CAPITOLO III° S/ TUTTO

tutto

GENERALITA' SULLE VARIETA'ALGEBRICHE AFFINI.

n° 1 - Alcune nozioni algebriche : ideali primari,radicale di un ideale,il teorema di Lasker-Noether.

Ricordiamo che un ideale $\mathfrak{p}$ di un anello A si dice primo se soddisfa a una delle due seguenti condizioni equivalenti:

(i) $A/\mathfrak{p}$ è un anello integro,

(ii) se $ab \in \mathfrak{p}$ almeno uno dei due fattori a,b appartiene a $\mathfrak{p}$.

Introduciamo adesso,in modo analogo,la nozione di ideale primario che può considerarsi una generalizzazione di quella di ideale primo.

PROPOSIZIONE 1 - Siano A un anello , $\mathfrak{q}$, un ideale di A . Le due condizioni seguenti sono equivalenti :

(i) $A/\mathfrak{q}$ è un anello in cui ogni divisore di 0 è nilpotente (cioè una sua potenza è 0).

(ii) Se $a\,b \in \mathfrak{q}$ ed $a \notin \mathfrak{q}$,allora esiste $n \in \mathbb{N}^+$ tale che $b^n \in \mathfrak{q}$.

Dim. (i) $\Longrightarrow$ (ii) . Nell'anello quoziente $A/\mathfrak{q}$,se $\bar{a}$ e $\bar{b}$ denotano le immagini di a e b , si ha $\bar{a}\,\bar{b} = 0$ e $\bar{a} \neq 0$. Ne segue che $\bar{b}$ è un divisore di 0 e dunque è nilpotente: $\bar{b}^m = 0$ per un opportuno m.

Da ciò si trae $b^m \in \mathfrak{q}$ come volevasi.

(ii) $\Longrightarrow$ (i) Sia $\bar{b}$ un divisore di 0 in $A/\mathfrak{q}$; allora esiste un elemento $\bar{a} \neq 0$ in $A/\mathfrak{q}$ tale che $\bar{a}\,\bar{b} = 0$. Se a e b sono elementi rilevanti rispettivamente $\bar{a}$ e $\bar{b}$ in A, si ha: $ab \in \mathfrak{q}$ e $a \notin \mathfrak{q}$ .Allora, per (ii), esiste un intero m tale che $b^m \in \mathfrak{q}$ da cui $\bar{b}^m = 0$ cioè $\bar{b}$ è nilpotente.

DEFINIZIONE - Un ideale $\mathfrak{q}$ soddisfaciente alle condizioni equivalenti della prop.1 dicesi <u>primario</u>.

ESEMPIO : Siano $A = \mathbb{Z}$, p un numero primo. Per ogni intero $m > 0$ l'ideale (p^m) è primario.

E' immediato il

COROLLARIO - <u>Un ideale primo è sempre primario</u>.

LEMMA 1 - <u>Sia</u> $\mathfrak{a}$ <u>un ideale dell'anello</u> A. <u>L'insieme</u> $I = \{x \in A \mid x^n \in \mathfrak{a}$ <u>per qualche</u> $n \in \mathbb{N}\}$ <u>è un ideale</u>.

<u>Dim</u>. Se x ed y sono elementi di I e $x^m \in \mathfrak{a}$, $y^n \in \mathfrak{a}$, si vede facilmente che si ha : $(x-y)^{m+n-1} \in \mathfrak{a}$,dunque $x-y \in I$. Se poi $a \in A$ si ha $(ax)^m \in \mathfrak{a}$ onde $ax \in I$ .Ciò prova che I è un ideale.

DEFINIZIONE - L'ideale I introdotto nel lemma 1 dicesi <u>radicale dell'ideale</u> $\mathfrak{a}$ e si denota con $\sqrt{\mathfrak{a}}$.

PROPOSIZIONE 2 - <u>Valgono le relazioni</u> :

(i) $\mathfrak{a} \subset \sqrt{\mathfrak{a}}$,

(ii) $\sqrt{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} = \sqrt{\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}} = \sqrt{\mathfrak{a}} \cap \sqrt{\mathfrak{b}}$.

<u>Dim</u>. (i) è evidente .

E' poi chiaro che $\sqrt{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} \subset \sqrt{\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b}} \subset \sqrt{\mathfrak{a}}\cap\sqrt{\mathfrak{b}}$. Viceversa, se. $x \in \sqrt{\mathfrak{a}}\cap\sqrt{\mathfrak{b}}$ si ha $x^m \in \mathfrak{a}$, $x^n \in \mathfrak{b}$ e quindi $x^{m+n} \in \mathfrak{a}\mathfrak{b}$ da cui $x \in \sqrt{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}$. Ciò prova che $(\sqrt{\mathfrak{a}}\cap\sqrt{\mathfrak{b}}) \subset \sqrt{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}$, donde (ii).

COROLLARIO . <u>Sia</u> $\mathfrak{p} \subset A$ <u>un ideale primo.</u> <u>Si ha allora</u> : $\mathfrak{p} = \sqrt{\mathfrak{p}}$.

<u>Dim</u>. Dalla prop.2,(i) si ricava $\mathfrak{p} \subset \sqrt{\mathfrak{p}}$. D'altra parte se $x \in \sqrt{\mathfrak{p}}$, si ha $x^n \in \mathfrak{p}$ (per qualche n intero) e quindi $x \in \mathfrak{p}$ perchè $\mathfrak{p}$ è primo.

PROPOSIZIONE 3 - <u>Sia</u> A <u>un anello noetheriano</u> , $\mathfrak{a}$ <u>un ideale di</u> A :<u>allora esiste un intero positivo</u> m <u>tale che</u>

$$(\sqrt{\mathfrak{a}})^m \subset \mathfrak{a}.$$

<u>Dim</u>. Poichè A è noetheriano l'ideale $\sqrt{\mathfrak{a}}$ è finitamente generato, cioè $\sqrt{\mathfrak{a}} = (a_1,\ldots,a_n)$, $a_i \in A$. Per ogni i esiste un intero k_i tale che $a_i^{k_i} \in \mathfrak{a}$, e quindi esiste un k tale che $a_i^k \in \mathfrak{a}$ per $i=1,\ldots,n$. Per ogni intero m, un insieme di generatori di $(\sqrt{\mathfrak{a}})^m$ è dato dai prodotti $\prod_{i=1}^n a_i^{r_i}$ con $\sum_{i=1}^n r_i = m$. Se $m=n(k-1)+1$ almeno uno degli r_i è $\geqslant k$ e quindi tutti questi prodotti appartengono ad $\mathfrak{a}$. Ne segue $(\sqrt{\mathfrak{a}})^m \subset \mathfrak{a}$.

TEOREMA 1 : <u>Siano</u> A <u>un anello e</u> $\mathfrak{q} \subset A$ <u>un ideale primario</u>. <u>Allora</u> $\sqrt{\mathfrak{q}}$ <u>è un ideale primo; posto</u> $\mathfrak{p} = \sqrt{\mathfrak{q}}$, <u>si ha</u> :

$ab \in \mathfrak{q}$, $a \notin \mathfrak{q} \Longrightarrow b \in \mathfrak{p}$.

<u>Dim</u>. Basta provare che $\sqrt{\mathfrak{q}}$ è primo : il resto segue dalle definizioni di ideale primario e di radicale. Sia $ab \in \mathfrak{p}$, $a \notin \mathfrak{p}$. Poichè $\mathfrak{p} = \sqrt{\mathfrak{q}}$ esiste un intero m tale che $(ab)^m = a^m b^m \in \mathfrak{q}$; d'altra parte si ha $a^m \notin \mathfrak{q}$ in quanto $a \notin \mathfrak{p}$, quindi esiste

un intero s tale che $(b^m)^s \in \mathfrak{q}$ donde $b \in \mathfrak{p}$.

DEFINIZIONE : Sia $\mathfrak{q}$ un ideale primario : l'ideale $\mathfrak{p} = \sqrt{\mathfrak{q}}$ si dice <u>ideale primo associato a</u> $\mathfrak{q}$.

COROLLARIO : <u>Siano</u> A <u>un anello noetheriano,</u> $\mathfrak{q}$ <u>un ideale primario e</u> $\mathfrak{p}$ <u>il primo associato a</u> $\mathfrak{q}$;<u>si ha allora</u> $\mathfrak{p}^m \subset \mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}$ <u>per un opportuno intero</u> m.

<u>Dim</u>. Segue subito dalla prop.2 e dalla prop.3.

TEOREMA 2 : <u>Siano</u> $\mathfrak{q}$ <u>e</u> $\mathfrak{p}$ <u>ideali di un anello</u> A. <u>Allora</u> $\mathfrak{q}$ <u>è primario e</u> $\mathfrak{p}$ <u>è l'ideale primo associato a</u> $\mathfrak{q}$ <u>se e solo se valgono le seguenti condizioni</u> :

(i) $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}$,

(ii) $b \in \mathfrak{p} \Longrightarrow b^m \in \mathfrak{q}$ <u>per</u> m <u>opportuno</u>,

(iii) $a\,b \in \mathfrak{q},\ a \notin \mathfrak{q} \Longrightarrow b \in \mathfrak{p}$.

<u>Dim</u>. Supponiamo valgano (i),(ii),(iii); allora (iii) e (ii) implicano che $\mathfrak{q}$ è primario. Da (ii) segue $\mathfrak{p} \subset \sqrt{\mathfrak{q}}$.Dimostriamo che $\sqrt{\mathfrak{q}} \subset \mathfrak{p}$.Sia $b \in \sqrt{\mathfrak{q}}$ e sia m il minimo intero positivo tale che $b^m \in \mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}$. Se $m=1$, si ha subito $b \in \mathfrak{q}$; se $m > 1$ si ha $b^{m-1} b \in \mathfrak{q}$ e $b^{m-1} \notin \mathfrak{q}$ e quindi ancora per (iii), $b \in \mathfrak{p}$.

