CAPITOLO IV

DIMENSIONE E PARAMETRIZZAZIONE DELLE VARIETA'

(aggiungere alla fine [illegible] p. 105)

n°1 - Anelli delle coordinate e corpo delle funzioni razionali di una varietà- Dimensione di una varietà.

Sia V una varietà di K^n. Poniamo

$$k[V] = k[X_1,\ldots,X_n]/\mathcal{I}(V) \; ;$$

si dice che che $k[V]$ è l'anello delle coordinate di V o anche l'anello delle funzioni razionali intere su V.

Se $V = \mathcal{V}(\mathfrak{a})$, si ha per la (b) del teor.9 :

$$k[\mathcal{V}(\mathfrak{a})] = k[X_1,\ldots,X_n]/\sqrt{\mathfrak{a}} \; .$$

In particolare, se $\mathfrak{p}$ è un ideale primo si ha :

$$k[\mathcal{V}(\mathfrak{p})] = k[X_1,\ldots,X_n]/\mathfrak{p} \; .$$

Se V è una varietà irriducibile l'anello $k[V]$ è integro (per il teor.5 del cap.III) e si può considerare il suo corpo delle frazioni che indichiamo con $k(V)$; chiameremo $k(V)$ il corpo delle funzioni razionali su V.

OSSERVAZIONE - Due distinte varietà possono avere i rispettivi corpi delle funzioni razionali isomorfi,mentre gli anelli delle coordinate non sono isomorfi. Si vedano in proposito gli esercizi.

DEFINIZIONE - Sia V una k-varietà irriducibile di K^n. Il grado di trascendenza su k di $k[V]$ (o ciò che è lo stesso di $k(V)$) dicesi dimensione di V su k e si indica con $\dim_k(V)$ o,più

vedi def. pag. 31

$\dim_k V$ è finita: infatti per la prop 5 pag 33 gr. tr. $\left(\frac{k[X_1 \ldots X_n]}{k}\right) \geq$ dim

~~[illegible]~~ [illegible] finita [illegible] l'assiomi [illegible] 3.

semplicemente, con dim V quando non vi sia ambiguità. Se $V = \bigcup_{i=1}^{m} V_i$ è l'unione delle varietà irriducibili V_i si definisce così la dimensione di V :

$$\dim V = \max_{1 \leq i \leq m} \dim V_i$$

DEFINIZIONE - Una varietà V di dimensione d dicesi <u>pura</u> se tutte le sue componenti hanno dimensione d.

PROPOSIZIONE 1 - <u>Siano</u> V,W <u>due varietà irriducibili. Si ha</u> allora :

(i) $V \subset W \implies \dim V \leq \dim W$

(ii) $V = W \iff \dim V = \dim W$ e $V \subset W$ o $W \subset V$

<u>Dim</u>. (i). Da $V \subset W$ segue $\mathcal{J}(V) \supset \mathcal{J}(W)$ onde sussiste (per il 2° teorema di omomorfismo per gli anelli) un omomorfismo canonico surgettivo:

$$\sigma : k[W] \longrightarrow k[V] .$$

Allora, in virtù dell'asserto 1) della prop.5 del Cap.II° segue subito $\dim W \geq \dim V$, cioè (i).

Dall'asserto 2) della stessa proposizione ora citata dice che $\dim W = \dim V$ se e solo se σ è un isomorfismo, cioè $\ker \sigma = 0$. Poichè $\ker \sigma = \mathcal{J}(V)/\mathcal{J}(W)$, si ha $\ker \sigma = 0$ se e solo se $\mathcal{J}(W) = \mathcal{J}(V)$ il che equivale a $W = V$ (Cap.III, Prop.6, (ii)). Con ciò è provato (ii).

ESEMPI - 1) <u>Lo spazio</u> K^n <u>ha dimensione</u> n. Infatti $\mathcal{J}(K^n) = (0)$ (come abbiamo già visto, applicando il principio d'identità dei polinomi. Ne segue $k[K^n] = k[X_1, \ldots, X_n]$ e quindi

$\dim K^n = \mathrm{gr.tr.}(k[X_1, \ldots, X_n]/k) = n$ (Esempio 2), Cap.II, n°2).

2) <u>Ogni sottovarietà propria di K^n ha dimensione</u> $< n$.

Ciò segue subito dall'esempio precedente e dalla prop.1. manca l'inversa K ma alg. chiusi

3) <u>Ogni ipersuperficie di</u> K^n <u>è una varietà pura di dimensione</u> $n-1$.

Sia infatti (f) l'ideale principale definente l'ipersuperficie e sia $f= f_1 f_2 \ldots f_t$ una decomposizione di f in fattori irriducibili. Ogni f_i genera un ideale primo e quindi la relazione $\mathcal{V}(f) = \mathcal{V}(f_1) \cup \mathcal{V}(f_2) \cup \ldots \cup \mathcal{V}(f_t)$,(+) che si trae dalla prop.4 del Cap.III, fornisce la decomposizione di $\mathcal{V}(f)$ in varietà irriducibili.

Basta quindi dimostrare che per ogni $i (1 \leq i \leq t)$ si ha $\dim \mathcal{V}(f_i) = n-1$. Poichè l'ideale (f_i) è primo si ha $\mathcal{I}(\mathcal{V}(f_i)) = (f_i)$ e quindi si tratta di provare che il grado di trascendenza di $k[X_1, \ldots, X_n]/(f_i)$ su k è $n-1$; ciò segue dalla prop.3 del Cap.II.

La proprietà ora dimostrata nell'esempio 3) può essere invertita nel modo seguente

PROPOSIZIONE 2 - <u>Una varietà pura</u> V <u>di dimensione</u> $n-1$ <u>è una ipersuperficie</u>.

<u>Dim</u>. Sia $V = \bigcup_{i=1}^{t} V_i$ la decomposizione di V in componenti irriducibili. Dal teorema 5 del Cap.III segue che l'ideale $\mathcal{I}(V_i)$ è primo per ogni i $(1 \leq i \leq t)$.

L'ideale $\mathcal{I}(V_i)$ non è nullo; infatti, avendosi $\dim V_i = n-1$, V_i è distinta da K^n e quindi (Cap.III, prop.6, (ii)) si ha $\mathcal{I}(V_i) \neq \mathcal{I}(K^n) = (0)$. Quindi in $\mathcal{I}(V_i)$ esiste un polinomio non nullo di cui almeno un fattore irriducibile appartiene a $\mathcal{I}(V_i)$ che

---

(+) Qui, per brevità, si è posto $\mathcal{V}(f)$ in luogo di $\mathcal{V}((f))$, ecc.

è primo. Sia dunque f_i un polinomio irriducibile appartnente a $\mathcal{J}(V_i)$.

Si ha quindi $\mathcal{V}(f_i) \supset V_i$ dove entrambe le varietà in questione hanno dimensione n-1 (si tenga presente l'esempio 3). Ne segue per (ii) di prop.1 $V_i = \mathcal{V}(f_i)$.

Posto allora $f = f_1 f_2 \dots f_t$ si ha :

$$\mathcal{V}(f) = \mathcal{V}(f_1 f_2 \dots f_t) = \mathcal{V}(f_1) \cup \dots \cup \mathcal{V}(f_t) = \bigcup_{i=1}^{t} V_i = V \quad \text{c.v.d.}$$

OSSERVAZIONE - Il risultato precedente cade in difetto se la varietà non è pura. L'esempio 3 mostra infatti che le ipersuperficie sono sempre varietà pure.

ALTRI ESEMPI.

× 4) <u>Un punto razionale di K^n è una varietà irriducibile di dimensione</u> 0 . Sia $y = (y_1, \dots, y_n) \in k^n \subset K^n$ il punto razionale in questione. Dalla definizione risulta subito che il punto y è una varietà irriducibile. Si ha $\mathcal{J}(y) = (X_1 - y_1, \dots, X_n - y_n)$. L'inclusione $\supset$ è infatti evidente. D'altra parte se $f \in \mathcal{J}(y)$, posto $f = g + c$ con $g \in (X_1 - y_1, \dots, X_n - y_n)$ e $c \in k$ (+), avendosi $f(y_1, \dots, y_n) = g(y_1, \dots, y_n) =$ si ha $c = 0$ e quindi $f = g \in (X_1 - y_1, \dots, X_n - y_n)$.

(+) Si può infatti scrivere $f(X_1, \dots, X_n) = q_1(X_1 - y_1) + r_1(X_2, \dots, X_n)$, $r_1(X_2, \dots, X_n) = q_2(X_2 - y_2) + r_2(X_3, \dots, X_n)$, ecc. da cui $f = q_1(X_1 - y_1) + \dots + q_n(X_n - y_n) + c$ con $c \in k$.

Si può anche ragionare così: l'endomorfismo $\sigma : k[X_1, \dots, X_n] \longrightarrow k[X_1, \dots, X_n]$ definito da $\sigma(X_i) = X_i - y_i$ $(1 \le i \le n)$ è manifestamente un automorfismo $(\sigma^{-1}(X_i) = X_i + y_i)$; ne segue $k[X_1, \dots, X_n] = k[X_1 - y_1, \dots, X_n - y_n]$ e quindi l'asserto.

L'anello delle coordinate del punto y è dunque $k[X_1,\dots,X_n]/(X_1-y_1,\dots,X_n-y_n)$ che è isomorfo a k in quanto l'omomorfismo $\varphi : k[X_1,\dots,X_n] \longrightarrow k$ definito da $\varphi(X_i)= y_i$ $(1\le i\le n)$ ha evidentemente per nucleo $\mathcal{I}(y)$. Dunque $\dim\{y\} = \operatorname{gr\,tr}(k/k)=0$ c.v.d.

5) L'ideale $\mathfrak{a}=(X(X-1),XY)=(X)\cap(X-1,Y)=(X)(X-1,Y)$ di $k[X,Y]$ definisce una varietà riducibile ed impura di dimensione 1. Infatti l'ideale (X) definisce la retta il cui anello delle coordinate è $k[Y]$[1] e la cui dimensione è 1. La varietà dell'ideale $(X-1,Y)$ è il punto razionale di coordinate (1,0) che non sta sulla retta anzidetta. Pertanto la varietà è riducibile e ha dimensione 1.

6) Le varietà pure di <u>dimensione</u> 1 si dicono <u>curve</u>. Particolare importanza hanno le curve piane, cioè le ipersuperficie di K^2.

Le varietà di <u>dimensione</u> 2 si dicono <u>superficie</u>; le ipersuperficie di K^3 sono particolari superficie.

7) <u>Varietà lineari</u>. Si consideri l'ideale $\mathfrak{a}$ di $k[X_1,\dots,X_n]$ generato dalle prime r indeterminate : $\mathfrak{a}=(X_1,\dots,X_r)$; esso è evidentemente un ideale primo e quindi si ha : $k[\mathcal{V}(\mathfrak{a})] = k[X_1,\dots,X_n]/\mathfrak{a} = k[X_{r+1},\dots,X_n]$ da cui si deduce anche che $\dim\mathcal{V}(\mathfrak{a}) = n-r$. $\mathcal{V}(\mathfrak{a})$ dicesi <u>iperspazio</u> (coordinato) e gli elementi di $\mathcal{V}(\mathfrak{a})$ sono le n-uple $(x_1,\dots,x_n)\in K^n$ tali che $x_1=x_2=\dots=x_r=0$.

Se $b_1,\dots,b_r$ sono elementi di k la varietà definita dallo ideale $(X_1+b_1,\dots,X_r+b_r)$ di $k[X_1,\dots,X_n]$ è anch'essa, come si vede ragionando allo stesso modo, una varietà di dimensione n-r che

(1) $k[V] = k[X_1 \ \ X_n]/\mathcal{I}(V)$ V è la retta; bisogna dimostrare che $(X) = \mathcal{I}(V)$ ciò non vale sempre (se $k=\mathbb{Z}_2$ non si ma per K algebricamente chiuso sì

dicesi ancora iperspazio.

