\right] + \frac{2\pi k}{3} = \frac{1}{3}\cos^{-1} s + \frac{2\pi k}{3}$ e tutte le y_k reali. Se $a^2 \geq 3b$ ma $\Delta < 0$ allora troviamo $s \in \mathbb{R} \setminus [-1, 1]$ e

$$\begin{aligned} s > 1 \qquad &\Rightarrow \qquad \alpha_k = \tfrac{1}{3i} \log\left[s + (s^2-1)^{\frac{1}{2}}\right] + \tfrac{2\pi k}{3}, \\ s < -1 \qquad &\Rightarrow \qquad \alpha_k = \tfrac{1}{3i} \log\left|s + (s^2-1)^{\frac{1}{2}}\right| + \tfrac{\pi(2k+1)}{3}; \end{aligned} \tag{11}$$

notando che $\cos(u+iv) = \cos u \cosh v - i \sin u \sinh v$ troviamo $y_0 \in \mathbb{R}$ e $\overline{y_1} = y_{-1}$ per $s > 1$, $y_1 \in \mathbb{R}$ e $\overline{y_0} = y_{-1}$ per $s < 1$. Se $a^2 < 3b$ allora $d, s \in i\mathbb{R}$ e

$$s + (s^2-1)^{\frac{1}{2}} \in i\mathbb{R} \qquad \Rightarrow \qquad \alpha_k = \frac{1}{3i} \log\left|s + (s^2-1)^{\frac{1}{2}}\right| + \frac{\pi(4k+1)}{6}$$

da cui segue $y_{-1} \in \mathbb{R}$ e $\overline{y_0} = y_1$. Infine, scegliendo $x_- = 1/x_+$ al posto di x_+ non ottengo nuove soluzioni: le α_k cambiano di segno, ma le $\cos \alpha_k$, e quindi le y_k, non cambiano.

Nel caso che (1) sia l'equazione agli autovalori di un tensore doppio simmetrico $\underline{\underline{Y}}$ su uno spazio vettoriale euclideo 3-dimensionale, il teorema sulla realtá degli autovalori ed i risultati precedenti implicano che gli invarianti

$$a = \mathrm{Tr}(Y), \qquad b = \frac{1}{2}\left[\mathrm{Tr}(Y)^2 - \mathrm{Tr}(Y^2)\right], \qquad c = \det(Y) \tag{12}$$

soddisfano le diseguaglianze (8)[2]. Se $\underline{\underline{Y}}$ è definito positivo, come nel caso del tensore di inerzia, allora tutti gli autovalori y_1, y_2, y_3 di Y sono positivi e risulta anche $a, b, c > 0$, visto

---

[1] Infatti, $-1 \leq s \leq 1$ è equivalente a $s^2 \leq 1$ che, moltiplicando entrambi i membri per $\left(a^2 - 3b\right)^3$ ed effettuando i calcoli, si riconduce facilmente alla $(8)_2$.

[2] Una verifica diretta delle (8) si effettua piú facilmente scegliendo una base dove Y sia una matrice diagonale $Y = \begin{pmatrix} y_1 & & \\ & y_2 & \\ & & y_3 \end{pmatrix}$. Sviluppando (12) si trova con qualche calcolo che

$$2(a^2 - 3b) = (y_1-y_2)^2 + (y_1-y_3)^2 + (y_2-y_3)^2, \qquad \Delta = (y_1-y_2)^2(y_1-y_3)^2(y_2-y_3)^2,$$

da cui seguono immediatamente le (8).

che, mettendosi in una base dove Y sia diagonale, si trova

$$a = y_1 + y_2 + y_3, \qquad b = y_1 y_2 + y_1 y_3 + y_2 y_3, \qquad c = y_1 y_2 y_3. \tag{13}$$