Supponiamo viceversa $\mathfrak{q}$ primario e $\mathfrak{p} = \sqrt{\mathfrak{q}}$.Allora (i) segue dalla prop.2,(i); (ii) segue dalla definizione di radicale e (iii) è conseguenza del fatto che $\mathfrak{q}$ è primario e $\mathfrak{p} = \sqrt{\mathfrak{q}}$.

COROLLARIO - <u>L'intersezione di un numero finito di ideali primari associati ad uno stesso ideale primo è un primario associato a quel primo</u>.

Dim. Sia : $\mathfrak{q} = \bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{q}_i$, $\sqrt{\mathfrak{q}_i} = \mathfrak{p}$ (i=1,...,n) coi $\mathfrak{q}_i$ primari. Si ha intanto : $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}$, cioè la (i) di teor.2. Se poi $b \in \mathfrak{p}$, $b^{m_i} \in \mathfrak{q}_i$ per qualche intero $m_i > 0$, posto $m = m_1 m_2 \dots m_n$, si ha $b^m \in \mathfrak{q}_i$ per $i=1,\dots,n$ e quindi $b^m \in \mathfrak{q}$. Sia $ab \in \mathfrak{q}$, $a \notin \mathfrak{q}$. Allora $ab \in \mathfrak{q}_i$ per ogni i, ed esiste j tale che $a \notin \mathfrak{q}_j$. Poichè $\mathfrak{q}_j$ è primario e $\sqrt{\mathfrak{q}_j} = \mathfrak{p}$, dalla (iii) del teor.2 segue $b \in \mathfrak{p}$. Gli ideali $\mathfrak{q}$ e $\mathfrak{p}$ soddisfano quindi le condizioni (i),(ii),(iii) del toer.2 da cui la tesi.

$\mathfrak{p}$

DEFINIZIONE - Un ideale $\mathfrak{a}$ si dice <u>irriducibile</u> se non è intersezione finita di ideali che lo contengono propriamente.

ESEMPIO : Ogni ideale primo $\mathfrak{p}$ è irriducibile : supponiamo per assurdo $\mathfrak{p} = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$ con $\mathfrak{p} \subsetneq \mathfrak{a}$, $\mathfrak{p} \subsetneq \mathfrak{b}$. Allora esisterebbero $a \in \mathfrak{a}$, $a \notin \mathfrak{p}$, $b \in \mathfrak{b}$, $b \notin \mathfrak{p}$; poichè $ab \in \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} = \mathfrak{p}$, ciò contraddice il fatto che $\mathfrak{p}$ è primo.

LEMMA 2 : <u>In un anello noetheriano ogni ideale è intersezione finita di ideali irriducibili</u>.

Dim.: Per assurdo : sia $\mathfrak{a}$ un ideale che non è intersezione finita di ideali irriducibili. Detta $\mathcal{F}$ la famiglia degli ideali di A che non sono intersezione finita di ideali irriducibili, si ha $\mathfrak{a} \in \mathcal{F}$, e quindi $\mathcal{F}$ è non vuota. Essendo A noetheriano la famiglia $\mathcal{F}$ contiene un elemento massimale $\mathfrak{b}$. $\mathfrak{b}$ non è irriducibile, perchè altrimenti $\mathfrak{b} \notin \mathcal{F}$. Sia dunque $\mathfrak{b} = \mathfrak{c} \cap \mathfrak{d}$, $\mathfrak{b} \subsetneq \mathfrak{c}$, $\mathfrak{b} \subsetneq \mathfrak{d}$. Essendo $\mathfrak{b}$ massimale $\mathfrak{c} \notin \mathcal{F}$, $\mathfrak{d} \notin \mathcal{F}$. $\mathfrak{c}$ e $\mathfrak{d}$ sono quindi intersezione finita di ideali irriducibili:

sia $\mathfrak{c} = \mathfrak{c}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{c}_h$, $\mathfrak{d} = \mathfrak{d}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{d}_k$, con $\mathfrak{c}_i (i=1,\ldots,h)$ e $\mathfrak{d}_j (j=1,\ldots,k)$ irriducibili. Si ha allora

$$\mathfrak{b} = \mathfrak{c}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{c}_h \cap \mathfrak{d}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{d}_k$$

e quindi $\mathfrak{b} \notin \mathcal{F}$, assurdo.

Sarà utile questa

NOTAZIONE - Se $\mathfrak{a}$ è un ideale di un anello A e $b \in A$ si indica con $\mathfrak{a}:b$ l'insieme $\{x \in A \mid x\,b \in \mathfrak{a}\}$ che, come si riconosce subito, è un ideale di A. In modo analogo si potrebbe definire l'ideale $\mathfrak{a}:\mathfrak{b}$ se $\mathfrak{b}$ è un altro ideale di A.

LEMMA 3 - <u>In un anello noetheriano</u> A <u>ogni ideale irriducibile è primario</u>.

<u>Dim.</u>: Basta dimostrare che se un ideale $\mathfrak{a}$ non è primario, $\mathfrak{a}$ non è irriducibile. Siano $b, c \in A$ tali che $b\,c \in \mathfrak{a}$, $c \notin \mathfrak{a}$ e $b^n \notin \mathfrak{a}$ per ogni $n > 0$.

Consideriamo la successione crescente di ideali

$$\mathfrak{a} \subset \mathfrak{a}:b \subset \mathfrak{a}:b^2 \subset \mathfrak{a}:b^3 \subset \ldots\ldots.$$

Poichè A è noetheriano, la successione è stazionaria, cioè esiste un intero n tale che

$$\mathfrak{a}:b^n = \mathfrak{a}:b^{n+1} = \mathfrak{a}:b^{n+2} = \ldots$$

Vogliamo provare che:

$$\mathfrak{a} = (\mathfrak{a} + (b^n)) \cap (\mathfrak{a} + (c)) .$$

L'inclusione $\subset$ è ovvia. Sia $x \in (\mathfrak{a} + (b^n)) \cap (\mathfrak{a} + (c))$; allora esistono $u, v \in \mathfrak{a}$, $y, z \in A$ tali che $x = u + y\,b^n = v + zc$.

Ne segue: $b\,x = b\,u + y\,b^{n+1} = b\,v + z\,bc \in \mathfrak{a}$ dato che $v \in \mathfrak{a}$ e $bc \in \mathfrak{a}$; si trae quindi $y\,b^{n+1} = b\,x - bu \in \mathfrak{a}$, cioè

$y \in \mathfrak{a} : (b^{n+1}) = \mathfrak{a} : (b^n)$.

Si ha quindi $y\, b^n \in \mathfrak{a}$ e da ciò segue $x = u + y\, b^n \in \mathfrak{a}$, cioè l'inclusione $\supset$.

Poichè $\mathfrak{a} \subsetneq (\mathfrak{a} + (b^n))$ e $\mathfrak{a} \subsetneq (\mathfrak{a} + (c))$, in quanto $b^n, c \notin \mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}$ non è irriducibile.

COROLLARIO 1- <u>In un anello noetheriano ogni ideale è intersezione finita di ideali primari</u>.

<u>Dim</u>. Segue immediatamente dai lemmi 2 e 3 .

COROLLARIO 2 - <u>Sia</u> A <u>noetheriano</u> , $\mathfrak{a}$ <u>un ideale di</u> A. <u>Allora</u> $\mathfrak{a} = \sqrt{\mathfrak{a}} \iff \mathfrak{a}$ <u>è intersezione finita di ideali primi</u>.

<u>Dim</u>. $\Longrightarrow$ Sia $\mathfrak{a} = \mathfrak{q}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{q}_s$ coi $\mathfrak{q}_i$ primari. Si ha allora (Prop.2,(ii))

$$\mathfrak{a} = \sqrt{\mathfrak{a}} = \sqrt{\mathfrak{q}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{q}_s} = \sqrt{\mathfrak{q}_1} \cap \dots \cap \sqrt{\mathfrak{q}_s} =$$

$$= \mathfrak{p}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{p}_s$$

dove i $\mathfrak{p}_i = \sqrt{\mathfrak{q}_i}$ sono primi (teor.1) .

$\Longleftarrow$ Sia $\mathfrak{a} = \mathfrak{p}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{p}_s$, con $\mathfrak{p}_i$ primo $(i=1,\dots,s)$. Allora si ha $\sqrt{\mathfrak{a}} = \sqrt{\mathfrak{p}_1} \cap \dots \cap \sqrt{\mathfrak{p}_s} = \mathfrak{p}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{p}_s = \mathfrak{a}$ (avendo tenuto conto nella seconda eguaglianza del corollario alla prop.2).

DEFINIZIONE : Una rappresentazione di un ideale $\mathfrak{a}$ come intersezione di ideali primari $\mathfrak{q}_i$, $\mathfrak{a} = \bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{q}_i$ (o, più brevemente : <u>una rappresentazione primaria di</u> $\mathfrak{a}$) si dice <u>irridondante</u> o <u>ridotta</u> se sono soddisfatte le seguenti condizioni:

(a) Nessun $\mathfrak{q}_i$ contiene l'intersezione dei rimanenti,

(b) i $\mathfrak{q}_i$ hanno ideali primi associati distinti .

TEOREMA 3 -(Lasker-Noether) . <u>In un anello noetheriano ogni ideale</u> $\mathfrak{a}$ <u>ammette una rappresentazione primaria irridondante.</u>

<u>Dim</u>. Sia $\mathfrak{a}=\bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{q}_i$ una rappresentazione primaria di $\mathfrak{a}$ (esistente per il coroll.1 al lemma 3): sia $\mathfrak{q}'_j$ l'intersezione di tutti i $\mathfrak{q}_i$ che hanno lo stesso ideale primo associato $\mathfrak{p}_j$. Dal corollario al teor.2 segue che $\mathfrak{q}'_j$ è primario e $\sqrt{\mathfrak{q}'_j} = \mathfrak{p}_j$. Ripetendo questo ragionamento per ogni $\mathfrak{p}_j$ si ottiene una rappresentazione $\mathfrak{a} = \bigcap \mathfrak{q}'_j$ soddisfaciente alla condizione (b).