Più generalmente si dice <u>iperspazio</u> o <u>varietà lineare di dimensione</u> $n-r$ la varietà irriducibile associata a un ideale generato da r polinomi lineari ($r \leq n$)

$$\begin{array}{c} a_{11}X_1+\dots+a_{1n}X_n+b_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{r1}X_1+\dots+a_{rn}X_n+b_r \end{array}$$

tali che la caratteristica della matrice (a_{ij}) sia massima(+).

Per vedere che $\mathcal{V}(\mathfrak{a})$ è irriducibile e ha dimensione $n-r$ si considerino n nuove indeterminate $Y_1,\dots,Y_n$ e il k-omomorfismo

$$\varphi : k[Y_1,\dots,Y_n] \longrightarrow k[X_1,\dots,X_n]$$

definito da $\varphi(Y_i)=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}X_j$ $(1\leq i\leq r)$, $\varphi(Y_i)=X_i$ $(r+1\leq i\leq n)$, avendo supposto che il minore non nullo di ordine r della matrice (a_{ij}) sia costituito dalle sue prime r colonne; allora φ risulta invertibile e dunque φ è un isomorfismo.

Si ha evidentemente $\varphi^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{1j}X_j+b_1,\dots,\sum_{j=1}^{n} a_{rj}X_j+b_r\right)=$ $=(Y_1+b_1,\dots,Y_r+b_r)$ e poichè quest'ultimo definisce una varietà lineare di dimensione $n-r$ si ha l'asserto.

Un iperspazio di <u>dimensione</u> $n-1$, cioè definito da un solo polinomio, dicesi (in armonia con quanto precede) <u>iperpiano</u>.

Un iperspazio di <u>dimensione</u> 1 dicesi <u>retta</u>, mentre se la <u>dimensione</u> è 2 l'iperspazio dicesi <u>piano</u>.

(+) E' questo l'unico caso che abbia interesse in quanto ad esso ci possiamo sempre ridurre, a meno che il sistema lineare considerato sia privo di soluzioni nel qual caso l'ideale $\mathfrak{a}$ è improprio.

$k[X.$ FINIZIONE - Due punti $y = (y_1,\dots,y_n)$ e $z =(z_1,\dots,z_n)$ di K algebrici su k si dicono <u>coniugati</u> se per ogni $i (1 \leq i \leq n)$ y_i e z_i sono coniugati su k.

TEOREMA 1 - <u>Sia $\mathfrak{p}$ un ideale primo di $k[X_1,\dots,X_n]$ si ponga</u> $k[x_1,\dots,x_n] = k[X_1,\dots,X_n]/\mathfrak{p}$. <u>Le seguenti condizioni sono equivalenti</u> :

(a) $\dim \mathcal{V}(\mathfrak{p}) = 0$,

(b) <u>$\mathfrak{p}$ è massimale</u> ,

(c) <u>$\mathcal{V}(\mathfrak{p})$ è costituita da un numero finito di punti algebrici fra loro coniugati</u>,

(c') <u>$\mathcal{V}(\mathfrak{p})$ è costituita da un numero finito di punti</u>,

(d) <u>$\mathfrak{p}$ è generato da n polinomi</u>

$f_1(X_1), f_2(X_1,X_2),\dots,f_n(X_1,\dots,X_n)$

tali che l'i-esimo polinomio f_i dipende solo dalle prime i indeterminate ed $f(x_1,\dots,x_{i-1},X_i)$ è il polinomio minimo di x_i su $k(x_1,\dots,x_{i-1}) = k[x_1,\dots,x_{i-1}]$.

<u>Dim</u>. Noi seguiremo il seguente schema di dimostrazione:

$$\begin{tikzcd}
(a) \arrow[rr, Leftrightarrow] & & (b) \arrow[dl, Rightarrow] \arrow[dd, Rightarrow] \\
& (c) \arrow[dl, Rightarrow] & \\
(c') \arrow[uu, Rightarrow] & & (d) \arrow[ll, Rightarrow]
\end{tikzcd}$$

(a) $\Longleftrightarrow$ (b) Si ha:

$\dim(\mathcal{V}(\mathfrak{p})) = 0 \Longleftrightarrow \text{gr.tr.}(k(x_1,\dots,x_n)/k) = 0 \Longleftrightarrow x_1,\dots,x_n$ sono algebrici su $k \Longleftrightarrow k(x_1,\dots,x_n) = k[x_1,\dots,x_n] \Leftrightarrow \mathfrak{p}$ è massimale

(avendo tenuto conto nella penultima implicazione del teor.8 del Cap.III)

(b) $\Longrightarrow$(c). Sia $y=(y_1,\dots,y_n)$ uno zero di $\mathcal{V}(\mathfrak{p})$;un tale y esiste per il coroll.2 al teor.8. Sia $z=(z_1,\dots,z_n)$ un altro zero di $\mathcal{V}(\mathfrak{p})$.

Dalla dimostrazione del coroll.3 al solito teor. 8 segue che se φ è il k-omomorfismo di $k[X_1,\dots,X_n]$ in K definito da $\varphi(X_i) = y_i$ e γ è l'omomorfismo canonico di $k[X_1,\dots,X_n]$ in $K' = k[x_1,\dots,x_n]= k[X_1,\dots,X_n]/\mathfrak{p}$,sussiste un k-omomorfismo $\nu : K' \longrightarrow K$ tale che $\nu(x_i) = y_i$. Analogamente si prova la esistenza di un k-omomorfismo $\mu : K' \longrightarrow K$ tale che $\mu(x_i)= z_i$.

Ricordiamo che,per il teor.8, ogni x_i è algebrico su k; sia pertanto f_i il polinomio minimo di x_i. Tramite l'omomorfismo ν risulta allora che f_i è il polinomio minimo di y_i, mentre mediante μ f_i risulta il polinomio minimo di z_i. Pertanto i due elementi y_i e z_i di K risultano fra loro coniugati.

Indicati allora con $m_1,\dots,m_n$ i gradi rispettivi di $f_1,\dots,f_n$ si trae che il numero dei punti di $\mathcal{V}(\mathfrak{p})$ non può superare $m_1 m_2 \dots m_n$ in quanto la coordinata i-esima di tali punti può assumere come valore soltanto una delle m_i radici del polinomio f_i.

(c) $\Longrightarrow$(c') : ovvio.

(b) $\Longrightarrow$(d) Per n=1 l'asserto è ovvio,onde si procederà per induzione su n. Osserviamo dapprima che tutte le x_i sono algebriche su k perchè $k[x_1,\dots,x_n]$ è un corpo. Sia

$\gamma : k[X_1,\dots,X_n] \longrightarrow k[x_1][X_2,\dots,X_n]$ l'omomorfismo defi

$$\begin{tikzcd} k[X_1,\dots,X_n] \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\psi"'] & k[x_1,\dots,x_n] \\ k[x_1][X_2,\dots,X_n] \arrow[ur, "\nu"'] & \end{tikzcd}$$

nito da $\psi(X_1) = x_1$

$\psi(X_i)=X_i$ se $i \geq 2$

E' chiaro allora che l'omomorfismo φ del diagramma si fattorizza nel prodotto $\nu \circ \psi$ .Si ha allora:

$\ker\psi \subset \ker\varphi = \mathfrak{p}$ onde (per il II teorema di omomorfismo) $\ker\nu = \psi(\mathfrak{p})$. Allora $\bar{\mathfrak{p}} = \psi(\mathfrak{p})$ è massimale in $k[x_1][X_2,\dots,X_n]$ e $k[x_1]\ [x_2,\dots,x_n]$ è canonicamente isomorfo a $k[x_1][X_2,\dots,X_n]\ /\bar{\mathfrak{p}}$.

Per l'ipotesi induttiva $\bar{\mathfrak{p}}$ è allora generato da n-1 polinomi $f_2(x_1,X_2)$, $f_3(x_1,X_2,X_3),\dots,f_n(x_1,X_2,\dots,X_n)$, tali che ogni $f_i(x_1,\dots,x_{i-1},X_i)$ è il polinomio minimo di x_i su $k(x_1,\dots,x_{i-1})$

Sia ora $f_1(X_1)$ il polinomio minimo di x_1, onde $\ker\psi = (f_1)$; siano inoltre $f_2(X_1,X_2),f_3(X_1,X_2,X_3),\dots,f_n(X_1,\dots,X_n)$ tali che $\psi\,(f_i(X_1,X_2,\dots,X_i)) = f_i(x_1,X_2,\dots,X_i)$. Si ha allora :

$$\mathfrak{p} = \psi^{-1}(\bar{\mathfrak{p}}) = \ker\varphi + (f_2(X_1,X_2),\dots,f_n(X_1,\dots,X_n)) =$$
$$= (f_1(X_1),f_2(X_1,X_2),\dots,f_n(X_1,\dots,X_n)) \qquad \text{c.v.d.}$$

(d) $\Longrightarrow$(c') Posto $m_i = \partial_{X_i} f_i$ (=grado di f_i rispetto a X_i) vi sono m_1 al più possibilità di scelta per la prima coordinata y_1 di un punto di $\mathcal{V}(\mathfrak{p})$ che è radice del polinomio $f_1(X_1)$,quindi m_2 possibilità al più per la seconda coordinata y_2 che è radice di $f_2(y_1,X_2)$,ecc.; i punti di $\mathcal{V}(\mathfrak{p})$ sono dunque al più $m_1 m_2,\dots,m_n$.

(c') $\Longrightarrow$ (a) - Si indichino con

$y^{(i)}=(y_1^{(i)},y_2^{(i)},\dots,y_n^{(i)})$ $(1\leq i\leq m)$ gli zeri algebrici di $\mathcal{V}(\mathfrak{p})$ (si ha $m\geq 1$ per il coroll.4 al teor.9 o, se si vuole, per il coroll.2 al teor.8, Cap.III) e sia $f_i(X_1)$ il polinomio minimo di $y_1^{(i)}$. Allora il polinomio $\prod_{i=1}^{m} f_i(X_1)$ si annulla in tutti gli zeri algebrici di $\mathcal{V}(\mathfrak{p})$ e dunque su $\mathcal{V}(\mathfrak{p})$; si ha pertanto $\prod_{i=1}^{m} f_i(X_1)\in\mathcal{J}(\mathcal{V}(\mathfrak{p}))=\mathfrak{p}$. Ne segue, essendo $\mathfrak{p}$ primo, che almeno uno dei fattori $f_i(X_1)$ sta in $\mathfrak{p}$. Supponiamo quindi, ad esempio, che sia $f_1(X_1)\in\mathfrak{p}$.

Si ha dunque $f_1(x_1)=0$, onde x_1 è algebrico su k. In modo analogo si prova che $x_2,\dots,x_n$ sono algebrici su k, onde si ha $\dim\mathcal{V}(\mathfrak{p})=\text{gt.tr.}(k[x_1,\dots,x_n]/k)=0$.

COROLLARIO - Se $\dim(V)=0$, V è costituita da un numero <u>finito di punti e viceversa</u>. <u>Inoltre $\mathcal{J}(V)$ è intersezione di un numero finito di ideali massimali</u>.

<u>Dim</u>. Sia $V=\bigcup_{i=1}^{m} V_i$ colle V_i irriducibili, si ha: $\dim V=0\Longleftrightarrow\dim V_i=0$ $(1\leq i\leq m)$. Dalla teor.1 segue subito la prima asserzione. Inoltre, dalla (6) di prop.5, Cap.III si trae $\mathcal{J}(V)=\bigcap_{i=1}^{m}\mathcal{J}(V_i)$; se $\dim V=0$, $\mathcal{J}(V_i)$ è massimale per la teor.1 e si ha l'asserto.