Se poi si omettono tutti i $\mathfrak{q}'_j$ contenenti l'intersezione dei rimanenti si arriva alfine a una rappresentazione soddisfaciente anche ad (a),cioè a una rappresentazione ridotta.

OSSERVAZIONE: Gli ideali primari che compaiono in una rappresentazione primaria ridotta di $\mathfrak{a}$ non sono univocamente determinati da $\mathfrak{a}$; si possono dare in proposito facili esempi come sarà mostrato negli esercizi.

DEFINIZIONE - I primi associati agli ideali primari di una decomposizione primaria ridotta di $\mathfrak{a}$ si dicono <u>ideali primi associati ad</u> $\mathfrak{a}$.

DEFINIZIONE - Un ideale primo associato ad $\mathfrak{a}$ si dice <u>isolato</u> se non contiene nessun altro primo associato ad $\mathfrak{a}$ .Un primo non isolato si dice <u>immerso.</u> Inoltre se $\mathfrak{q}$ è un ideale primario che compare in una rappresentazione primaria ridotta di $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{q}$ si dice <u>componente primaria isolata</u> (rispettivamente <u>immersa</u>) se $\sqrt{\mathfrak{q}}$ è un primo isolato (risp.immerso)di $\mathfrak{a}$.

Il seguente teorema (la dimostrazione che viene qui omessa, può trovarsi in Zariski-Samuel:" Commutative Algebra"- Van Nostrand, cap. IV 5, pag. 211) fa vedere "che cosa" è univocamente determinata da $\mathfrak{a}$ in una rappresentazione primaria ridotta di $\mathfrak{a}$; è un importante complemento al teorema di Lasher-Noether.

TEOREMA 4 - <u>Sia</u> $\mathfrak{a} = \bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{q}_i$ <u>una rappresentazione primaria ridotta. Allora i primi associati ad</u> $\mathfrak{a}$ <u>sono univocamente determinati da</u> $\mathfrak{a}$ (<u>e quindi è anche univocamente determinato l'intero n</u>). <u>Inoltre sono univocamente determinate le componenti primarie isolate</u>.

Ricordarsi che qua e per le cose che servono ritornare alle pag

• ✗ n° 2 - <u>Definizione di varietà algebrica affine</u>. <u>Esempi e prime proprietà</u>.

Sia K un corpo. Il prodotto cartesiano K^n sarà detto anche <u>spazio affine di dimensione</u> n <u>su</u> K. Gli elementi $(x)=(x_1,\ldots,x_n)$ di K^n si dicono <u>punti</u> di K^n e le x_i si diranno <u>coordinate</u> del punto x.

Supponiamo ora che K sia un'estensione del corpo k.

[illegible] a 1 p 11 [illegible] pag 7

Siano $f(X_1,\ldots,X_n)$ un polinomio dell'anello $k[X_1,\ldots,X_n]$ ed $(x)=(x_1,\ldots,x_n) \in K^n$ un punto tale che $f(x_1,\ldots,x_n) = 0$; si dice allora che (x) è uno <u>zero di f</u>.

Siano ora $\mathfrak{a}$ un ideale di $k[X_1,\ldots,X_n]$ ed $(x) \in K^n$ uno zero comune a tutti i polinomi di $\mathfrak{a}$; si dice allora che (x) è uno <u>zero di</u> $\mathfrak{a}$. L'insieme degli zeri di $\mathfrak{a}$ (in K^n) si dice k-<u>varietà algebrica affine di</u> K^n <u>definita da</u> $\mathfrak{a}$ e lo si denota con

$\mathcal{V}_k(\mathfrak{a})$ o, più semplicemente, quando non vi sia ambiguità, con $\mathcal{V}(\mathfrak{a})$.

Si può osservare che una varietà algebrica è anche il luogo degli zeri comuni a una qualsiasi famiglia $\{f_i\}_{i\in I}$ di polino mi di $k[X_1,\dots,X_n]$. Infatti se $\mathfrak{a}$ è l'ideale generato dai polinomi f_i ($\mathfrak{a}$ si definisce come l'intersezione di tutti gli ideali contenenti i polinomi f_i ed è quindi il più piccolo ide le di $k[X_1,\dots,X_n]$ contenente tutti i polinomi $\{f_i\}$), gli zeri di $\mathfrak{a}$ sono tutti e soli gli zeri dei polinomi f_i.

Si osserva anche che una varietà algebrica risulta il luogo di zeri comuni a un numero finito di polinomi. Infatti, in virtù del teorema della base di Hilbert, l'anello $k[X_1,\dots,X_n]$ è noetheriano, cioè ogni ideale $\mathfrak{a}$ di $k[X_1,\dots,X_n]$ ammette un n mero finito di generatori : $\mathfrak{a} = (f_1,\dots,f_m)$; dunque gli zeri comuni ai polinomi $f_1,\dots,f_m$ sono tutti e soli gli zeri di $\mathfrak{a}$

Perciò, in pratica, quando si conosce un sistema finito di generatori di un ideale $\mathfrak{a}$, per studiare $\mathcal{V}_k(\mathfrak{a})$ ci si riferis sempre agli zeri comuni a questi generatori. E' ciò che noi f remo sistematicamente negli esempi che ora daremo e che si pr pongono essenzialmente di mettere in luce come vari "enti ge metrici" oggetti di studio nel corso di Geometria I siano in realtà i più semplici esempi di varietà algebriche.

Negli esempi che ora daremo supporremo quasi sempre, come dremo, che il corpo K sia un'estensione algebricamente chiusa corpo k. Infatti le varietà che hanno maggiore interesse in metria algebrica sono quelle i cui punti hanno coordinate in

corpo algebricamente chiuso. Tuttavia è bene notare che le proprietà generali delle varietà algebriche incluse fino al teorema degli zeri di Hilbert sono valide senza quell'ipotesi restrittiva.

Il teorema degli zeri segna un punto cruciale nella teoria in quanto mette in evidenza che importanti proprietà valgono solo per corpi K algebricamente chiusi. Nelle considerazioni successive al teorema degli zeri (teor.9) noi supporremo sempre che K sia un corpo algebricamente chiuso.

ESEMPI.

1) <u>Lo spazio affine</u> K^n <u>è la varietà algebrica definita dall'ideale</u> (0) di $k[X_1,\dots,X_n]$.

Infatti il polinomio nullo, è evidentemente annullato da tutti i punti di K^n.

2) <u>L'insieme vuoto</u> $\emptyset$ <u>è la varietà definita dall'ideale</u> (1) di $k[X_1,\dots,X_n]$.

Infatti nessun punto di K^n può essere uno zero del polinomio $1\in(1)$.

3) Un punto $x=(x_1,\dots,x_n)\in k^n$ dicesi un <u>punto di</u> K^n <u>razionale</u> (su k). Esso è una varietà algebrica, in quanto è il luogo degli zeri dell'ideale $\mathfrak{A}=(X_1-x_1,X_2-x_2,\dots,X_n-x_n)$ di $A=k[X_1,\dots,X_n]$. E' infatti chiaro che ogni polinomio X_i-x_i $(1\leq i\leq n)$ è annullato da x; d'altra parte se $y=(y_1,\dots,y_n)$ è uno zero di $\mathfrak{A}$ deve in particolare annullare i polinomi X_1-x_1, X_2-x_2, ecc. donde $y_1-x_1=0$, $y_2-x_2=0$, ecc. cioè $(y)=x$.

4) Come caso particolare dell'esempio 3) si ha:

i punti della retta reale $\mathbb{R}$ sono $\mathbb{R}$-varietà algebriche di $\mathbb{C}$ (ma, se si vuole, essi sono anche $\mathbb{R}$-varietà di $\mathbb{R}$),

i punti del piano reale $\mathbb{R}^2$ sono $\mathbb{R}$-varietà di $\mathbb{C}^2$,

i punti dello spazio reale $\mathbb{R}^3$ sono $\mathbb{R}$-varietà di $\mathbb{C}^3$,

i punti della retta complessa $\mathbb{C}$ sono $\mathbb{C}$-varietà di $\mathbb{C}$,

i punti del piano $\mathbb{C}^2$ sono $\mathbb{C}$-varietà di $\mathbb{C}^2$,

i punti dello spazio $\mathbb{C}^3$ sono $\mathbb{C}$-varietà di $\mathbb{C}^3$.

5) Consideriamo l'insieme dei due punti di coordinata rispettiva i e $-i$ della retta $\mathbb{C}$; questi costituiscono una $\mathbb{R}$-varietà di $\mathbb{C}$ e anche una $\mathbb{Q}$-varietà di $\mathbb{C}$ in quanto costituiscono l'insieme degli zeri dell'ideale (X^2+1).

6) L'insieme costituito dal solo punto di $\mathbb{C}$ di coordinata i (che, per quanto visto in 4) è una $\mathbb{C}$-varietà di $\mathbb{C}$) non è però una $\mathbb{R}$-varietà $\mathcal{V}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{a})$: infatti ogni polinomio di $\mathbb{R}[X]$ avente i come zero è un multiplo del polinomio minimo di i su $\mathbb{R}$ che è, come è ben noto, X^2+1. Se quindi $i \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{a})$, ogni polinomio generante l'ideale principale $\mathfrak{a}$ è multiplo di X^2+1 e quindi anche $-i$ appartiene a $\mathcal{V}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{a})$.

7) Gli esempi 5) e 6) si generalizzano nel modo seguente.

Siano $f(X) \in k[X]$, $\mathfrak{a} = (f)$. Allora $\mathcal{V}_k(\mathfrak{a})$ è costituita evidentemente dagli elementi x di K tali che $f(x) = 0$. Se f è un polinomio irriducibile di grado n e x è una radice di f in K, $\mathcal{V}_k(\mathfrak{a})$ <u>è costituita dagli</u> n <u>coniugati</u> (eventualmente non tutti distinti) <u>di</u> x <u>su</u> k.

Viceversa, se $x \in K$ <u>fa parte di una varietà</u> $\mathcal{V}_k(\mathfrak{a})$, <u>a questa appartengono tutti i coniugati di</u> x <u>su</u> k.

8) <u>Siano</u> $x_1, x_2, \ldots, x_n$ <u>punti di</u> k. <u>L'insieme</u> $\{x_1, \ldots, x_n\}$ <u>è una</u> k-<u>varietà di</u> K in quanto è il luogo degli zeri di K^n dell'ideale di $k[X]$ generato dal polinomio $(X-x_1)(X-x_2)\ldots(X-x_n)$.

9) Come caso particolare di 7) si ha : i due punti i e $-i$ di $\mathbb{C}$ costituiscono oltre che una $\mathbb{Q}$-varietà ed una $\mathbb{R}$-varietà (cfr.esempio 5) anche una $\mathbb{C}$-varietà.(+)

10) Siano $k = \mathbb{R}$, $K = \mathbb{C}$, $f(X,Y) = aX+bY+c \in \mathbb{R}[X,Y]$ un polinomio di primo grado. Se $\mathfrak{a}$ è l'ideale generato da f, la varietà $\mathcal{V}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{a})$, che è costituita dai punti di $\mathbb{C}^2$ che annullano f dicesi una <u>retta reale del piano</u> $\mathbb{C}^2$.

11) Il luogo degli zeri di $\mathbb{C}^3$ di un polinomio $aX+bY+cZ+d \in \mathbb{R}[X,Y,Z]$ di primo grado è una varietà che dicesi <u>piano reale di</u> $\mathbb{C}^3$.

12) Il luogo degli zeri di $\mathbb{C}^3$ comuni a due polinomi di $\mathbb{R}[X,Y,Z]$, di primo grado, aventi coefficienti non proporzionali è una varietà che dicesi <u>retta reale dello spazio</u> $\mathbb{C}^3$.

13) Sia $f(X,Y)$ un polinomio di secondo grado di $\mathbb{R}[X,Y]$. Il luogo degli zeri in $\mathbb{C}^2$ di f è una varietà algebrica che dicesi <u>conica reale</u>.

14) Il luogo degli zeri di $\mathbb{C}^3$ di un polinomio $f(X,Y,Z) \in \mathbb{R}[X,Y,Z]$ di secondo grado è una varietà che dicesi <u>quadrica reale</u>.

15) Sia $f(X,Y)$ un polinomio di $k[X,Y]$. Il luogo degli zeri di K^2 di f è una varietà che dicesi k-<u>curva piana</u>. Se f è un poli<u>nomio di primo grado la curva</u> dicesi una k-retta di K^2; se

(+) Ciò che segue anche dal fatto (ovvio) che una k-varietà è anche una K-varietà.

$\partial f=2$ la curva dicesi una k-<u>conica</u>.

OSSERVAZIONE - Nel seguito definiremo la dimensione di una varietà e chiameremo curva una varietà di dimensione 1. Si verificherà allora che una curva piana ha dimensione 1.

16) Sia $f(X,Y,Z)$ un polinomio di $k[X,Y,Z]$. Il luogo degli zeri di K^3 di f è una varietà che dicesi una k-<u>superficie dello spazio</u> K^3. Se f è un polinomio di primo grado la superficie dicesi un k-<u>piano</u>; se $\partial f = 2$ si ha invece una k-<u>quadrica</u>.

OSSERVAZIONE - Le varietà di dimensione 2 saranno denominate in seguito superficie; verificheremo che le superficie dello spazio hanno dimensione 2.

17) Sia $f(X_1,\dots,X_n) \in k[X_1,\dots,X_n]$. Il luogo degli zeri in K^n di f è una varietà che dicesi k-<u>ipersuperficie dello spazio</u> K^n. Se $\partial f = 1$ la varietà dicesi <u>iperpiano</u>.

Si può adesso osservare che: la varietà costituita da punti di una retta (descritte negli esempi 4),5),6),7),8),9)), le curve piane (in particolare le rette e le coniche), le superficie dello spazio (in particolare i piani e le quadriche) sono tutte ipersuperficie. Non sono invece ipersuperficie i punti di K^n se $n \geqslant 2$ (cfr. esempio 3)), nè le rette dello spazio (esempio 12)).

PROPOSIZIONE 4 - <u>Valgono le relazioni</u> :

(1) $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b} \Longrightarrow \mathcal{V}(\mathfrak{a}) \supset \mathcal{V}(\mathfrak{b})$,

(2) $\mathcal{V}(\bigcap_{i=1}^{m} \mathfrak{a}_i) = \mathcal{V}(\prod_{i=1}^{m} \mathfrak{a}_i) = \bigcup_{i=1}^{m} \mathcal{V}(\mathfrak{a}_i)$ $\quad (m \in \mathbb{N}^+)$,

(3) $\mathcal{V}(\sum_{i\in I} \mathfrak{a}_i) = \bigcap_{i\in I} \mathcal{V}(\mathfrak{a}_i)$,

(4) $\mathcal{V}(\mathfrak{a}^m) = \mathcal{V}(\mathfrak{a}) = \mathcal{V}(\sqrt{\mathfrak{a}})$ $(m \in \mathbb{N}^+)$.

Dim. La (1) è immediata.

Per provare la (2) possiamo supporre m=2, perchè poi procedendo per induzione su m si ha manifestamente la tesi. Si ha : $\mathfrak{a}\mathfrak{b} \subset \mathfrak{a}\cap\mathfrak{b} \subset \mathfrak{a}$ e $\mathfrak{a}\mathfrak{b} \subset \mathfrak{a}\cap\mathfrak{b} \subset \mathfrak{b}$; da queste e da (1) segue $\mathcal{V}(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) \supset \mathcal{V}(\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b}) \supset \mathcal{V}(\mathfrak{a}) \cup \mathcal{V}(\mathfrak{b})$. Si tratta dunque di provare che $\mathcal{V}(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) \subset \mathcal{V}(\mathfrak{a}) \cup \mathcal{V}(\mathfrak{b})$. Sia infatti $x \in \mathcal{V}(\mathfrak{a}\mathfrak{b})$, $x \notin \mathcal{V}(\mathfrak{a})$; occorre provare che $x \in \mathcal{V}(\mathfrak{b})$. Poichè $x \notin \mathcal{V}(\mathfrak{a})$ esiste $f \in \mathfrak{a}$ tale che $f(x) \neq 0$; d'altra parte, se g è un qualunque polinomio di $\mathfrak{b}$ si ha $fg \in \mathfrak{a}\mathfrak{b}$ e quindi $0 = fg(x) = f(x)g(x)$ da cui $g(x) = 0$ (essendo K privo di 0-divisori). Ciò prova che $x \in \mathcal{V}(\mathfrak{b})$, donde l'asserto.

Proviamo ora la (3). Da (1) si trae $\mathcal{V}(\sum \mathfrak{a}_i) \subset \mathcal{V}(\mathfrak{a}_i)$ e quindi $\mathcal{V}(\sum \mathfrak{a}_i) \subset \bigcap \mathcal{V}(\mathfrak{a}_i)$. D'altra parte, se $x \in \bigcap \mathcal{V}(\mathfrak{a}_i)$ in x si annullano tutti i polinomi degli ideali $\mathfrak{a}_i$ (per ogni $i \in I$),quindi $x \in \mathcal{V}(\sum \mathfrak{a}_i)$.

Proviamo infine la (4). Da $\mathfrak{a}^m \subset \mathfrak{a} \subset \sqrt{\mathfrak{a}}$ segue $\mathcal{V}(\mathfrak{a}^m) \supset \supset \mathcal{V}(\mathfrak{a}) \supset \mathcal{V}(\sqrt{\mathfrak{a}})$. Viceversa se $x \in \mathcal{V}(\mathfrak{a}^m)$ ed $f \in \sqrt{\mathfrak{a}}$ si ha $f^t \in \mathfrak{a}$ per un intero t opportuno da cui $f^{tm} \in \mathfrak{a}^m$ e quindi $f^{tm}(x) = f(x)^{tm} = 0$, cioè $f(x)=0$. Si ha così $x \in \mathcal{V}(\sqrt{\mathfrak{a}})$,donde l'asserto.

Dato un insieme E di K^n denoteremo con $\mathcal{J}(E)$ l'insieme,che si verifica subito essere un ideale,dei polinomi di $k[X_1,\dots,X_n]$ che si annullano nei punti di E.

PROPOSIZIONE 5 - Valgono le relazioni

(5) $E_1 \subset E_2 \implies \mathcal{J}(E_1) \supset \mathcal{J}(E_2)$,

(6) $\mathcal{J}(\bigcup_{i\in I} E_i) = \bigcap_{i\in I} \mathcal{J}(E_i)$,

(7) $\mathcal{V}(\mathcal{J}(E)) \supset E$,

(8) $\mathcal{J}(\mathcal{V}(\mathfrak{a})) \supset \mathfrak{a}$,

(9) $\mathcal{J}(E) = \sqrt{\mathcal{J}(E)}$.

Dim. Le proprietà elencate sono tutte più o meno immediate; a titolo di esempio dimostriamo la (9).

Se $f \in \sqrt{\mathcal{J}(E)}$ ed $x \in E$ si ha $f^m \in \mathcal{J}(E)$ per m opportuno, onde $f^m(x) = f(x)^m = 0$ e quindi $f(x) = 0$; ciò prova che $f \in \mathcal{J}(E)$.

COROLLARIO- Si ha : $\mathcal{J}(\mathcal{V}(\mathfrak{a})) \supset \sqrt{\mathfrak{a}}$.

Dim. Segue subito da (8) e (9).

OSSERVAZIONE I . Sia J un sottoinsieme proprio ed infinito di K .(J esiste certamente se K è infinito, ad esempio se è algebricamente chiuso). Allora se un polinomio f è nullo su J si ha necessariamente f=0 (corollario al teorema 0). Di conseguenza si ha $\mathcal{V}(\mathcal{J}(J)) = \mathcal{V}((0)) = K$ e ciò prova che l'inclusione (7) è, in generale, stretta.