Nel caso in cui il corpo k sia algebricamente chiuso il teor.1 assume la forma seguente:

PROPOSIZIONE 3 - <u>Nelle ipotesi del teor.1 sia inoltre k algebricamente chiuso. Allora le condizioni seguenti sono equivalenti</u>:

(a) $\dim \mathcal{V}(\mathfrak{p}) = 0$,

(b) $\mathfrak{p}$ è massimale,

(c) $\mathcal{V}(\mathfrak{p})$ è costituita da un sol punto razionale $y=(y_1,\ldots,y_n)$

(c') $\mathcal{V}(\mathfrak{p})$ consta di un sol punto,

(d) $\mathfrak{p}$ è generato dai polinomi $X_1-y_1,\ldots,X_n-y_n$.

Dim. Osserviamo anzitutto che se k è algebricamente chiuso ogni punto algebrico è un punto razionale; inoltre ogni punto razionale costituisce una varietà e quindi una varietà irriducibile costituita da un n° finito di punti razionali si riduce necessariamente ad un sol punto.

Tenendo conto di quanto precede e del teor.1 si ottengono le implicazioni (a)$\Longleftrightarrow$(b)$\Longleftrightarrow$(c)$\Longrightarrow$(c')

Se $\mathcal{V}(\mathfrak{p})$ si riduce ad un punto esso è necessariamente algebrico (Cap.III,coroll.4 al teor.9) e quindi razionale per quanto ora detto; dunque (c')$\Longrightarrow$(c).

Ricordiamo ora che nell'esempio 4) abbiamo visto che l'ipotesi $\mathcal{V}(\mathfrak{p}) = y$ con y razionale implica dapprima $(X_1-y_1,\ldots,X_n-y_n) = \mathcal{J}(\mathcal{V}(\mathfrak{p})) = \mathfrak{p}$ e quindi $\dim \mathcal{V}(\mathfrak{p}) = 0$; in altre parole si ha (c)$\Longrightarrow$(d)$\Longrightarrow$(a) c.v.d.

OSSERVAZIONE - Dalla prop.3 segue che se i punti di K^n sono tutti razionali, cioè se $k = K$, le varietà di K^n di dimensione 0 sono tutti e soli gli insiemi di K^n costituiti da un numero finito di punti.

Ciò però non è vero in generale.Dal corollario al teor.1 si può dire soltanto che una varietà di dimensione 0 è costituita da un numero finito di punti ma non viceversa.D'altronde già sappiamo che un punto di K^n può non essere una k-varietà (esempio 6 del n°1, Cap.III).

Se K è un'estensione algebrica di k si può dire questo : la minima sottovarietà di K^n contenente un insieme finito $y^{(i)} = (y_1^{(i)},\dots,y_n^{(i)})(i \le 1 \le m)$ di punti di K^n ha dimensione 0 . Infatti se con $f_j^{(i)}(X_j)$ si indica il polinomio minimo di $y_j^{(i)}$ il punto $y^{(i)}$ è contenuto nella varietà definita dall'ideale $(f_1^{(i)}(X_1), f_2^{(i)}(X_2),\dots,f_n^{(i)}(X_n))$ che contiene assieme a $y^{(i)}$ tutti i suoi coniugati e che ha evidentemente dimensione 0.

Se però K non è estensione algebrica di k può accadere che la minima varietà contenente un punto di K^n abbia dimensione ≥ 1. Ad esempio, se K è una chiusura algebrica di k(T) la minima varietà di K contenente il punto T è tutto K. Infatti l'unico polinomio di k[X] annullato da T è il polinomio nullo, onde $\mathcal{V}(\mathcal{I}(T)) = \mathcal{V}((0)) = K$.

Nelle applicazioni si ha molto spesso $K = \mathbb{C}$ e $k = \mathbb{C}$ oppure $k = \mathbb{R}$. In tal caso si può tener conto delle due osservazioni precedenti.

n° 2. Significato intuitivo o topologico della dimensione- Il teorema "Primbasis". Rappresentazioni monoidali.

Nello spazio K^n si può introdurre una topologia definendo chiusi i sottoinsiemi di K^n che sono k-varietà algebriche; che si tratti effettivamente di una topologia (che viene chiamata topologia di Zariski) risulta da ciò:

(i) l'insieme vuoto $\emptyset$ è la varietà definita dall'ideale (1);

(ii) K^n è la varietà definita dall'ideale (0) ;

(iii) l'unione finita di varietà è una varietà in virtù di Prop.4 ,(2);

(iv) l'intersezione di una famiglia qualsiasi di varietà risulta una varietà in virtù di Prop.4,(3).

Gli aperti di K sono quindi i complementari di *certi* sottoinsiemi finiti di K.

Tenuto conto dell'osservazione posta al termine del n° 1 possiamo dire : *se* $k = K$ *gli aperti di* K *sono tutti e soli i complementari dei sottoinsiemi finiti di* K, *inoltre, se* K *è un'estensione algebrica di* k *per ogni sottoinsieme* I *finito di* K *esiste un aperto non vuoto di* K *disgiunto da* I.

PROPOSIZIONE 4 - *Sia* $f(X_1,\dots,X_n) \in k[X_1,\dots,X_n]$; *allora* :

(i) *si possono scegliere successivamente* $y_1,\dots,y_n$ *in opportuni complementari di sottoinsiemi finiti di* K (*non necessariamente aperti*)(+) *in modo che* $f_*(y_1,\dots,y_n) \neq 0$.

(ii) *supposto inoltre* $f(X_1,\dots,X_n) \cap k[X_1,\dots,X_{n-1}] \neq 0$, *si possono scegliere successivamente* $y_1,\dots,y_{n-1}$, *in opportuni complementari di sottoinsiemi finiti di* K(+) *in modo che sia quindi determinato un numero finito di valori* $y_n \in K$ *per i quali risulti* $f(y_1,\dots,y_n) = 0$.

(+) Se K è un'estensione algebrica di k si vede, tenendo conto delle considerazioni precedenti, che nell'enunciato si può sostituire "aperti di K" agli "opportuni complementari..."

Dim. (i) per $n=1$ l'asserto è ovvio in quanto basta escludere per y_1 i punti di $\mathcal{V}(f_1(X_1))$ che sono un numero finito. Si procede quindi per induzione, scrivendo :

$$f(X_1,\dots,X_n)=\sum_{i=0}^{m} f_i(X_1,\dots,X_{n-1})\, X_n^i$$

e scegliendo $y_1,\dots,y_{n-1}$ in modo che $f_m(y_1,\dots,y_{n-1}) \neq 0$ .Dopo ciò si sceglie y_n escludendo per esso quei valori in numero finito che annullano il polinomio $\sum_{i=0}^{m} f_i(y_1,\dots,y_{n-1})\, X_n^i$.

(ii)- Poichè $f(X_1,\dots,X_n) \cap k[X_1,\dots,X_{n-1}] \neq 0$ si può porre

$$f(X_1,\dots,X_n) = \sum_{i=0}^{m} f_i(X_1,\dots,X_{n-1})\, X_n^i \quad \text{con} \quad m \geqslant 1 .$$

Dopo ciò, in virtù di (i), si possono determinare successivamente $y_1,\dots,y_{n-1}$ in modo che $f_m(y_1,\dots,y_{n-1}) \neq 0$; dopo ciò si avrà $f(y_1,\dots,y_n) = 0$ se e solo se y_n è una radice del polinomio di grado positivo $\sum_{i=0}^{m} f_i(y_1,\dots,y_{n-1})X_n^i \in K[X_n]$, c.v.d.

La (ii) di prop.4 mette in luce il significato topologico intuitivo del fatto che la dimensione dell'ipersuperficie $\mathcal{V}(f(X_1,\dots,X_n))$ è $n-1$; la possibilità di scegliere con arbitrio "pressochè totale" le prime $n-1$ coordinate $y_1,\dots,y_{n-1}$ per poterle completare mediante un'opportuna y_n ad un punto di $\mathcal{V}(f)$ è il fatto geometrico corrispondente alla trascendenza su k delle prime $n-1$ variabili in $k[X_1,\dots,X_n]/(f)$ e all'algebricità dell'ultima sulle rimanenti.

OSSERVAZIONE - Se il polinomio

$$f(X_1,\dots,X_n) = \sum_{i=0}^{m} f_i(X_1,\dots,X_{n-1})X_n^i$$

il coefficiente $f_m(X_1,\dots,X_{n-1})$ di X_n^m è una costante non nulla di k, nel qual caso f dicesi <u>regolare</u> in X_n, per determinare un punto di $\mathcal{V}(f)$ si possono scegliere le prime n-1 coordinate $y_1,\dots,y_{n-1}$ in modo totalmente arbitrario. Ora, si può dimostrare che esiste sempre un conveniente automorfismo σ di $k[X_1,\dots,X_n]$ addirittura lineare se k è infinito tale che $\sigma(f)$ è regolare in X_n (cfr. esercizi).

Ci proponiamo adesso di attribuire un significato geometrico intuitivo alla dimensione di una varietà qualsiasi. Ciò può farsi in più modi ma in ogni caso si incontrano maggiori difficoltà che per le ipersuperficie; anzi, bisogna riportarsi mediante opportuna "eliminazione" di alcune indeterminate al caso delle ipersuperficie.

In questo numero noi daremo un risultato generale (Primbasis) che può assumere in certi casi una forma particolarmente significativa (rappresentazione monoidale delle varietà) che vedremo successivamente; non ci occuperemo invece del metodo di eliminazione mediante i risultanti che è il più completo e il più classico ma richiede però una certa laboriosità.

Si ponga $A = k[X_1,\dots,X_n]$. Sia V una varietà irriducibile di dimensione d $(0 \le d \le n-1)$ di K^n definita da un ideale primo $\mathfrak{p} = (p_1,\dots,p_s)A$. Posto $A/\mathfrak{p} = k[x_1,\dots,x_n]$ possiamo supporre che $x_1,\dots,x_d$ siano algebricamente indipendenti su k, cioè:

$$(1) \qquad k[X_1,\dots,X_d] \cap \mathfrak{p} = (0)$$

e che ogni x_i $(d+1 \le i \le n)$ sia algebrico su $k(x_1,\dots,x_d)$.

Si consideri l'anello $A^* = k(X_1,\dots,X_d)[X_{d+1},X_{d+2},\dots,X_n]$ e l'estensione di $\mathfrak{p}$ ad A^* cioè l'ideale $\mathfrak{p}^* = (p_1,\dots,p_s)A^*$.

Sia $i : A \longrightarrow A^*$ l'immersione canonica.

LEMMA 1 - Si ha :

(a) $i^{-1}(\mathfrak{p}^*) = \mathfrak{p}^* \cap A = \mathfrak{p}$,

(b) l'ideale $\mathfrak{p}^*$ è primo,

(c) l'omomorfismo i induce, per passaggio al quoziente, un omomorfismo iniettivo

$$\nu : A/\mathfrak{p} \longrightarrow A^*/\mathfrak{p}^*$$

Dim. (a) E' chiaro che $i^{-1}(\mathfrak{p}^*) \supset \mathfrak{p}^* \cap A \supset \mathfrak{p}$; basta quindi provare che $i^{-1}(\mathfrak{p}^*) \subset \mathfrak{p}$ .Ora se $a \in i^{-1}(\mathfrak{p}^*)$, si ha $i(a) \in \mathfrak{p}^* = (p_1, \ldots, p_s)A^*$ cioè $a = p_1q_1 + \ldots + p_sq_s$ ove $q_i \in A^*$ $(1 \leq i \leq s)$, onde se $h \in k[X_1, \ldots, X_d]$ è un multiplo comune dei denominatori dei q_i si ha $h\,a \in \mathfrak{p}$; ma $\mathfrak{p}$ è primo e, in virtù di (1), $h \notin \mathfrak{p}$ .Ne segue $a \in \mathfrak{p}$.

(b) Da (a) segue subito che $\mathfrak{p}^*$ è proprio. Se poi $f\,g \in \mathfrak{p}^*$ con $f, g \in A^*$ si può porre

$f = f_1/h_1$, $g = g_1/h_2$ con $f_1, g_1 \in A$, $h_1, h_2 \in k[X_1, \ldots, X_d]$.

Dalla relazione $f_1g_1/h_1h_2 \in (p_1, \ldots, p_s)A^*$ si trae (liberandosi dai denominatori) l'esistenza di $h \in k[X_1, \ldots, X_d]$ tale che $h\,f_1g_1 \in (p_1, \ldots, p_s)A = \mathfrak{p}$ .Ma $h \notin \mathfrak{p}$ in quanto vale (1), dunque si ha $f_1 \in \mathfrak{p}$ oppure $g_1 \in \mathfrak{p}$ e quindi $f \in \mathfrak{p}^*$ oppure $g \in \mathfrak{p}^*$.

(c) Se σ è l'omomorfismo canonico $A^* \longrightarrow A^*/\mathfrak{p}^*$, posto $\varphi = \sigma \circ i$ si ha $\ker \varphi = i^{-1}(\mathfrak{p}^*) = \mathfrak{p}$, onde, per il primo teorema di omomorfismo, si ha l'asserto.

Da quanto precede risulta che si può porre $A^*/\mathfrak{p}^* = k(X_1, \ldots, X_d)\,[x_{d+1}, \ldots, x_n]$, cioè si possono indicare collo stesso simbolo le immagini di $X_{d+1},\dots,X_n$ in $A^*/\mathfrak{p}^*$.

Poichè $x_{d+1},\dots,x_n$ sono algebriche su $k(X_1,\dots,X_d)$ l'anello $A^*/\mathfrak{p}^*$ è un corpo e $\mathfrak{p}^*$ è massimale; allora, in virtù del teor.1 ammette un sistema di generatori costituiti da n-d polinomi $f_1^*(X_{d+1}), f_2^*(X_{d+1},X_{d+2}),\dots$ a coefficienti in $k(X_1,\dots,X_d)$e tali che $f_i(x_1,\dots,x_{d+i-1},X_{d+i})$ è il polinomio minimo di x_{d+i}. Riducendo questi polinomi ad uno stesso denominatore ed eliminando questo ultimo che è invertibile in A^*, possiamo quindi asserire la validità della

PROPOSIZIONE 5 - Colle notazioni precedenti l'ideale $\mathfrak{p}^*$ è generato da n-d polinomi

(2) $f_1(X_1,\dots,X_d,X_{d+1}), f_2(X_1,\dots,X_{d+1},X_{d+2}),\dots,f_{n-d}(X_1,\dots,X_n)$

tali che :

(a) il coefficiente di $f_i(X_1,\dots,X_{d+i})$ rispetto a X_{d+i} è un polinomio non nullo di $k[X_1,\dots,X_d]$

(b) il grado $m_i = \partial_{X_{d+i}} f_i$ (grado di f_i rispetto a X_{d+i}) è anche il grado del polinomio minimo di x_{d+i} su $k(X_1,\dots,X_d)[x_{d+1},\dots,x_{d+i-1}]$.

OSSERVAZIONE - Se x_{d+1} è un elemento algebrico primitivo su $k(X_1,\dots,X_d)$ deve allora essere $m_i=1$ per $i \geqslant 2$ e i polinomi f_i $(i \geqslant 2)$ di (2) risultano lineari in X_{d+i}. Se x_{d+1} non è primitivo e k ha caratteristica $0^{(+)}$ si possono comunque determinare, a norma del teorema dell'elemento primitivo (si veda l'osservazione finale del Cap.I) degli elementi $c_{d+1},\dots,c_n \in k$ tali che $c_{d+1}x_{d+1}+\dots+c_nx_n$ sia primitivo. Poichè esiste un conveniente automorfismo lineare σ di

(+) le deduzioni che ora trarremo sono valide anche nel caso di un corpo k perfetto,con un altro tipo di dimostrazione che qui non daremo.

$k[X_1,\dots,X_n]$ tale che $\sigma(c_d X_{d+1}+\dots+c_n X_n)=X_{d+1}$, concludiamo che: se k ha caratteristica 0 si può supporre che gli n-d-1 polinomi $f_2,\dots,f_n$ di (2) siano lineari in $X_{d+2},\dots,X_n$ rispettivamente [si veda più avanti la prop.8].

Ricordiamo che nel Capitolo III,n°1,è stato introdotto l'ideale $\mathfrak{a} : b$ se $\mathfrak{a}$ è un ideale di A e $b \in A$; si tenga presente l'ovvia inclusione $\mathfrak{a} : b \supset \mathfrak{a}$.

TEOREMA 2 -(detto"Primbasis").Se $f_1,f_2,\dots,f_{n-d}$ sono i polinomi (2) di A generanti $\mathfrak{p}^*$,esiste un polinomio $g \in k[X_1,\dots,X_d]$ tale che

$$(3) \qquad \mathfrak{p} = (f_1,f_2,\dots,f_{n-d})\, A : g \,.$$

Dimostriamo dapprima l'inclusione $\subset$.

Poichè $\mathfrak{p}=(p_1,\dots,p_s)A \subset \mathfrak{p}^*=(f_1,\dots,f_{n-d})A^*$ si possono trovare degli elementi $h_{ij} \in A^*$ tali che per ogni $i(1\leq i\leq s)$ si abbia $p_i = \sum_{j=1}^{n-d} h_{ij}\, f_j$. Se $g \in k[X_1,\dots,X_d]$ è un multiplo comune dei denominatori degli h_{ij} può porsi $h_{ij}= g_{ij}/g$ con $g_{ij} \in k[X_1,\dots,X_n]$. Si trae $g\, p_i \in (f_1,\dots,f_{n-d})A$, da cui $p_i \in (f_1,\dots,f_{n-d})A : g$. Ne segue :

$$\mathfrak{p} \subset (f_1,\dots,f_{n-d})A : g$$

D'altra parte sia $f \in (f_1,\dots,f_{n-d})A : g$. Si ha allora $fg \in (f_1,\dots,f_{n-d})A \subset \mathfrak{p}$,in quanto ogni $f_i \in \mathfrak{p}$. Ma $\mathfrak{p}$ è primo e,in virtù di (1), $g \notin \mathfrak{p}$;dunque $f \in \mathfrak{p}$ .Ciò prova l'inclusione opposta $\mathfrak{p} \supset (f_1,\dots,f_{n-d})A : g$ donde l'asserto.

OSSERVAZIONE. Come risulta dalla dimostrazione ora fatta l'inclusione $\supset$ vale qualunque siano $f_1,\dots,f_{n-d}$ in $\mathfrak{p}$ e $g \notin \mathfrak{p}$;cioè : se

$\mathfrak{p}$ è primo, $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$ e se $g \in \mathfrak{p}$ si ha $\mathfrak{p} \supset \mathfrak{a} : g$.

Come complemento al teorema 2 si ha la seguente

PROPOSIZIONE 6 - Se $V \cup W_1 \cup \ldots \cup W_m$ è una decomposizione ridotta in varietà irriducibile di $\mathcal{V}(f_1,\ldots,f_{n-d})$, il polinomio g che compare in (3) si annulla su $W_1 \cup \ldots \cup W_m$.

Dim. Sia infatti $f \in \mathfrak{p}$ un polinomio nullo su V e non su W_1 (un tale f esiste, altrimenti si avrebbe $W_1 \subset \mathcal{V}(\mathcal{I}(V))=V$). Si ha, per il teor. 2, $f\,g \in (f_1,\ldots,f_{n-d}) \subset \mathcal{I}(W_1)$ che è primo; dunque, poichè $f \notin \mathcal{I}(W_1)$, si ha $g \in \mathcal{I}(W_1)$. Analogamente si prova che $g \in \mathcal{I}(W_2)$, ecc.

OSSERVAZIONE - Si potrebbe dimostrare che $\mathcal{V}(f_1,\ldots,f_{n-d})$ è una varietà pura di dimensione d; bisognerebbe però far ricorso a un teorema difficile anche se intuitivo: il cosidetto Hauptidealsatz. Quindi si ha $\dim W_i = d$ $(1 \leq i \leq n)$ e, se $W = W_1 \cup \ldots \cup W_n$, $\dim W = d$. In ogni caso si può dire: la varietà definita dai polinomi $f_1,\ldots,f_{n-d}$ in generale consta di V e di un'altra W; esiste però un polinomio g passante per W tale che i polinomi nulli su V sono tutti e soli i polinomi che moltiplicati per g stanno nell'ideale $(f_1,\ldots,f_{n-d})$.

2ª 25/1/71

X PROPOSIZIONE 7 - Si ha, colle notazioni precedenti:

$$\{y \in \mathcal{V}(\mathfrak{p}) \mid g(y) \neq 0\} = \{y \in \mathcal{V}(f_1,\ldots,f_{n-d}) \mid g(y) \neq 0\}$$

Dim. $\subset$ è evidente; infatti se $y \in \mathcal{V}(\mathfrak{p})$ si ha, a fortiori $y \in \mathcal{V}(f_1,\ldots,f_{n-d})$.

Proviamo $\supset$. Sia $y \in \mathcal{V}(f_1,\ldots,f_{n-d})$ tale che $g(y) \neq 0$; basta

provare che i polinomi $p_1,\dots,p_s$ generanti $\mathfrak{p}$ sono nulli in y.
Dal teorema 2 si ha : $p_i g \in (f_1,\dots,f_{n-d})$ per ogni i $(1\le i\le s)$ da cui $p_i(y)g(y) = 0$ in quanto $y \in \mathcal{V}(f_1,\dots,f_{n-d})$ - Poichè $g(y) \neq 0$ e K è integro si ha $p_i(y) = 0$ $(1\le i\le s)$. c.v.d.

L'interpretazione geometrica della dimensione d di $V = \mathcal{V}(\mathfrak{p})$ si può trarre appunto dalla Prop.7. Infatti grazie alla prop.6 e posto $m_i = \partial_{X_{d+i}} f_i$, si ha che il coefficiente di $X_{d+i}^{m_i}$ nel polinomio $f_i(X_1,\dots,X_{d+i})$è un polinomio non nullo di $k[X_1,\dots,X_d]$ che possiamo indicare con $h_i(X_1,\dots,X_d)$.

Sia allora $(y_1,\dots,y_d)$ un punto di K^d che non annulli il polinomio $g(X_1,\dots,X_d)\prod_{i=1}^{n-d} h_i(X_1,\dots,X_d)$. In corrispondenza a tale punto $(y_1,\dots,y_d)$ che, a norma della prop.5,possiamo scegliere in modo"sufficientemente arbitrario"si possono determinare successivamente degli elementi $y_{d+1},y_{d+2},\dots,y_n$in K rispettivamente radici dei polinomi $f_1(y_1,\dots,y_d,X_{d+1}),f_2(y_1,\dots,y_d,y_{d+1},X_{d+2}),\dots,f_{n-d}(y_1,\dots,y_{n-1},X_n)$ che sono ancora di grado rispettivo $m_1,m_2,\dots,m_n$ in quanto i loro coefficienti $h_1,h_2,\dots,h_n \in k[X_1,\dots,X_d]$ per ipotesi non sono annullati da $(y_1,\dots,y_d)$. A norma della prop.7 il punto $y=(y_1,\dots,y_n)$ così ottenuto è un punto di $\mathcal{V}(\mathfrak{p})$.

OSSERVAZIONE - La varietà $\mathcal{V}(\mathfrak{p}) \cap \mathcal{V}(g)$ è effettivamente una varietà propria di $\mathcal{V}(\mathfrak{p})$ e quindi di dimensione $\le$ d-1; se infatti $\mathcal{V}(\mathfrak{p}) \cap \mathcal{V}(g) = \mathcal{V}(\mathfrak{p})$,dovrebbe aversi $\mathcal{V}(g) \supset \mathcal{V}(\mathfrak{p})$da cui $g \in \mathcal{J}(\mathcal{V}(\mathfrak{p})) = \mathfrak{p}$: assurdo.