OSSERVAZIONE 2 . Se $\mathfrak{a}$ è l'ideale (X^2) di $k[X]$ si ha : $\mathcal{V}((X^2)) = \mathcal{V}((X)) = 0_K$ e quindi $\mathcal{J}(\mathcal{V}(\mathfrak{a})) = \mathcal{J}(0_K) = (X)$, dunque anche la (8) è in generale un'inclusione stretta.

Indichiamo ora con $\mathcal{A}$ l'insieme degli ideali di $k[X_1,\dots,X_n]$ e con $\mathcal{P}(K^n)$ l'insieme dei sottoinsiemi di K^n e consideriamo la applicazione $\varphi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{P}(K^n)$ definita da $\varphi(\mathfrak{a}) = \mathcal{V}(\mathfrak{a})$.

La (4) mostra che φ non è iniettiva, mentre l'esempio dell'osservazione I mostra che φ non è surgettiva in quanto l'insieme J non può risultare la varietà associata a un ideale di $k[X]$.

Sia ora $\psi: \mathcal{P}(K^n) \to \mathcal{A}$ l'applicazione definita da :

$\psi(E) = \mathcal{J}(E)$ se $E \subset K^n$.

Mostriamo che ψ non è surgettiva; se $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{a}^m$ ed $E \subset K^n$ è tale che $\mathfrak{a}^m = \psi(E) = \mathcal{J}(E)$, si ha(per(4)e(7)) $\mathcal{V}(\mathfrak{a}) = \mathcal{V}(\mathfrak{a}^m) = \mathcal{V}(\mathcal{J}(E)) \supset E$, da cui(per (5) e (8)) $\mathfrak{a} \subset \mathcal{J}(E)$, onde $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}^m$; assurdo. Inoltre ψ non è iniettiva (esempio dell'osservazione I: $\psi(J) = \psi(K) = (0)$).

Poniamo $\mathbf{V} = \mathrm{Im}\ \varphi$ = insieme delle varietà algebriche di K^n

PROPOSIZIONE 6 - <u>Si ha</u> :

(i) $\mathcal{V}(\mathcal{J}(E)) = E \iff E \in \mathbf{V}$,

(ii) <u>l'applicazione</u> $\psi_{|\mathbf{V}}$ <u>è iniettiva (cioè:</u> $\mathcal{J}(V_1) = \mathcal{J}(V_2) \Longrightarrow V_1 = V_2$ <u>se</u> $V_1, V_2 \in \mathbf{V}$)

<u>Dim</u>. (a) - L'implicazione $\Longrightarrow$ è evidente. Viceversa, se E è una varietà, si ha $E = \mathcal{V}(\mathfrak{a})$ per qualche ideale $\mathfrak{a}$. Ne segue, per (8), $\mathcal{J}(E) \supset \mathfrak{a}$ da cui, per (1), $\mathcal{V}(\mathcal{J}(E)) \subset E$, e quindi, tenendo conto di (7), $\mathcal{V}(\mathcal{J}(E)) = E$.

Da (i) si deduce $\varphi \circ \psi_{|\mathbf{V}} = \mathrm{Id}_V$; da ciò segue immediatamente (ii).

Poniamo $\mathbf{I} = \mathrm{Im}\ \psi$ = insieme degli ideali costituiti da tutti polinomi di $k[X_1, \dots, X_n]$ ~~ottti~~ nulli in qualche sottoinsieme di K^n.

PROPOSIZIONE 7 - <u>Si ha</u> :

(i) $\mathcal{J}(\mathcal{V}(\mathfrak{a})) = \mathfrak{a} \iff \mathfrak{a} \in \mathbf{I}$,

(ii) <u>l'applicazione</u> $\varphi_{|\mathbf{I}}$ <u>è iniettiva</u>.

<u>Dim</u>. L'implicazione $\Longrightarrow$ è evidente. Viceversa, se $\mathfrak{a} \in \mathbf{I}$ si ha $\mathfrak{a} = \mathcal{J}(E)$ per qualche $E \subset K^n$. Ne segue, per (7), $\mathcal{V}(\mathfrak{a}) \supset E$, da cui per (5) $\mathcal{J}(\mathcal{V}(\mathfrak{a})) \subset \mathfrak{a}$ che assieme alla (8) dà l'asserto.

Da (i) segue $\psi \circ \varphi_{|\mathbf{I}} = Id_{\mathbf{I}}$, donde (ii).

COROLLARIO - <u>L'insieme</u> $\mathbf{I}$ <u>è l'insieme degli ideali delle varietà algebriche</u> (= <u>ideali dei polinomi nulli su varietà</u>). <u>L'applicazione</u> $\varphi_{|\mathbf{I}} : \mathbf{I} \longrightarrow \mathbf{V}$ <u>è bigettiva e la sua inversa è</u> $\psi_{|\mathbf{V}}$.

<u>Dim</u>. La prima asserzione segue da (i) ; la seconda da (ii)

OSSERVAZIONE - La (9) mostra che l'insieme $\mathbf{I}$ è costituito da ideali coincidenti col proprio radicale (cioè ideali che sono intersezione di ideali primi). Vedremo in seguito, in conseguenza del teorema degli zeri di Hilbert, che vale anche il viceversa : ogni ideale coincidente col proprio radicale sta in $\mathbf{I}$. Di conseguenza le varietà algebriche potranno essere poste in corrispondenza biunivoca cogli ideali coincidenti col loro radicale.

× DEFINIZIONE - Una k-varietà algebrica V di K^n si dice <u>riducibile</u> (su k) se esistono due sottovarietà proprie V_1 e V_2 di V tali che $V = V_1 \cup V_2$; in caso contrario la varietà si dice <u>irriducibile</u>.

TEOREMA 5 - <u>Sia</u> V <u>una varietà.Allora</u> : V <u>è irriducibile se e solo se</u> $\mathcal{J}(V)$ <u>è un ideale primo</u>.

<u>Dim</u>. Supponiamo che $\mathcal{J}(V)$ non sia un ideale primo. Allora esistono due polinomi f_1, f_2 tali che $f_1 f_2 \in \mathcal{J}(V)$, $f_1 \notin \mathcal{J}(V)$,

$f_2 \notin \mathcal{J}(V)$. Sia V_1 il luogo dei punti di V in cui $f_1 = 0$; V_1 è una varietà, perchè $V_1 = V \cap \mathcal{V}((f_1))$, e non coincide con V perchè $f_1 \notin \mathcal{J}(V)$. Analogamente sia V_2 la sottovarietà propria di V costituita dai punti di V in cui $f_2 = 0$. Si ha dunque: $(V_1 \cup V_2) \subset V$. D'altra parte se $x \in V$ si ha $f_1 f_2(x) = f_1(x) f_2(x) = 0$ perchè $f_1 f_2 \in \mathcal{J}(V)$, onde $f_1(x) = 0$ oppure $f_2(x) = 0$; ne segue $x \in V_1$ oppure $x \in V_2$ cioè $x \in V_1 \cup V_2$. Ne segue $V = V_1 \cup V_2$, onde V è riducibile.

Supponiamo ora che $\mathcal{J}(V)$ sia un ideale primo. Supponiamo di avere $V = V_1 \cup V_2$ con $V_2 \neq V$; se risulterà $V = V_1$ avremo provato che V è irriducibile. Si ha, per (6), $\mathcal{J}(V) = \mathcal{J}(V_1) \cap \mathcal{J}(V_2) \supset \mathcal{J}(V_1)\mathcal{J}(V_2)$; inoltre $\mathcal{J}(V_2) \underset{\neq}{\supset} \mathcal{J}(V)$ per la prop.6,(ii). Ne segue, essendo $\mathcal{J}(V)$ primo, $\mathcal{J}(V) \supset \mathcal{J}(V_1)$ (+) donde $V = V_1$ c.v.d.

OSSERVAZIONE - Dal teorema precedente segue che se V è una varietà irriducibile, esiste sempre un ideale primo $\mathfrak{p}$ tale che $V = \mathcal{V}(\mathfrak{p})$. Posto infatti $\mathfrak{p} = \mathcal{J}(V)$ si ha, per la prop.6,(i): $\mathcal{V}(\mathfrak{p}) = \mathcal{V}(\mathcal{J}(V)) = V$.

Tuttavia manca finora, in assenza del teorema degli zeri di Hilbert, un criterio valido per riconoscere se una varietà è irriducibile. Vedremo poi (corollario 2 al teorema 9) che vale la seguente importante proprietà: se $\mathfrak{p}$ è primo, $\mathcal{V}(\mathfrak{p})$ è irriducibile. Questa proprietà varrà nell'ipotesi, sempre da noi ammessa nel seguito, che K sia un'estensione algebricamente chiusa di k.

(+) Si tien conto di questo fatto: <u>se un ideale primo $\mathfrak{p}$ contiene il prodotto di due ideali $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$, contiene almeno uno dei due ideali $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$</u>; infatti, in caso contrario, esisterebbero $x \in \mathfrak{a}, x \notin \mathfrak{p}$ e $y \in \mathfrak{b}, y \notin \mathfrak{p}$ donde $xy \in \mathfrak{a}\mathfrak{b} \subset \mathfrak{p}$: assurdo, perchè $\mathfrak{p}$ è primo.

Col seguente teorema si ha una prima proprietà riguardante la struttura delle varietà algebriche.

TEOREMA 6 - <u>Ogni varietà</u> V <u>è l'unione di un numero finito di varietà irriducibili</u> V_i : $V = \bigcup_{i=1}^{h} V_i$. <u>Tale decomposizione è unica se è irridondante</u> (<u>cioè senza</u> V_i <u>superflue</u>).