Si potrebbe vedere, sempre ricorrendo all'Hauptidealsatz, che $\mathcal{V}(\mathfrak{p}) \cap \mathcal{V}(g)$,in quanto intersezione di una varietà irriducibile di dimensione d con una ipersuperficie non passante per essa,è una varietà pura di dimensione d-1.

Riassumiamo qui, nel seguente enunciato, le conclusioni cui eravamo pervenuti nell'osservazione successiva alla prop.5.

PROPOSIZIONE 8 - _Se_ k _ha caratteristica_ 0, _previo un opportuno automorfismo lineare di_ $k[X_1,\dots,X_n]$, _si ha_ : _ogni polinomio_ $f_i(X_1,\dots,X_{d+i})$ $(2\leq i\leq n-d)$ _che compare in_ (3) _è lineare in_ X_{d+i} _dunque è del tipo_ :

$$(4)\qquad f_i(X_1,\dots,X_{d+i}) = g_i(X_1,\dots,X_{d+i-1}) + h_i(X_1,\dots,X_d)X_{d+i}$$

con $g_i\in k[X_1,\dots,X_{d+i-1}]$, $h_i\in k[X_1,\dots,X_d]$.

I polinomi (4) vengono denominati _monoidi_ . Pertanto si suol dire che i polinomi (4) assieme a $f_1(X_1,\dots,X_{d+1})$ forniscono _una rappresentazione monoidale della varietà_ $\mathcal{V}(\mathfrak{p})$.

Ricordando la costruzione dei polinomi $f_1,\dots,f_{n-d}$ come generatori di $\mathfrak{p}^*$ che è un ideale dell'anello A^*, in cui ogni polinomio non nullo di $k[X_1,\dots,X_d]$ è invertibile, si vede che i polinomi (4) possono essere moltiplicati ciascuno per un polinomio non nullo di $k[X_1,\dots,X_d]$ senza alterare le successive deduzioni. Possiamo quindi supporre che i coefficienti di X_{d+i} che compaiono nei polinomi (4) siano tutti eguali ad uno stesso polinomio $h(X_1,\dots,X_d)$.

Si ha la seguente forma particolarmente forte del Primbasis.

TEOREMA 3 - _Siano_ :

$f_1(X_1,\dots,X_{d+1})$,

$f_2(X_1,\dots,X_{d+2}) = g_2(X_1,\dots,X_{d+1}) + h(X_1,\dots,X_d)X_{d+2}$.

....

$f_{n-d}(X_1,\dots,X_n) = g_{n-d}(X_1,\dots,X_{n-1}) + h(X_1,\dots,X_d)X_n$, dei polinomi di $k[X_1,\dots,X_n]$ (caratteristica di $k=0$) costituenti una rappresentazione monoidale della varietà di dimensione d definita dall'ideale primo $\mathfrak{p}$.

Si ha allora :

(a) esiste un intero m tale che :

$$\mathfrak{p} = (f_1,f_2,\dots,f_{n-d}) : h^m ,$$

(b) per ogni punto $(y_1,\dots,y_d,y_{d+1})$ dell'ipersuperficie di K^{d+1} definita da f_1 tale che $h(y_1,\dots,y_d) \neq 0$ si ha uno ed un sol punto y di $\mathcal{V}(\mathfrak{p})$ avente come prime coordinate $y_1,\dots,y_d$.

Per evitare una pesantezza di notazioni noi dimostreremo il teorema 3 in un caso particolare $n=3$, $d=1$. Tuttavia notiamo che il procedimento dimostrato è identico nel caso generale e non vi è alcuna difficoltà sostanziale a estendere il ragionamento che faremo ora. In sostanza noi dimostreremo il teorema per le curve dello spazio ordinario (è vero che k può essere supposto soltanto di caratteristica 0, ma ciò che interessa sono le $\mathbb{R}$-curve o le $\mathbb{C}$-curve di $\mathbb{C}^3$) e con ciò avremo dato le proprietà fondamentali delle varietà di $\mathbb{C}^3$.

Ci serviranno alcune premesse.

LEMMA 2 - Siano A un anello fattoriale, f e g due polinomi non nulli di $A[X]$ tali che m.c.d.$(f,g)=1$.

Esiste allora un elemento non nullo $a \in A$ tale che $a \in (f,g)A[X]$.

Dim. Sia K il corpo delle frazioni di A. Poniamo $f= a f'$, $g= b g'$ con f' e g' primitivi. Si ha allora (cfr. ad es. P.SALMON Appunti di Algebra) m.c.d. $(f',g')=1$ in $K[X]$, onde si può scrivere

$1\in(f',g')K[X]$ .Eliminando i denominatori si trae l'esistenza di $c\neq 0$ in A tale che $c\in(f',g')A[X]$,onde moltiplicando per ab si ha $abc\in(f,g)A[X]$ c.v.d.

COROLLARIO 1 - Siano A un anello fattoriale B un'estensione di $A[X]$, $\mathfrak{p}$ un ideale primo di B tale che $\mathfrak{p}\cap A=0$, $\mathfrak{p}\cap A[X]\neq 0$. Allora l'ideale $\mathfrak{p}\cap A[X]$ è principale .

Dim. Sia $f\neq 0$, $f\in\mathfrak{p}\cap A[X]$ $\partial f>0$; un tale f esiste per le ipotesi fatte. Poichè $\mathfrak{p}\cap A[X]$ è primo almeno uno dei fattori irriducibili di f, sia $f_1=a_0+a_1X+\dots+a_nX^n$, sta in $\mathfrak{p}\cap A[X]$. Se $g\in\mathfrak{p}\cap A[X]$, ma $g\notin(f_1)A[X]$, dal lemma seguirebbe l'esistenza di $a\neq 0$, $a\in\mathfrak{p}\cap A$: assurdo; dunque $\mathfrak{p}\cap A[X]$ è l'ideale principale generato da f_1.

La seguente proposizione costituisce un complemento di evidente interpretazione geometrica ai teoremi 1,2,e 3.

COROLLARIO 2 - Se V è una varietà irriducibile di dimensione d, se $\mathfrak{p}=\mathcal{J}(V)$ soddisfa alla condizione (1) e se i polinomi (2) generano $\mathfrak{p}^*$,il polinomio irriducibile $f_1(X_1,\dots,X_{d+1})$ è un generatore dell'ideale principale $\mathfrak{p}\cap k[X_1,\dots,X_{d+1}]$.

Dim. Se si prende $A=k[X_1,\dots,X_d]$, $X=X_{d+1}$, $B=k[X_1,\dots,X_n]$ segue subito dal coroll.1 che l'ideale primo $\mathfrak{p}\cap k[X_1,\dots,X_{d+1}]$è principale e dunque è generato da $f_1(X_1,\dots,X_{d+1})$ che è irriducibile.

Ecco come si enuncia il teor.3 per le curve dello spazio ordinario.

TEOREMA 4 - Siano $k=\mathbb{R}$ o $k=\mathbb{C}$,$K=\mathbb{C}$, $A=k[X,Y,Z]$. Sia

$$\begin{cases} f(X,Y) \\ g(X,Y) - h(X)Z \end{cases}$$

la rappresentazione monoidale di una k-curva irriducibile di K^3 definita da un ideale primo $\mathfrak{p}$.

Si ha allora :

(a) esiste un intero m tale che

$$\mathfrak{p} = (f, g-h\,z) : h^m ,$$

(b) per ogni punto (x,y) della curva piana $\mathcal{V}(f)$ tale che $h(x) \neq 0$ vi è uno ed un sol valore di z tale che $(x,y,z) \in \mathcal{V}(\mathfrak{p})$.

poco importante

Dim. (a) - La validità di $\supset$ è già stata acquisita nell'osservazione seguente il Teor.2. Dimostriamo dunque $\subset$ e sia $p(X,Y,Z)$ un elemento di $\mathfrak{p}$.

Sia S l'insieme delle potenze intere positive di h: $S = \{1, h, h^2, \dots\}$ e sia A_S l'anello delle frazioni aventi a numeratore polinomi di A e a denominatore elementi di S.

Poichè $g-hz \in \mathfrak{p}$, si ha allora:

$$\frac{g}{h} - z \in \mathfrak{p} A_S .$$

Osserviamo che si ha :

$$p(X,Y,Z) - p(X,Y,\frac{g}{h}) \in (\frac{g}{h} - z) A_S \qquad (°)$$

(°) Si tiene conto di questo fatto: se a_i $(1 \leq i \leq n)$, x, y sono elementi di un anello A si ha $\sum_{i=1}^{n} a_i\, x^i - \sum_{i=1}^{n} a_i\, y^i \in (x-y)A$ o, in altre parole $\sum a_i\, x^i \equiv \sum a_i\, y^i \mod (x-y)A$. Ed infatti si ha : $\sum a_i\, x^i - \sum a_i\, y^i = \sum a_i (x^i - y^i) = \sum a_i (x-y)(x^{i-1} + x^{i-2} y + \dots) \in (x-y)A$.

e quindi $p(X,Y,-\frac{g}{h}) \in \mathfrak{p} A_S$

Si può porre $p(X,Y,-\frac{g}{h}) = \frac{p_1(X,Y)}{h^s}$ con s intero opportuno. Quindi da $\frac{p_1}{h^s} \in \mathfrak{p} A_S$ si ricava, per t opportuno $h^t p_1$ e poichè $\mathfrak{p}$ è primo e $h \notin \mathfrak{p}$: $p_1 \in \mathfrak{p}$.

Ma $p_1 \in k[X,Y]$,onde $p_1 \in \mathfrak{p} \cap k[X,Y] = (f)\, k[X,Y]$ per il corollario 2 al lemma 2. Da quanto precede risulta allora che esiste $q \in k[X,Y]$ tale che

$$p(X,Y,-\frac{g}{h}) = \frac{fq}{h^s} \quad \text{da cui (cf.(°), pag.93)}$$

$$p(X,Y,Z) - \frac{fq}{h^s} \in \left(\frac{g}{h} - Z\right) A_S .$$

Liberandosi dal denominatore h si trova un t tale che

$h^t p - fq \in (g-hZ)A$ da cui :

$h^t p \in (f,g-h\,Z)A$.

Va però notato che l'intero t così trovato dipende da $\mathfrak{p}$ .Se quindi $p_1,\dots,p_s$ è un sistema di generatori di $\mathfrak{p}$ possiamo dire che per ogni $p_i (1 \leq i \leq s)$ esiste un intero m_i tale che $p_i \in (f,g-hZ):h^{m_i}$. Posto allora $m = \max\{m_i\}$ si ha $p_i \in (f,g-hZ):h^m$ $(1 \leq i \leq s)$ e quindi $\mathfrak{p} \subset (f,g-hz) : h^m$ c.v.d.

(b) Segue dalla prop.7 e dal fatto che l'equazione $g(x,y)-h(x)Z=0$ ha una e una sola radice.

Il teorema 4 ci dice come "deve essere fatta "una curva irriducibile dello spazio;però non dice niente sull'effettiva esistenza di curve dello spazio. Il seguente teorema,che è in certo senso l'inverso del teorema 4, dice in sostanza che le rappresentazioni monoidali dànno luogo ad effettive curve dello spazio.

TEOREMA 5 - Siano $f(X,Y)$, $g(X,Y)$, $h(X,Y)$ polinomi di $k[X,Y]$ tali che ; f sia irriducibile g ed h siano primi tra loro, h non sia multiplo di f.

Si ha allora :

(a) esiste un intero m tale che l'ideale

$$\mathfrak{p} = (f, g-hZ) : h^m$$

è primo ,

(b) $\mathcal{V}(\mathfrak{p})$ è una curva irriducibile dello spazio,

(c) se $\mathfrak{a} = (f, g-hZ)$, $\mathcal{V}(\mathfrak{a})$ è costituita da $\mathcal{V}(\mathfrak{p})$ e dalle rette parallele all'asse Z che intersecano il piano $Z=0$ nei punti (x,y) comuni alle tre curve $f=0$, $g=0$, $h=0$.

Dim. (a) - La catena ascendente

$$\mathfrak{a} \subset \mathfrak{a} : h \subset \mathfrak{a} : h^2 \subset \ldots\ldots \subset \mathfrak{a} : h^m = \mathfrak{a} : h^{m+1} =$$

è stazionaria a partire da un opportuno intero m.

Vogliamo appunto provare che l'ideale $\mathfrak{a} : h^m$ è primo. Supponiamo che sia

$$p\, q \in \mathfrak{a} : h^m \qquad \text{cioè}$$

$$h^m\, p\, q \in (f, g-h\, Z)$$

Nell'anello $k[X,Y]_S$, dove $S = \{1, h, h^2, \ldots\}$ si ha

$$h^m\, p(X,Y, \tfrac{g}{h})\, q(X,Y,\tfrac{g}{h}) \in (f)$$

da cui, posto $p = \dfrac{p_1}{h^r}$, $q = \dfrac{q_1}{h^s}$ con p_1, $q_1 \in k[X,Y]$,si trae una relazione del tipo

$$h^t\, p_1\, q_1 \in (f)\, k[X,Y]$$

Poichè per ipotesi f è primo e $h \notin (f)$ si deve avere p_1 (oppure q_1) $\in (f)$; sia $p_1 \in (f)$. Ne segue :

$$p(X,Y,\tfrac{g}{h}) \in (f)\, k[X,Y]_S$$

da cui :

$$p(X,Y,Z) \in (f, \tfrac{g}{h} - Z)\, k[X,Y,Z]_S$$

donde liberandosi dal denominatore, una relazione :

$$h^i\, p \in (f, g-hZ) = \mathfrak{A} .$$

Ne segue $p \in \mathfrak{A} : h^i \subset \mathfrak{A} : h^m$.

(b) Il polinomio $f(X,Y)$ è irriducibile, dunque non è costante e contiene effettivamente la X oppure la Y, supponiamo la Y. Mostriamo allora che in $A/\mathfrak{p} = k[x,y,z]$ x è trascendente (dove $A = k[X,Y,Z]$).

In caso contrario esisterebbe $p(X) \in k[X]$, $p(X) \neq 0$ tale che $p(x) = 0$ dunque $p(X) \in \mathfrak{p}$. Ciò implica :

$$p\, h^m \in (f, g-hZ)$$

da cui ponendo $Z = \frac{g}{h}$, si trae per r opportuno

$$p\, h^r \in (f)\, k[X,Y]$$

Poichè $h \notin (f)$ deve aversi $p \notin (f)$ ma ciò è assurdo perchè p contiene solo X ed f contiene Y.

La relazione $f(x,y) = 0$ mostra che y è algebrico su $k(x)$ e da $g-hz=0$ si trae che z è algebrico su $k(x,y)$.

Ciò prova che $\mathrm{gr.tr.}(A/\mathfrak{p} / k) = 1$ come volevasi.

(c) Sia (x,y,z) un punto di $\mathcal{V}(\mathfrak{A})$ tale che $h(x,y) = 0$. Allora deve aversi $f(x,y) = 0$, $g(x,y) - h(x,y)z = g(x,y) = 0$, dunque (x,y) è un punto comune alle tre curve $f=0$, $h=0$, $g=0$ ed ogni punto della retta parallela all'asse Z e passante per (x,y) sta su $\mathcal{V}(\mathfrak{A})$.

Viceversa è chiaro che ogni punto (x,y,z) tale che $f(x,y) = g(x,y) = h(x,y) = 0$ appartiene a $\mathcal{V}(\mathfrak{a})$.

Sia invece (x,y,z) un punto di $\mathcal{V}(\mathfrak{a})$ tale che $h(x,y) \neq 0$; dalla prop.7 segue allora che $(x,y,z) \in \mathcal{V}(\mathfrak{p})$. Poichè $\mathcal{V}(\mathfrak{p}) \subset \mathcal{V}(\mathfrak{a})$ l'asserto è completamente dimostrato.

n° 3 - Curve razionali.

Siano $\alpha(T)$, $\beta(T)$, $\gamma(T)$, $\delta(T)$ polinomi dell'anello $k[T]$ tali che: $\beta \neq 0$, $\delta \neq 0$, α e β sono primi tra loro, γ e δ sono primi tra loro e almeno una delle due funzioni razionali:

$$\xi(T) = \frac{\alpha(T)}{\beta(T)} \qquad , \quad \eta(T) = \frac{\gamma(T)}{\delta(T)}$$

non è costante. Supponiamo, ad esempio, ξ non costante.

LEMMA 3 - Sia $f(X,Y) \in k[X,Y]$. Le due seguenti condizioni sono equivalenti:

(a) $\quad f(\xi(T), \eta(T)) = 0$

(b) $\quad$ se (x,y,t) è un punto di K^3 verificante le relazioni

$$\begin{cases} x = \xi(t) \\ y = \eta(t) \end{cases}$$

si ha: $f(x,y) = 0$.

Dim. $\quad (a) \Longrightarrow (b)$

$$f(\xi(T), \eta(T)) = \frac{f_1(T)}{\beta^r(T)\,\delta^s(T)}$$

da cui:

$$f(\xi(t), \eta(t)) = \frac{f_1(t)}{\beta^r(t)\,\delta^s(t)}$$

Per ipotesi si ha : $f_1(T) = 0$, onde $f_1(t) = 0$ e da ciò $f(x,y) = 0$

(b) $\Longrightarrow$ (a) . Per ogni $t \in K$ tale che $\beta(t) \neq 0$, $\delta(t) \neq 0$ si ponga $x = \xi(t)$, $y = \eta(t)$. Si ha allora :

$$0 = f(x,y) = f(\xi(t), \eta(t)) = f_1(t)/\beta^r(t)\ \delta^s(t)$$

Da ciò segue che $f_1(T)$ si annulla per infiniti valori di T e quindi è nullo ; allora si ha $f(\xi(T), \eta(T)) = 0$.

Si consideri il k-omomorfismo

$$\psi : k[X,Y,T] \longrightarrow k(T)$$

definito da $\psi(X) = \xi(T)$, $\psi(Y) = \eta(T)$, $\psi(T) = T$; sia i l'immersione di $k[X,Y]$ in $k[X,Y,T]$. Posto allora $\varphi = \psi \circ i$, φ è il k-omomorfismo $\varphi : k[X,Y] \longrightarrow k(T)$ definito da

$\varphi(X) = \xi(T)$, $\varphi(Y) = \eta(T)$

COROLLARIO - <u>Le due condizioni (a) e (b) del lemma equivalgono a questa</u> :

(c) $f(X,Y) \in \ker \varphi$.

Poichè i due polinomi $\beta(T)X - \alpha(T)$ e $\delta(T)Y - \gamma(T)$ appartengono a $\ker \psi$ e, per il lemma 2, esiste un polinomio non nullo $g(X,Y)$ tale che :

$$g \in (\beta X - \alpha , \delta Y - \gamma)\, k[X,Y,T]$$

si ha $g \in \ker \psi \cap k[X,Y] = \ker \varphi$.

Dunque $\ker \varphi$ è un ideale non <u>nullo</u> di $k[X,Y]$ .Inoltre $\ker \varphi$ è <u>primo</u> in quanto $\mathrm{Im}\, \varphi$,sottoanello di $k(T)$ è integro.

L'ideale $\ker \varphi \cap k[X]$ è nullo. Altrimenti esisterebbe un polinomio non nullo $p(X) \in k[X]$ tale che $p(\xi(T)) = 0$; ciò è assurdo perchè $\xi(T)$ non è costante e quindi è trascendente su k(Cap.II,n°3) T. 5.

Dal coroll.1 al lemma 2 si trae allora che ker ψ è un ideale primo principale generato da un polinomio irriducibile $f(X,Y)$ in cui compare effettivamente Y.

DEFINIZIONE - La curva piana irriducibile C definita dall'unico (a meno di elementi di k) polinomio irriducibile $f(X,Y)$ soddisfacente alle condizioni (a),(b) del lemma 3 dicesi curva piana razionale descritta dai polinomi $\xi(T)$ e $\eta(T)$. Le relazioni

$$(1) \qquad \begin{cases} x = \xi(t) \\ y = \eta(t) \end{cases}$$

diconsi le equazioni parametriche della curva C razionale in questione (al variare di t in $K-\mathcal{V}(\beta\delta)$ le (1) forniscono punti (x,y) appartenenti a C.

Poniamo ora $\mathfrak{p} = \ker\psi$; $\mathfrak{p}$ è primo perchè $\mathrm{Im}\,\psi \subset k(T)$.

Vogliamo dimostrare che $\dim \mathcal{V}(\mathfrak{p}) = 1$. Abbiamo infatti già visto che $0 = \ker\psi \cap k[X] = \mathfrak{p} \cap k[X]$; ciò prova che l'immagine x di X in $k[X,Y,T]/\mathfrak{p}$ è trascendente su k. Inoltre dal fatto che $f(X,Y) \in \mathfrak{p}$, $\beta(T)X - \alpha(T) \in \mathfrak{p}$ si trae che le immagini di Y e T in $k[X,Y,T]/\mathfrak{p}$ sono algebriche su $k(x)$. Da ciò segue $\mathrm{gr.tr.}(k[X,Y,T]/\mathfrak{p}\,/k) = 1$ donde l'asserto.

Allora, in virtù del teorema 2 esistono un polinomio $g(X,Y,T)$ e un polinomio $h(X)$ tali che

$$\mathfrak{p} = (f(X,Y),\ g(X,Y,T)) : h(X)$$

e, per la prop. 7 :

$$\{(x,y,t) \in \mathcal{V}(\mathfrak{p}) \mid h(x) \neq 0\} = \{(x,y,t) \in \mathcal{V}(f,g) \mid h(x) \neq 0\}$$

Supponiamo che $g(X,Y,T)$ sia un polinomio di grado n rispetto a T a coefficienti in $k[X,Y]$; dal teorema 2 risulta che il coeff ciente di T^n in g è un polinomio $g_n(X)$ di $k[X]$.

Ne segue che se (x,y) è un punto della curva razionale $f(X,Y)=0$ ed x non annulla il prodotto $h\,g_n$ si trovano n valori $t_1,\dots,t_n$ (non necessariamente distinti) tali che i punti $(x,y,t_1),\dots,(x,y,t_n)$ stanno in $\mathcal{V}(\mathfrak{p})$.

Come abbiamo visto i polinomi $\beta(T)X-\alpha(T)$ e $\delta(T)Y-\gamma(T)$ stanno in $\mathfrak{p}$. Ne segue che ogni punto (x,y,t_i) $(1\leq i\leq n)$ verifica le relazioni $\beta(t_i)\,x-\alpha(t_i)=\delta(t_i)y-\gamma(t_i)=0$ cioè :

$$x=\xi(t_i)$$

$$y=\eta(t_i)$$

Si ha quindi la :

PROPOSIZIONE 9 - <u>Ad ogni punto</u> t <u>della retta</u> K <u>tale che</u> $\beta(t)\neq 0$, $\delta(t)\neq 0$ <u>le</u> (1) <u>fanno corrispondere un punto di</u> C; <u>viceversa ogni punto</u> (x,y) <u>di</u> C <u>che stia fuori da un numero finito di punti di</u> C <u>proviene da</u> n <u>punti</u> $t_1,\dots,t_n$ <u>di</u> K. <u>Brevemente</u> : <u>le</u> (1) <u>pongono una corrispondenza razionale "di tipo</u> $[1,n]$ " <u>tra i punti di</u> C <u>e i punti di</u> K <u>con un numero finito di eccezioni</u>.