<u>Dim</u>. Supponiamo che V non sia unione di un numero finito di varietà irriducibili. Si ha allora $V=V_1 \cup V_1'$ dove almeno una delle due sottovarietà proprie V_1, V_1' di V non è unione di varietà irriducibili. Sia V_1 la sottovarietà in questione ;allora $V_1 = V_2 \cup V_2'$ dove almeno una delle due sottovarietà proprie V_2, V_2' di V_1 non è unione di varietà irriducibili. Supposto che V_2 sia la sottovarietà voluta, si prosegua ottenendo così una successione strettamente decrescente di varietà:

$$V \underset{\neq}{\supset} V_1 \underset{\neq}{\supset} V_2 \underset{\neq}{\supset} \cdots\cdots$$

e quindi,per (5) e per la (ii) di Prop.6 una successione strettamente crescente di ideali $\mathcal{J}(V) \underset{\neq}{\subset} \mathcal{J}(V_1) \underset{\neq}{\subset} \mathcal{J}(V_2) \underset{\neq}{\subset} \cdots\cdots$ in contraddizione colla noetherianità di $k[X_1,\ldots,X_n]$.

Sia ora $V = \bigcup_{j=1}^{h'} V_j'$ un'altra decomposizione irridondante di V in varietà irriducibili. Mostriamo che ogni varietà irriducibile di una delle due decomposizioni coincide con una varietà irriducibile dell'altra decomposizione.

Consideriamo,ad esempio, una V_i della prima decomposizione. Si ha : $V_i = V \cap V_i = (\bigcup_{j=1}^{h'} V_j') \cap V_i = \bigcup_{j=1}^{h'} (V_j' \cap V_i)$; poichè V_i è irriducibile essa deve coincidere,per un certo j,con una delle sue componenti $V_j' \cap V_i$; Ne segue $V_i \subset V_j'$. Un analogo ragionamento,fatto a partire dalla V'_j in luogo di V_i, conduce ad un'inclusione $V'_j \subset V_s$. Poichè V_i non è una componente superflua nella prima decomposizione, si ha necessariamente $V_i = V_s$ da cui $V_i = V'_j$ e ciò prova quanto volevasi.

n° 3 - Anelli integralmente chiusi. Il teorema degli zeri di Hilbert.

Gli anelli integralmente chiusi giocano un ruolo molto importante in geometria algebrica, particolarmente per la caratterizzazione di certe varietà. Tuttavia in questo corso non si vedranno queste importanti applicazioni geometriche degli anelli integralmente chiusi. Ci limiteremo essenzialmente alle premesse occorrenti alla dimostrazione che intendiamo dare del teorema degli zeri di Hilbert.

Ricordiamo che se A è sottoanello di un anello B supporremo sempre che sia $1_A = 1_B$.

DEFINIZIONE. Siano A un sottoanello di un anello B, x un elemento di B. Si dice che x è <u>intero</u> su A se vale una relazione del tipo

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0 \qquad (a_i \in A)$$

OSSERVAZIONE. Se A e B sono come sopra e inoltre sono corpi, si ha subito: x è algebrico su A $\Longleftrightarrow$ x è intero su A.

DEFINIZIONE- Se ogni elemento dell'estensione B di A è intero su A si dice che l'anello B <u>è intero su A</u>.

TEOREMA 7 - <u>Nelle ipotesi delle definizioni precedenti, le tre seguenti proprietà sono equivalenti</u> :

1) x <u>è intero su</u> A ,

2) $A[x]$ <u>è un</u> A-<u>modulo di tipo finito</u>,

3) <u>esiste un anello</u> C <u>contenente</u> $A[x]$ <u>tale che</u> C <u>è un</u> A -<u>modulo di tipo finito</u>.

<u>Dim</u>. 1) $\Longrightarrow$ 2). Si indichi con M_s l'A'-modulo degli elementi di $A[x]$ della forma $a_0+a_1x+\dots+a_sx^s$ .Si ha: $A=M_0\subset M_1\subset\dots\subset M_s\subset\dots$, $A[x]=\bigcup\limits_0^\infty M_s$ .Per ipotesi vale una relazione del tipo $x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_n=0$ da cui segue $M_n=M_{n-1}$. Moltiplicando per x la suddetta relazione si ottiene poi $x^{n+1}\in M_n=M_{n-1}$, da cui $M_{n+1}=M_{n-1}$. Così proseguendo si vede che $M_s=M_{n-1}$ per $s\geqslant n$. Ne segue $A[x]=M_{n-1}$, dove quest'ultimo è un A-modulo generato da $1,x,\dots,x^{n-1}$ dunque di tipo finito.

2) $\Longrightarrow$3) l'implicazione è evidente prendento $C=A[x]$.

3) $\Longrightarrow$1) Sia $\{c_1,\dots,c_n\}$ un sistema di generatori di C su A. Sussistono allora, per ogni i $(1\leqslant i\leqslant n)$ delle relazioni $x\,c_i=\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}\,c_j(a_{ij}\in A)$, da cui si trae:

$$(10)\quad a_{i1}c_1+\dots+(a_{ii}-x)c_i+\dots+a_{in}c_n=0 \qquad (1\leqslant i\leqslant n)$$

Se a è il determinante del sistema (10) rispetto a $c_1,\dots,c_n$, si ha : $a=\det(a_{ij}-\delta_{ij}\,x)$ dove δ_{ij} è il simbolo di Kronecker.

Da (10) si trae applicando la regola di Cramer: $a\,c_i=0$ per ogni $i(1\leqslant i\leqslant n)$. Poichè $1\in C$ sussiste una relazione $1=\sum\limits_{i=1}^{n} b_ic_i$ (b_i A),da cui, moltiplicando per a e tenendo conto di quanto precede: $a=\sum\limits_{i=1}^{n} b_i(a\,c_i)=0$. Si ha dunque $\det(a_{ij}-\delta_{ij}x)=0$ dove il primo membro è un polinomio in x a coefficienti in A che possiamo scrivere $(-1)x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_n$; ciò prova che x è intero su a .

COROLLARIO - Ogni sopranello B di A finitamente generato su A (come A-modulo) è intero su A.

Dim. Sia $x \in B$; si ha $A[x] \subset B$ e quindi x è intero su A per l'implicazione 3) $\Longrightarrow$ 1) del teorema .

PROPOSIZIONE 8 - Sia A un sottoanello di B e siano $x_1,\dots,x_n$ elementi di B interi su A. Si ha allora:

(i) $A[x_1,\dots,x_n]$ è un A-modulo di tipo finito,

(ii) $A[x_1,\dots,x_n]$ è un anello intero su A .

Dim. Se $n = 1$,(i) è vera per il teorema precedente $(1)\Longrightarrow(2))$. Procediamo allora per induzione supponendo (i) vera per n-1; per l'ipotesi induttiva esistono allora $y_1,\dots,y_s \in B$ tali che $A[x_1,\dots,x_{n-1}]= \sum_{i=1}^{s} Ay_j$. Per ipotesi x_n è intero su A e quindi su $A[x_1,\dots,x_{n-1}]$; ne segue, per il teor.7 (1)$\Longrightarrow$2)) che $A[x_1,\dots,x_n]$ è un $A[x_1,\dots,x_{n-1}]$ -modulo di tipo finito,Quindi esistono $z_1,\dots,z_t \in B$ tali che $A[x_1,\dots,x_n]= \sum_{j=1}^{t} A[x_1,\dots,x_{n-1}]z_j =$
$= \sum_{i,j} A\, y_i\, z_j$. Ciò prova (i).

(ii) segue subito da (i) e dal corollario al teor.7.

Da (ii) si trae in particolare: la differenza e il prodotto di elementi interi su A sono interi su A. Possiamo quindi porre la

DEFINIZIONE - Sia A sottoanello di B. Il sottoanello di B formato dagli elementi interi su A dicesi chiusura integrale di A in B.

delle frazioni. Se la chiusura integrale di A in K coincide con A, A dicesi <u>integralmente chiuso</u>.

PROPOSIZIONE 9 - <u>Un anello fattoriale</u> A <u>è integralmente chiuso</u>.

<u>Dim</u>. Sia K il corpo delle frazioni di A . Sia $u \in K$ intero su A ; vogliamo provare che $u \in A$. Si può scrivere $u=x/y$ con $x,y \in A$, $y \neq 0$.

Se $x = 0$, si ha $u = 0 \in A$; possiamo dunque supporre che sia $x \neq 0$ e, di conseguenza, che x ed y siano primi fra loro. Si ha una relazione $(x/y)^n + a_1(x/y)^{n-1} + \ldots + a_n = 0$ $(a_i \in A)$ da cui → vedi Samuel Zariski pag 22 $x^n + a_1 x^{n-1} y + \ldots + a_n y^n = 0$. Ne segue che y divide x, ossia y è invertibile in quanto primo con x. In conclusione $u = x/y \in A$ c.v.d.

LEMMA DI ZARISKI

• TEOREMA 8 - <u>Siano</u> k <u>un corpo</u>, A <u>un sopranello di</u> k, $x_1, \ldots, x_n$ <u>elementi di</u> A <u>tali che</u> $k[x_1, \ldots, x_n]$ <u>sia un corpo</u> . <u>Allora gli elementi</u> x_i <u>sono algebrici su</u> k.

<u>Dim</u>. Per n=1 il teorema è vero in quanto se x è trascendente k[x] non è un corpo.[1] Possiamo dunque, induttivamente, ammettere il teorema vero per n-1 .

Poichè $K = k[x_1, \ldots, x_n]$ è un corpo si ha anche $K = k(x_1)[x_2, \ldots, x_n]$ dall'ipotesi induttiva segue allora che $x_2, \ldots, x_n$ sono algebrici su $k(x_1)$. Basta dunque provare che x_1 è algebrico su k, perchè allora l'algebricità delle x_i $(2 \leq i \leq n)$ su k seguirà dal teor. 6 del Cap. I.