In realtà si può dire ben di più sfruttando, come vedremo, il teorema di Lüroth ; precisamente, cambiando eventualmente il parametro t si può stabilire una corrispondenza <u>birazionale</u> tra i punti di C e i punti di K, cioè una corrispondenza razionale biunivoca (ossia di tipo $[1,1]$) con un numero finito di eccezioni ovvero, brevemente, una corrispondenza razionale generalmente biunivoca. Ciò è conseguenza del

TEOREMA 6 - <u>Sia</u> C <u>una curva piana irriducibile. Le seguenti condizioni sono equivalenti</u> :

5

(i) C è razionale,

(ii) il corpo $k(C)$ delle funzioni razionali di C è isomorfo a $k(T)$ = corpo delle funzioni razionali di una retta,

(iii) i punti di C , ad eccezione di un numero finito, sono in corrispondenza birazionale coi punti di una retta.

Dim. (i)$\Longrightarrow$(ii) . Usando le notazioni precedenti, l'anello delle coordinate $k[C]$ è isomorfo a $k[\xi(T), \eta(T)]$, dunque si ha : $k(C) \simeq k(\xi(T), \eta(T)) \simeq k(T)$, dove l'ultimo isomorfismo segue dal teorema di Lüroth.

(ii)$\Longrightarrow$(i) . Se $f(X,Y)$ è il polinomio definente C , x,y sono le immagini di X,Y in $k[X,Y]/f$ si hanno gli omomorfismi successivi :

$$k[X,Y] \xrightarrow{\tau} k[x,y] \xrightarrow{j} k(x,y) \xrightarrow[\sim]{\sigma} k(T)$$

Posto $\varphi = \sigma \circ \underset{\sim}{i} \circ \tau$ e $\xi(T) = \varphi(X)$, $\eta(T) = \varphi(Y)$ si ha $f(\xi(T), \eta(T)) = 0$ e quindi C è razionale .

(i)$\Longrightarrow$(iii) . Siano $\xi(T)$ e $\eta(T)$ i polinomi di $k[T]$ definenti la curva razionale C mediante le equazioni parametriche $x = \xi(t)$, $y = \eta(t)$. Per il teorema di Lüroth il corpo $k(\xi(T), \eta(T))$ contiene un elemento primitivo, ossia un elemento (trascendente su k) $T' = \underset{\smile}{g}(\xi(T), \eta(T))$ tale che $k(\xi(T), \eta(T)) = k(T')$; valgono perciò anche le relazioni $\xi(T) = \xi'(T')$, $\eta(T) = \eta'(T')$. Poichè, se f definisce C, si ha : $f(\xi(T), \eta(T)) = 0$ si ha anche $f(\xi'(T'), \eta'(T')) = 0$,onde $x = \xi'(t')$, $y = \eta'(t')$ sono una seconda rappresentazione parametrica di C. Sia (x,y) un punto di C proveniente da un certo valore t nella prima rappresentazione parametrica e da un parametro t' mediante la seconda rappresentazione.

Dall'identità $T' = g(\xi'(T'),\eta'(T'))$ si trae $t'=g(x,y)$ e ciò prova che vi è il sol valore t' che può dar luogo al punto (x,y) quando si prenda la seconda rappresentazione parametrica.

(iii) $\Longrightarrow$ (i) è ovvia, in quanto le relazioni $x = \xi(t)$, $y = \eta(t)$ che forniscono la corrispondenza birazionale, danno anche le equazioni parametriche della curva $f = 0$.

ESEMPI - Le coniche sono curve razionali (si vedano gli esercizi).

La "cubica cuspidata" data dal polinomio X^2-Y^3 è razionale: le sue equazioni parametriche sono $x = t^3$, $y = t^2$.

OSSERVAZIONE - Date n funzioni razionali $\xi_1(T),\ldots,\xi_n(T)$ di $k(T)$ è ben definito l'ideale primo $\mathfrak{p}$ di $k[X_1,\ldots,X_n]$ costituito dai polinomi $f(X_1,\ldots,X_n)$ tali che $f(\xi_1(T),\ldots,\xi_n(T)) = 0$. Estendendo opportunamente le considerazioni precedenti si può vedere che $\vartheta(\mathfrak{p})$ è una varietà di dimensione 1 che dicesi <u>curva razionale di K^n definita dalle equazioni parametriche</u> $x_1 = \xi_1(t),\ldots,x_n = \xi_n(t)$.

La prop.9 e il teor.6 sono validi anche per le curve razionali di K^n.

Naturalmente, si possono definire in modo del tutto analogo anche le <u>superficie</u> e, più generalmente, <u>le varietà razionali</u>: ci vorranno, nel caso, due o più parametri in luogo dell'unico parametro t occorrente per le curve.

CAPITOLO V

GENERALITA' SULLE VARIETA' PROIETTIVE

n°1 - Ordine di una ipersuperficie affine- Coni.

Sia $f(X_1,\dots,X_n)$ un polinomio di grado totale m di $k[X_1,\dots,X_n]$ definente l'ipersuperficie $\mathcal{V}(f)$ di K^n. Si dice che m è l'ordine di $\mathcal{V}(f)$ (ad esempio, le coniche hanno ordine 2, le cubiche piane hanno ordine 3, le quadriche dello spazio hanno ordine 2, ecc.).

E' facile verificare che ogni retta di K^n non contenuta in $\mathcal{V}(f)$ interseca $\mathcal{V}(f)$ in m punti al più e sotto opportune ipotesi una retta interseca $\mathcal{V}(f)$ in m punti distinti.

Sia ora f un polinomio omogeneo di grado totale m. Se $y=(y_1,\dots,y_n) \in K^n$ è un punto di $\mathcal{V}(f)$ si ha $f(y_1,\dots,y_n) = 0$ e se $t \in K$ anche il punto $(ty_1,\dots,ty_n)$ sta su $\mathcal{V}(f)$ in quanto $f(ty_1,\dots,ty_n) = t^m f(y_1,\dots,y_m) = 0$. Ora si vede facilmente che tutti i punti $(ty_1,\dots,ty_n)$ sono tutti e soli i punti della retta congiungente l'origine $(0,\dots,0)$ con $y=(y_1,\dots,y_n)$. Si ha dunque, da quanto precede : una retta uscente dall'origine e passante per un punto di $\mathcal{V}(f)$ sta su $\mathcal{V}(f)$. Se invece $y \notin \mathcal{V}(f)$, cioè se $f(y_1,\dots,y_n) \neq 0$ si ha :

$f(ty_1,\dots,ty_n) = t^m f(y_1,\dots,y_n) = 0 \Longleftrightarrow t = 0$, ossia : le m intersezioni di $\mathcal{V}(f)$ con una retta uscente dall'origine e non giacente su $\mathcal{V}(f)$ coincidono tutte coll'origine. E' per questo motivo che $\mathcal{V}(f)$ viene denominato <u>cono con vertice nell'origine</u>, e l'origine dicesi un punto m-uplo per $\mathcal{V}(f)$.(+)

Più generalmente una varietà V dicesi un <u>cono</u> se :

$y = (y_1,\dots,y_n) \in V \Longrightarrow ty = (ty_1,\dots,ty_n) \in V$ per ogni $t \in K$;

cioè V è un cono se ogni retta congiungente un punto di V coll'origine sta su V.

n° 2 - <u>Ideali omogenei nell'anello graduato dei polinomi.</u>

Si ponga $A = k[X_1,\dots,X_n]$ e si indichi con A_m il sottomodulo di A costituito dai polinomi omogenei di grado totale m, detti anche forme di grado m. Si ha

$$A = \sum_{m \geq 0} A_m \text{ (somma diretta)}$$

Se $f = \sum f_i$, con $f_i \in A_i$ si dice che f_i è la <u>componente omogenea di grado</u> i <u>di</u> f .

Un ideale $\mathfrak{a}$ di A si dice <u>omogeneo</u> se per ogni $f \in \mathfrak{a}$ tutte le componenti omogenee di f appartengono ad $\mathfrak{a}$.

PROPOSIZIONE 1 - <u>Un ideale è omogeneo se ammette un sistema di generatori costituito da polinomi omogenei, e viceversa</u>..

<u>Dim</u>. Sia $\mathfrak{a}$ un ideale omogeneo e sia $f_1,\dots,f_q$ un sistema di

---

(+)Quest'ultima denominazione è da mettersi in riferimento colla terminologia che si usa per i punti cosiddetti "singolari" delle ipersuperficie;lo studio dei punti "semplici" e di quelli singolari presenta tuttavia difficoltà già nella definizione e quì non può aver luogo.

generatori di $\mathfrak{a}$;le componenti omogenee di ogni f_i stanno in $\mathfrak{a}$ e la loro totalità,al variare di i $(1\leq i\leq q)$,costituisce manifestamente un sistema di generatori di $\mathfrak{a}$.

Viceversa, sia $f_1,\dots,f_q$ un insieme di forme che generino l'ideale $\mathfrak{a}$; supponiamo $\partial f_i = i(1\leq i\leq q)$. Sia $h\in\mathfrak{a}$;si ha allora $h = \sum_{i=1}^{q} g_i\ f_i$ con $g_i\in A$. Sia $g_i = \sum g_{ij}$ la decomposizione in componenti omogenee di g, con $\partial\ g_{ij} = j$; si ha allora $h = \sum_{i,j} g_{ij}\ f_i$.

Sia ora $h = \sum h_r$ con $\partial h_r = r$ la decomposizione in componenti omogenee di h ; deve allora essere $h_r = \sum_{i+j=r} g_{ij} f_i$. Ciò prova che $h_r\in\mathfrak{a}$ e dunque $\mathfrak{a}$ è omogeneo.

PROPOSIZIONE 2 - <u>Siano</u> $\mathfrak{a}$ <u>e</u> $\mathfrak{b}$ <u>ideali omogenei di</u> A. <u>Allora gli ideali</u> $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$, $\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b}$, $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ <u>sono omogenei</u>.

<u>Dim</u>. L'omogeneità di $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$ e di $\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b}$ seguono subito dalla definizione di ideale omogeneo; invece l'omogeneità di $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ viene immediatamente dalla proposizione precedente,tenendo presente che il prodotto di forme è ancora una forma.

PROPOSIZIONE 3 - <u>Sia</u> $\mathfrak{a}$ <u>un ideale omogeneo</u>; <u>allora</u> $\mathcal{V}(\mathfrak{a})$ <u>è un cono con vertice nell'origine.Viceversa, se</u> V <u>è un cono con vertice nell'origine, l'ideale</u> $\mathcal{J}(V)$ <u>è omogeneo</u>.

<u>Dim</u>. Il primo asserto si ottiene riconducendosi al caso delle ipersuperficie visto nel n°1: se $\mathfrak{a}$ è omogeneo,dunque generato da forme $f_1,\dots,f_q$ e se $y\in\mathcal{V}(\mathfrak{a})$ si ha $f_i(ty) = 0$ per ogni $t\in K$, cioè $\mathcal{V}(\mathfrak{a})$ è un cono .

Sia, viceversa, V un cono con vertice nell'origine ed

$f = \sum_{i=0}^{q} f_i \in \mathcal{J}(V)$ ($\partial f_i = i$). Se $y \in V$ deve aversi $(ty) \in V$ per ogni $t \in K$;onde:

$0 = f(ty) = f_0 + t\, f_1(y) + \ldots + t^q f_q(y)$ per ogni $t \in K$.

Poichè K è infinito,dal principio d'identità dei polinomi deve essere $f_0 = f_1(y) = \ldots = f_q(y) = 0$; ciò deve accadere per ogni $y \in V$ per cui si trae $f_i \in \mathcal{J}(V)$ come volevasi.

n° 3 - Spazi proiettivi e varietà proiettive.

Sia $O = (0,\ldots,0)$ l'origine di K^{n+1}. Si consideri nell'insieme $I = K^{n+1} - \{0\}$ la seguente relazione di equivalenza:

$(y_0, y_1, \ldots, y_n) \sim (z_0, z_1, \ldots, z_n)$ se esiste un elemento non nullo $t \in K$ tale che $y_i = t\, z_i$ per $i=0,1,\ldots,n$.

L'insieme $I/\sim$ dicesi spazio proiettivo a n dimensioni su K e si denota con $\mathbb{P}_n^K$;la classe di $y=(y_0,y_1,\ldots,y_n)$ in $\mathbb{P}_n^K$ si dice un punto di $\mathbb{P}_n^K$. Spesso, con arbitrio di notazione,si usa indicare tale classe ancora con $(y_0,y_1,\ldots,y_n)$; ma allora $(y_0,y_1,\ldots,y_n) = (z_0,z_1,\ldots,z_n)$ significa che le y_i differiscono dalle z_i per un fattore di proporzionalità .Se $y = (y_0,y_1,\ldots,y_n) \in \mathbb{P}_n^K$ si dice che $y_0,\ldots,y_n$ sono una n+1-upla di coordinate omogenee di y un'altra n+1-upla di coordinate omogenee di y differisce dunque da quella per un fattore di proporzionalità non nullo.

OSSERVAZIONE - Ricordiamo che lo spazio affine K^{n+1} è uno spazio vettoriale su K di dimensione n+1. Se $y = (y_0,y_1,\ldots,y_n)$ è un punto di K^{n+1} distinto dall'origine l'insieme $(ty_o, ty_1, \dots, ty_n)$ è un sottospazio di dimensione 1, precisamente costituito dalla retta congiungente l'origine con y. Volendo, si può quindi identificare $\mathbb{P}_n^K$ coll'insieme dei sottospazi vettoriali di dimensione 1 di K^{n+1}.

LEMMA 1 - Siano y un punto di $\mathbb{P}_n^K$, $(y_o, \dots, y_n)$ una n+1-upla di coordinate omogenee di y e f un polinomio di $k[X_o, X_1, \dots, X_n]$. Allora f è annullato da una qualsiasi n+1-upla di coordinate omogenee di y se e solo se ogni componente omogenea di f si annulla in $(y_o, \dots, y_n)$

Dim. Posto $f = \sum_{i=o}^{q} f_i$ colle f_i componenti omogenee di grado i si ha :

$$f(ty_o, ty_1, \dots, ty_n) = \sum_{i=o}^{q} t^i f_i(y_o, y_1, \dots, y_n)$$

e, per il principio d'identità dei polinomi :

$f(ty_o, ty_1, \dots, ty_n) = 0$ per ogni t se e solo se $f_i(y_o, \dots, y_n) = 0$ per ogni i.

Dal lemma precedente risulta quindi che un punto di $\mathbb{P}_n^K$ potrà considerarsi "zero" di un polinomio se e solo se tale punto risulta uno zero di un certo numero di polinomi omogenei. Ciò giustifica la seguente

DEFINIZIONE - Siano f un polinomio omogeneo di $k[X_o, \dots, X_n]$ ed y un punto di $\mathbb{P}_n^K$. Si dice che y è uno zero di f se f è annullato da una n+1-upla di coordinate omogenee di y o, ciò che è lo stesso, se f è annullato da una qualsiasi n+1-upla di coordinate omogenee di y. Se, inoltre, $\mathfrak{a}$ è un ideale omogeneo di $k[X_o,\dots,X_n]$ si dice che y è uno <u>zero di</u> $\mathfrak{a}$ se y è uno zero di tutti i polinomi di $\mathfrak{a}$ o, equivalentemente, se y è uno zero di tutti i polinomi omogenei di $\mathfrak{a}$.

DEFINIZIONE - Se $\mathfrak{a}$ è un ideale omogeneo di $k[X_o,\dots,X_n]$ l'insieme degli zeri di $\mathfrak{a}$ in $\mathbb{P}^K_n$ si dice la k-<u>varietà algebrica proiettiva associata ad</u> $\mathfrak{a}$ e si nota con $\mathcal{V}(\mathfrak{a})$.

OSSERVAZIONE - La notazione così introdotta può indubbiamente generare confusione. Infatti, nei capitoli precedenti si è indicato con $\mathcal{V}(\mathfrak{a})$ un altro luogo geometrico e precisamente l'insieme degli zeri per l'ideale $\mathfrak{a}$ dello spazio affine K^{n+1} .Quando si studiano contemporaneamente le varietà affini e le varietà proiettive, definite da uno stesso ideale omogeneo $\mathfrak{a}$,può essere allora utile indicare con $\mathcal{V}_p(\mathfrak{a})$ la varietà proiettiva definita da $\mathfrak{a}$ in $\mathbb{P}_n$ e con $\mathcal{V}_a(\mathfrak{a})$ la varietà affine definita da $\mathfrak{a}$ in K^{n+1}. Come sappiamo dalla prop.3 la varietà $\mathcal{V}_a(\mathfrak{a})$ è un cono con vertice nell'origine di K^{n+1} ; si suol dire che $\mathcal{V}_a(\mathfrak{a})$ è <u>il cono affine</u> associato alla varietà proiettiva $\mathcal{V}_p(\mathfrak{a})$.

ESEMPIO - Sia $\mathfrak{a} = (X_o^2+X_1^2-X_2^2)$ ideale di $k[X_o,X_1,X_2]$. $\mathcal{V}_p(\mathfrak{a})$ è una varietà di $\mathbb{P}_2$ che dicesi <u>conica proiettiva</u> in quanto luogo di zeri di un polinomio di secondo grado.

$\mathcal{V}_a(\mathfrak{a})$ è il cono di k^3 definito dalla quadrica $X_o^2+X_1^2-X_2^2$.

nº 4 - <u>Parti affini di una varietà proiettiva</u>.

Si consideri l'applicazione $\varphi^{(o)}: K^n \longrightarrow \mathbb{P}^K_n$ così definita: $\varphi^{(o)}(x_1,x_2,\dots,x_n) = (1,x_1,x_2,\dots,x_n)$; tale applicazione è evidentemente iniettiva e permette di immergere K^n nel sotto spazio affine $\varphi^{(o)}(K^n)$ di $\mathbb{P}_n$. Si ponga $A_n^{(o)} = \varphi^{(o)}(K^n)$.

Analogamente, se i è un intero $\leq n$ si può definire l'immersione $\varphi^{(i)}: K^n \longrightarrow \mathbb{P}_n$ mediante:

$\varphi^{(i)}(x_1,\dots,x_n) = (x_1,\dots,x_i,1,x_{i+1},\dots,x_n)$; si pone $A_n^{(i)} = \varphi^{(i)}(K^n)$.

Si riconosce subito che si ha $\mathbb{P}_n = \bigcup_{i=o}^{n} A_n^{(i)}$; cioè: lo <u>spazio proiettivo di dimensione</u> n <u>è ricoperto dagli</u> $n+1$ <u>spazi affini</u> $A_n^{(i)}$.

Lo spazio affine $A_n^{(i)}$ è il luogo dei punti $(y_o,y_1,\dots,y_n) \in \mathbb{P}_n$ tali che $y_i \neq 0$,cioè è il complementare dei punti di $\mathbb{P}_n$ tali che $y_i = 0$: si suol dire che $A_n^{(i)}$ è la parte affine di $\mathbb{P}_n$ relativa all'iperpiano improprio $y_i = 0$.

Se V è una varietà proiettiva di $\mathbb{P}_n$ la varietà affine $V^{(i)} = V \cap A_n^{(i)}$ dicesi restrizione affine di V al complementare dell'iperpiano improprio $y_i = 0$.

ESEMPIO - Si consideri la conica C di $\mathbb{P}_2$ definita dal polinomio $f = X_o^2+X_1^2+X_1X_2$. La parte affine C^o consta dei punti $(1,x_1,x_2)$ che sono zeri di f; tali punti sono in corrispondenza biunivoca coi punti dell'iperbole definita dal polinomio $1+X_1^2+X_1X_2$; analogamente C^1 si può identificare alla parabola definita da $X_o^2+1+X_2$ e C^2 è l'ellisse (cerchio) definito da $X_o^2+X_1^2+X_1$.

Si suol dire che la conica C di $\mathbb{P}_2$ si ottiene da $C^i (0 \leq i \leq 2)$ mediante l'aggiunta dei suoi punti impropri relativi all'iperpiano $X_i = 0$.

OSSERVAZIONE - Dall'esempio precedente risulta che il cono affine associato a C ha dimensione maggiore di un'unità delle parti affini di C; questo è un fatto che vale in generale.

OSSERVAZIONE 1 - Abbiamo visto nell'esempio precedente come dalla conica proiettiva C si passa alle restrizioni affini C°, C^{1}, C^{2}. Si può anche fare il processo inverso; vediamo ad esempio come da C° si passa a C. Il polinomio definente C° è $g(X_1, X_2) = 1+X_1^2+X_1X_2$; allora il polinomio

$$X_o^{\partial g}\, g\left(\frac{X_1}{X_o}, \frac{X_2}{X_o}\right) = X_o^2\left(1+ \left(\frac{X_1}{X_o}\right)^2 + \frac{X_1}{X_o}\,\frac{X_2}{X_o}\right) = X_o^2 + X_1^2 + X_1X_2$$

è il polinomio omogeneo f definente la conica proiettiva C.

Tale procedimento può evidentemente generalizzarsi e permette di passare da un ideale qualunque $\mathfrak{a}$ (omogeneo o non omogeneo) di $k[X_1,\ldots,X_n]$ a un ideale omogeneo $\mathfrak{b}$ di $k[X_o,X_1,\ldots,X_n]$ tale che la restrizione affine di $\mathcal{V}_p(\mathfrak{b})$ allo spazio affine complementare dell'iperpiano $X_o = 0$ è la varietà affine $\mathcal{V}(\mathfrak{a})$.

OSSERVAZIONE 2 - L'esempio precedente mostra che le restrizioni affini di C hanno tutte la stessa dimensione d (d=1) mentre il cono affine associato a C ha dimensione d+1. Anche questo è un fatto che vale in generale.

n° 5 - Validità di risultati per le varietà proiettive.

Si può definire il cosiddetto anello A delle coordinate omogenee di una varietà proiettiva in modo analogo a quanto fatto per le varietà affini e cioè : se $\mathfrak{a}$ è l'ideale omogeneo di $k[X_o,X_1,\ldots,X_n]$ definente la varietà proiettiva $\mathcal{V}(\mathfrak{a})$ si pone $A= k[X_o,X_1,\ldots,X_n]/\mathcal{J}(\mathfrak{a})$ dove $\mathcal{J}(\mathfrak{a})$ è un ideale omogeneo per la prop.3. Tuttavia, volendo definire la dimensione di $\mathcal{V}(\mathfrak{a})$ mediante il grado di trascendenza di tale anello (se $\mathfrak{a}$ è primo) si ottiene la dimensione del cono affine. L'osservazione 2 del n° 4 mostra che tale dimensione differisce di un'unità da quella delle parti affini di $\mathcal{V}(\mathfrak{a})$ che,come s'intuisce,dev'essere la dimensione "giusta". E in effetti si può definire in modo conveniente (seppure più complicato del corrispondente nel caso affine) il corpo delle funzioni razionali di una varietà proiettiva irriducibile $\mathcal{V}(\mathfrak{a})$ e a partire da questo ottenere una definizione soddisfaciente di dimensione di una varietà proiettiva.

Questa osservazione,assieme agli argomenti svolti nei numeri precedenti,mostra che fare una "geometria proiettiva" è un pò più complicato che fare una "geometria affine". Comunque ciò si può fare e si possono estendere con un pò di lavoro e qualche modifica, ma senza sostanziali difficoltà, tutti i risultati inclusi nei Capitoli III° e IV°. Con ciò è stata data soltanto un'idea della geometria proiettiva,ma quanto basta per terminare questo corso.