L'algebricità delle x_i su $k(x_1)$ è espressa da relazioni del tipo :

$$(11) \quad b_0^{(i)} x_i^{m_i} + \ldots + b_{m_i}^{(i)} = 0 \qquad b_j^{(i)} \in k(x_1) \qquad (2 \leq i \leq n \ ; \ 0 \leq j \leq m_i)$$

(1) x ha inverso in k[x] cioè $x(a_0 x^n + a_1 x^{n-1} \ldots + a_n) = 1$ $\Rightarrow a_0 x^{n+1} + a_1 x^n \ldots + a_n x - 1 = 0 \Rightarrow$ x algebrico su k [oppure $k[x] \cong k[X]$]

si può porre:

$$b_j^{(i)} = p_j^{(i)}/q_j^{(i)} \quad \text{con} \quad p_j^{(i)},\ q_j^{(i)} \in k[x_1]$$

10. e moltiplicare ambo i membri delle (11) per $\prod_{j=0}^{m_i} q_j^{(i)}$. Non è quindi restrittivo supporre che si abbia nelle (11) $b_j^{(i)} \in k[x_1]$.

Dopo ciò, posto $m = \max\{m_i\}$ e $a = \prod_{i=2}^{n} b_0^{(i)}$, per ogni $i(2 \leq i \leq n)$ si moltiplica il primo membro di (11) per $a^{m-1} \prod_{j \neq i} b_0^{(j)} x_i^{m-m_i}$; allora, se $b_1, b_2, \ldots$ indicano opportuni elementi di $k[x_1]$ si hanno le relazioni

$$a^m x_i^m + b_1(a^{m-1} x_i^{m-1}) + b_2(a^{m-2} x_i^{m-2}) + \ldots = 0$$

da cui si deduce che per ogni i $a\,x_i$ è intero su $k[x_1]$. Ne segue, per la prop.8, che $k[x_1][a\,x_2, \ldots, a\,x_n]$ è intero su $k[x_1]$.

Sia ora f un elemento di $k(x_1)$. Si ha allora: $f \in k(x_1, \ldots, x_n) = k[x_1, \ldots, x_n] = k[x_1][x_2, \ldots, x_n]$, dunque si può scrivere $f = \sum a_{i_2 \ldots i_n} x_2^{i_2} \ldots x_n^{i_n}$ $(a_{i_2 \ldots i_n} \in k[x_1])$. Se $h = \max(i_2 + \ldots + i_n)$ si ha quindi $a^h f \in k[x_1][a\,x_2, \ldots, a\,x_n]$ che è intero su $k[x_1]$. Se x_1 fosse trascendente si avrebbe: $a^h f$ è intero su $k[x_1]$ che è integralmente chiuso (perché $\cong k[X]$ che è fattoriale e quindi (prop? integr. chiuso), dunque $a^h f \in k[x_1]$. Cioè (sostituendo x_1 con un'indeterminata X): per ogni $f \in k(X)$ esiste un intero h tale che $a^h f \in k[X]$; ma ciò è manifestamente assurdo(*), dunque x_1 è algebrico su k c.v.d.

(*) Basta prendere $f = \frac{1}{b}$ con b polinomio irriducibile di $k[X]$ non associato ad alcun polinomio irriducibile di a (ciò è possibile perchè in $k[X]$ vi sono infiniti polinomi irriducibili). [illegible] e perché?

vedi Es 42 pag 130

COROLLARIO 1 - *Sia* $\mathfrak{A}$ *un ideale proprio di* $k[X_1,\dots,X_n]$. *Allora* $\mathfrak{A}$ *ammette degli zeri algebrici in una opportuna estensione* K' *di* k (°).

Dim. L'ideale $\mathfrak{A}$ è contenuto in un ideale massimale $\mathfrak{m}$. E' chiaro che ogni zero di $\mathfrak{m}$ è anche uno zero di $\mathfrak{A}$, dunque basta provare che $\mathfrak{m}$ ammette degli zeri algebrici.

Sia $\psi : k[X_1,\dots,X_n] \longrightarrow k[X_1,\dots,X_n]/\mathfrak{m}$ l'omomorfismo canonico; si ponga $K' = k[X_1,\dots,X_n]/\mathfrak{m}$ e $x_i = \psi(X$ per ogni $i (1 \leq i \leq n)$.

Ora K' è un corpo, perchè $\mathfrak{m}$ è massimale, e avendosi $K' = k[x_1,\dots,$ gli elementi $x_1,\dots,x_n$ sono algebrici su k in virtù del teorema di Se $f(X_1,\dots,X_n) \in \mathfrak{m}$ si ha: $f(x_1,\dots,x_n) = \psi(f(X_1,\dots,X_n)) = 0$; ciò prova che il punto $x = (x_1,\dots,x_n)$ a coordinate in K' è uno zero algebrico di $\mathfrak{A}$.

COROLLARIO 2 - *Siano* K *un'estensione algebricamente chiusa di* k, $\mathfrak{A}$ *un ideale proprio di* $k[X_1,\dots,X_n]$. *Allora esiste in* K^n un punto $y = (y_1,\dots,y_n)$ *che è uno zero dell'ideale* $\mathfrak{A}$.

Dim. Sia $\mathfrak{m}$ un ideale massimale contenente $\mathfrak{A}$ e sia $K' = k[X_1,\dots,X_n]/\mathfrak{m} = k[x_1,\dots,x_n]$ il corpo introdotto nel corollario precedente; sia $\overline{K'}$ una chiusura algebrica di K'. Poichè K' è un'estensione algebrica di k (in quanto ogni x_i è algebrico su k) $\overline{K'}$ risulterà un'estensione algebrica di k e

(°) Per zero algebrico di $\mathfrak{A}$ in K' si intende evidentemente un punto $x = (x_1,\dots,x_n) \in K'^n$ tale che tutti gli elementi x_i sono algebrici su k ed in x si annullano tutti i polinomi di $\mathfrak{A}$.

dunque una chiusura algebrica di k.

Sia ora k_0 la chiusura algebrica di k in K. Poichè K è algebricamente chiuso, anche k_0 è algebricamente chiuso (Cap.I, prop.8) dunque k_0 è un'altra chiusura algebrica di k.

Allora, in virtù del teorema enunciato al termine del n° 4 del Cap.I esiste un k-isomorfismo $\sigma : \overline{K}' \longrightarrow k_0$ tra le due chiusure algebriche di k in questione.

Per quanto visto nel corollario precedente $x=(x_1,\dots,x_n)$ è uno zero di $\mathfrak{a}$; posto $\sigma(x_i) = y_i$ $(1 \leq i \leq n)$ e $y=(y_1,\dots,y_n)$ si ha: $y \in k_0^n \subset K^n$ è uno zero di $\mathfrak{a}$ e con ciò è provato il nostro asserto.

COROLLARIO 3 - <u>Sia</u> $\mathfrak{m}$ <u>un ideale massimale di</u> $k[X_1,\dots,X_n]$ <u>ed</u> $y = (y_1,\dots,y_n) \in K^n$ <u>un punto di</u> $\mathcal{V}(\mathfrak{m})$. <u>Allora</u> y <u>è uno</u> <u>zero algebrico di</u> $\mathfrak{m}$.

<u>Dim</u>. Sia φ l'omomorfismo di $k[X_1,\dots,X_n] \longrightarrow K$ definito da $\varphi(X_i)=y_i$ $(1 \leq i \leq n)$ e $\psi : k[X_1,\dots,X_n] \longrightarrow K' = k[X_1,\dots,X_n]/\mathfrak{m}$ l'omomorfismo canonico. L'ideale ker φ è costituito da tutti i polinomi nulli nel punto y, cioè $\ker\varphi = \mathcal{J}(\{y\})$; d'altra parte si ha $y \in \mathcal{V}(\mathfrak{m})$ da cui $\mathcal{J}(\{y\}) \supset \mathcal{J}(\mathcal{V}(\mathfrak{m})) \supset \mathfrak{m}$ e quindi $\mathfrak{m} \subset \ker\varphi$. Ne segue, per il 2° teorema di omomorfismo che

$$\begin{tikzcd} k[X_1,\dots,X_n] \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\psi"'] & K \\ K' \arrow[ur, "\nu"'] & \end{tikzcd}$$

esiste un omomorfismo che chiude il diagramma a lato. Posto $\psi(X_i)=x_i$ $(1 \leq i \leq n)$ si ha $K'=k[x_1,\dots,x_n]$ e $\nu(x_i) = y_i$ per ogni i; inoltre ν è un k-omomorfismo.

Ora, dal teorema 8 risulta che ogni x_i è algebrico su k e d'altra parte ogni relazione d'algebricità per x_i si trasforma, mediante ν, in una relazione d'algebricità per y_i. Pertanto ogni y_i è algebrico su k e y è uno zero algebrico c.v.d.

OSSERVAZIONE - Poichè un omomorfismo di corpi è sempre iniettivo, ν è un isomorfismo di $K'=k[x_1,\dots,x_n]$ in $k[y_1,\dots,y_n]$.

• TEOREMA 9 - (detto Nullstellensatz o Teorema degli zeri di Hilbert)- Sia K un'estensione, non necessariamente algebricamente chiusa, del corpo k. Le tre asserzioni seguenti sono equivalenti :

(a) Se $\mathfrak{a}$ è un ideale di $k[X_1,\dots,X_n]$ ed f è un polinomio nullo su $\mathcal{V}(\mathfrak{a})$, esiste un intero m tale che $f^m \in \mathfrak{a}$;

(b) $\mathcal{J}(\mathcal{V}(\mathfrak{a})) = \sqrt{\mathfrak{a}}$ per ogni ideale $\mathfrak{a}$ di $k[X_1,\dots,X_n]$;

(c) se $\mathfrak{a}$ è un ideale proprio di $k[X_1,\dots,X_n]$ si ha : $\mathcal{V}(\mathfrak{a}) \neq \emptyset$.

Inoltre, se K è un'estensione algebricamente chiusa di k, le tre asserzioni (a),(b),(c) sono vere.

Dim. E' chiaro che l'asserzione (a), esprimente la formulazione originaria del Nullstellensatz di Hilbert, è equivalente a (b); infatti dal corollario alla prop.5 segue che la parte non banale di (b) si riduce a $\mathcal{J}(\mathcal{V}(\mathfrak{a})) \subset \sqrt{\mathfrak{a}}$ e questo non è che un altro modo di esprimere (a).

E' inoltre immediato vedere che (b) $\Longrightarrow$(c) ;infatti se $\mathcal{V}(\mathfrak{a}) = \emptyset$ si ha da (b): $(1)= \mathcal{J}(\emptyset) = \sqrt{\mathfrak{a}}$ donde $1 \in \mathfrak{a}$ ed $\mathfrak{a}$ è quindi improprio.

Osserviamo poi che, se K è algebricamente chiuso l'asserzione (c) è vera, in quanto esprime in altro modo l'enunciato del corollario II al teorema 8.

Dunque la dimostrazione del teorema si riduce a provare la implicazione (c) $\Longrightarrow$ (b) che è quanto ora faremo. Se dunque $f \in \mathcal{J}(\mathcal{V}(\mathfrak{a}))$, dobbiamo mostrare che $f \in \sqrt{\mathfrak{a}}$.

Posto $\mathfrak{a} = (f_1,\dots,f_q)$ si consideri nell'anello $B=k[X_1,\dots,X_n,T]$ l'ideale $\mathfrak{b}=(f_1,\dots,f_q, 1-T f)$. Poichè ogni zero di $f_1,\dots,f_q$ è anche zero di f si ha $\mathcal{V}(\mathfrak{b}) = \emptyset$ e quindi, avendo assunto (c), si ha $\mathfrak{b}= (1)$. Sussiste allora una relazione del tipo

(12) $\quad 1=b_1f_1+\dots+b_qf_q+b(1-T f)$ dove $b_i, b \in B$ per $1 \leq i \leq q$.

Poniamo ora in (12) $T = \frac{1}{f}$ (°), ottenendo così la relazione:

(13) $\quad 1= b_1^* f_1+\dots+b_q^* f_q$

dove i b_i^* sono polinomi a coefficienti in k in $X_1,\dots,X_n,\frac{1}{f}$.

Moltiplicando allora i due membri di (13) per una potenza sufficientemente grande f^m di f si possono eliminare i denominatori nel secondo membro di (13) ottenendo così una relazione

$$f^m = a_1f_1+\dots+a_qf_q \quad (a_i \in k[X_1,\dots,X_n] \text{ per } 1 \leq i \leq n)$$

la quale dice che $f \in \sqrt{\mathfrak{a}}$ come volevasi.

OSSERVAZIONE- Se K non è un corpo algebricamente chiuso le asserzioni equivalenti (a),(b),(c) non sempre sono vere. Ad esempio, se ~~k=~~ K = $\mathbb{R}$ ed $\mathfrak{a}$ è l'ideale generato da X^2+1 in $\mathbb{R}[X]$ si ha: $\mathcal{V}(\mathfrak{a})=\emptyset$, in quanto X^2+1 non ha zeri reali e con ciò si contraddice evidentemente (c). Analogamente viene contraddetto (b), in quanto $\sqrt{\mathfrak{a}} = (X^2+1)$, mentre $\mathcal{J}(\mathcal{V}(\mathfrak{a})) = \mathcal{J}(\emptyset) = \mathbb{R}[X]$

(°) Ciò equivale precisamente a considerare la relazione trasformata di (12) mediante il $k[X_1,\dots,X_n]$ -omomorfismo φ di B nel corpo delle frazioni di $k[X_1,\dots,X_n]$ definito da $\varphi(T) = \frac{1}{f}$.

E' per questo motivo, oltre a quello di considerare varietà più "ricche" di punti(+), che noi ammetteremo sempre, da ora in poi, la validità della seguente

IPOTESI - L'estensione K di k, sulla quale si costruisce lo spazio K^n entro il quale si considerano le k-varietà, è un'estensione algebricamente chiusa di k.

Questa ipotesi ci consente di ritenere valide le asserzioni equivalenti del Nullstellensatz che noi applicheremo spesso nelle successive considerazioni.

Ci limiteremo soltanto talvolta ad osservare se qualche enunciato cade in difetto in mancanza della suddetta ipotesi o se, al contrario, è valido più in generale.

COROLLARIO 1 - Se un ideale $\mathfrak{a}$ coincide col proprio radicale, si ha:

$$\mathfrak{a} = \mathcal{J}(\mathcal{V}(\mathfrak{a}))$$

e quindi $\mathfrak{a} \in \mathbf{I}$ ($\mathbf{I}$ essendo l'insieme introdotto nel n°2).

Dim. La dimostrazione segue subito da (b) del teor.9.

Possiamo notare che l'esempio incluso nell'osservazione precedente, riguardante proprio un ideale coincidente col suo radicale, mette in evidenza come sia essenziale l'ipotesi " K algebricamente chiuso" per la validità del corollario 1.

I due corollari seguenti sono di grande importanza per l'ana-

(+) Si può notare, a questo proposito, che per la classificazione affine delle coniche e delle quadriche è già stato utile poter considerare i punti "complessi" delle coniche e delle quadriche.

lisi della struttura delle varietà; essi discendono facilmente dal corollario 1 e dalle premesse algebriche del n°1.

COROLLARIO 2 - Si ha :

(i) se $\mathfrak{p}$ è un ideale primo si ha $\mathfrak{p} = \mathcal{I}(\mathcal{V}(\mathfrak{p}))$ e $\mathcal{V}(\mathfrak{p})$ è irriducibile,

(ii) se $\mathfrak{q}$ è un ideale primario e $\mathfrak{p} = \sqrt{\mathfrak{q}}$, $\mathcal{V}(\mathfrak{q})$ coincide con $\mathcal{V}(\mathfrak{p})$ ed è pertanto irriducibile.

Dim. (i) Poichè $\mathfrak{p} = \sqrt{\mathfrak{p}}$ si ha $\mathfrak{p} = \mathcal{I}(\mathcal{V}(\mathfrak{p}))$ per il corollario 1; dal teorema 5 segue allora che $\mathcal{V}(\mathfrak{p})$ è irriducibile.

(ii) in virtù di (4) si ha : $\mathcal{V}(\mathfrak{q}) = \mathcal{V}(\mathfrak{p})$ che è irriducibile in conseguenza di (i).

Possiamo adesso dare una nuova dimostrazione,più complicata ma più precisa ,del teor.6.

Nel corollario seguente si tiene conto implicitamente del coroll.2.

COROLLARIO 3 - Ogni varietà è unione di un numero finito di varietà irriducibili. Più precisamente se $V = \mathcal{V}(\mathfrak{a})$, le componenti irriducibili di V sono le varietà associate ai primari isolati che compaiono in una(qualsiasi) decomposizione ridotta di $\mathfrak{a}$.

Dim. Sia

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{q}_1 \cap \mathfrak{q}_2 \cap \dots \cap \mathfrak{q}_s \cap \mathfrak{q}_{s+1} \cap \dots \cap \mathfrak{q}_t$$

una decomposizione ridotta di $\mathfrak{a}$ in cui abbiamo indicato con $\mathfrak{q}_1, \dots, \mathfrak{q}_s$ le componenti primarie isolate di $\mathfrak{a}$ e con poiché i $\mathfrak{q}_i$ [illegible] primi associati distinti

$\mathfrak{q}_{s+1}, \ldots, \mathfrak{q}_t$ le componenti immerse. Ne segue che ogni $\mathcal{V}(\mathfrak{q}_j)$ $(s+1 \leq j \leq t)$ è contenuta in una opportuna $\mathcal{V}(\mathfrak{q}_i)$ $(1 \leq i \leq s)$. Dalla (2) di Prop.4 si trae allora

$$\mathcal{V}(\mathfrak{a}) = \bigcup_{i=1}^{s} \mathcal{V}(\mathfrak{q}_i)$$

ciò che prova quanto volevasi.

OSSERVAZIONE - Il corollario 2 e (di conseguenza) il corollario 3 cessano di essere validi se K non è un'estensione algebricamente chiusa di k. Ad esempio se $k = K = \mathbb{Z}_2$ e $\mathfrak{p}$ è l'ideale primo generato da $X+Y$ in $k[X,Y]$, $\mathcal{V}(\mathfrak{p})$ consta dei due punti razionali $x_1 = (0,0)$ $x_2 = (1,1)$ e pertanto non è irriducibile.

COROLLARIO 4 - <u>Sia</u> V <u>una</u> k-<u>varietà di</u> K^n. <u>Ogni polinomio</u> $f \in k[X_1,\ldots,X_n]$ <u>nullo nell'insieme</u> V_0 <u>dei punti algebrici di</u> V <u>si annulla anche in ogni punto di</u> V <u>cioè</u>

$$\mathcal{I}(V_0) = \mathcal{I}(V).$$

<u>Dim</u>. Sia k_0 la chiusura algebrica di k in K; si ha $V_0 = k_0^n \cap V$. Se $\mathfrak{a}$ è un ideale di $k[X_1,\ldots,X_n]$ tale che $\mathcal{V}(\mathfrak{a}) = V$, la varietà definita da $\mathfrak{a}$ in k_0^n è evidentemente $\mathcal{V}(\mathfrak{a}) \cap k_0^n = V_0$ (poiché $V = \mathcal{V}(\mathfrak{a})$). Poichè k_0 è un corpo algebricamente chiuso, si ha per (b) del teor.9: $\mathcal{I}(V_0) = \sqrt{\mathfrak{a}}$. ~~Per ipotesi si ha $f \in \mathcal{I}(V_0)$, dunque $f \in \sqrt{\mathfrak{a}}$ onde $f \in \mathcal{I}(V)$ c.v.d.~~ (poiché $\sqrt{\mathfrak{a}} = \mathcal{I}(\mathcal{V}(\mathfrak{a}))$) e poiché K è alg. chiuso $\mathcal{I}(V) = \sqrt{\mathfrak{a}} \Rightarrow \mathcal{I}(V) = \mathcal{I}(V_0)$

OSSERVAZIONE- Anche il corollario precedente viene a cadere se K non è un corpo algebricamente chiuso. Si vedano in proposito gli esercizi.

[illegible]