Capitolo 1

Elementi di Teoria delle Misure

1.1 Perché si esegue una misurazione

La scienza della misurazione ha una notevole rilevanza nei diversi settori del mondo della ricerca, della tecnica e dell'economia. Tre sono i motivi fondamentali che ci spingono ad eseguire una misurazione.

- **Determinazione quantitativa di una proprietà di un oggetto** quale ad esempio la resistenza di un dispositivo, la tensione di una batteria, l'intensità di un campo magnetico. Queste operazioni, che potrebbero sembrare banali, sono invece complesse sia a livello teorico che sperimentale, a causa dei numerosi problemi di cui bisogna tener conto e che saranno considerati nel seguito. Da notare che spesso il risultato di una misurazione ha anche dei risvolti legali: al risultato di una misurazione fa spesso riferimento il legislatore, come pure il perito chiamato dal giudice che deve dirimere controversie legali, o il tecnico interessato alla verifica delle specifiche di alcuni prodotti, ad esempio per motivi commerciali (controllo della qualità).

- **Controllo di un processo o dello stato di funzionamento di un dispositivo**. Con la misurazione si determina il valore di una grandezza, utilizzata come ingresso del sistema di reazione che controlla un certo processo. Ad esempio il termostato dello scaldabagno domestico misura la temperatura dell'acqua, confronta questo valore con una temperatura prefissata e regola l'energia fornita al dispositivo. In alcuni ricevitori televisivi un sensore misura l'illuminazione dell'ambiente per poter regolare la luminosità dell'immagine. Ancora, i moderni sistemi industriali di produzione o di trasporto utilizzano complessi sistemi di supervisione e controllo, che richiedono la misurazione di diverse grandezze.

- **Ricerca e convalida di una legge fisica e dei valori delle costanti sperimentali**. La verifica delle leggi che governano un certo fenomeno fisico richiede spesso delle misurazioni. In questo ambito, possono essere distinti due approcci operativi, un primo **teorico** ed un secondo **sperimentale**. L'approccio teorico si basa sulla conoscenza *a priori* di un modello matematico del sistema misurato, che consente di predirne il comportamento e di applicare tecniche di misurazione indirette. Bisogna comunque tener conto del fatto che per ridurre la complessità del modello è quasi sempre necessario fare ipotesi riduttive ed operare semplificazioni. Proprio a causa di queste limitazioni, i risultati forniti dell'analisi teorica sono comunque generalmente diversi dal comportamento reale e dipendono fortemente dalla bontà del modello adottato. L'approccio sperimentale, invece, non richiede un modello matematico (perché la conoscenza teorica in merito non è consolidata o perché si vogliono verificare alcune nuove ipotesi). In questo caso si opera direttamente sul sistema fisico, giungendo a caratterizzarne l'effettivo comportamento reale. Nei problemi più complessi di misurazione, è comunque sempre necessaria la considerazione di entrambi gli approcci. La convalida di una legge fisica viene generalmente effettuata dal fisico, il quale determina anche, all'interno di un sistema di unità di misura, i valori delle costanti fondamentali. Il compito dell'ingegnere è più frequentemente invece quello di ricavare, mediante misurazioni, i valori delle costanti sperimentali che sono necessarie per la corretta esecuzione di un progetto, come ad esempio la densità, la conducibilità elettrica, i coefficienti di dilatazione termica o di temperatura, la resistenza termica ed il potere fonoassorbente di un particolare materiale.

La conoscenza e descrizione quantitativa delle grandezze d'interesse del fenomeno in esame, inserita in un modello prefissato, consente spesso di prevederne il comportamento, in condizioni in genere anche diverse da quelle osservate.

L'ingegnere impegnato in attività di progettazione, di realizzazione o di collaudo di una apparecchiatura o di una struttura, solitamente è spinto dalle prime due motivazioni. La terza motivazione è invece più vicina all'ingegnere che opera in un laboratorio di ricerca. L'approccio dell'ingegnere è comunque quello di chi deve considerare le misure anche sotto l'aspetto legale, analizzando spesso anche l'aspetto teorico dei fenomeni in esame. Per l'ingegnere la misura ha essenzialmente fini pratici. Egli deve identificare un modello del processo in esame, adeguato al livello d'incertezza richiesto, e deve eseguire la misurazione riducendo al minimo gli investimenti, sia in termini di tempo che di soldi.

1.2 Il costo delle misurazioni

In una società industriale come la nostra l'esecuzione delle misurazioni influenza ogni attività ed a livelli spesso insospettabili. Ad esempio anche in un prodotto naturale come l'uovo, l'incidenza sul prezzo finale delle varie misurazioni che vengono attuate è del 6%. Questa incidenza sale al 15-20% per il cruscotto di una autovettura e supera il 50 % per un aereo militare. Per una nazione industrializzata come l'Italia, due stime indipendenti sull'incidenza del sistema delle misurazioni sul costo di un prodotto hanno indicato rispettivamente i valori di 4-6% e di 5-7% del prodotto industriale lordo. Dato che l'ordine di grandezza di detto prodotto è dell'ordine di $1.5 \cdot 10^{12}$ euro annui, assumendo per l'incidenza delle misure un valore medio del 5%, ne consegue che $5 \cdot 10^{10}$ euro, ossia 50 miliardi, sono spesi per fare misurazioni, comprendendo in tale cifra il costo della strumentazione e del personale impegnato in tali attività.

1.3 Definizione di misura e misurazione

Il concetto di misura nasce dalla necessità di poter confrontare gli attributi di due diversi corpi o fenomeni fisici, come ad esempio il confronto tra la lunghezza di due oggetti. Nell'eseguire tale confronto bisogna però tener conto che la considerazione delle sole relazioni di uguaglianza e disuguaglianza consente sì di comparare due grandezze, ma non consente però la determinazione di una misura vera e propria, che nasce invece considerando relazioni di proporzionalità e di componibilità: ad esempio l'oggetto A ha una lunghezza doppia di quella di B. Deve essere cioè possibile associare alla grandezza in esame (*misurando*), un numero (misura) che consenta di esprimere le relazioni tra grandezze omogenee mediante le relazioni tra i numeri associati. Dato un insieme di grandezze omogenee, il numero 1 viene associato come misura ad una di esse, che può essere scelta anche ad arbitrio e che rappresenta l'unità di misura per quella grandezza. **La misura di una grandezza esprime quindi il rapporto tra la grandezza considerata e la corrispondente unità di misura.** Il processo attraverso cui si determina il valore del misurando si chiama misurazione. Prima di affrontare lo studio degli strumenti e dei metodi utilizzati per eseguire la misurazione delle diverse grandezze è sembrato opportuno premettere alcune considerazioni di carattere generale sul perché si eseguono le misurazioni e sull'entità economica che tali operazioni implicano.

1.3.1 Indicazione del risultato di una misurazione

Il solo numero rappresentante la misura di una grandezza non può da solo esaurire l'intero contenuto informativo deducibile dal procedimento di misurazione, ma è indispensabile associare ad esso altre informazioni, quali:

l'indicazione del misurando che consente di specificare il tipo di modello rappresentativo del fenomeno o grandezza in esame che si è adottato: ad es. se si assume come misurando il diametro di un pistone, si vuole indicare che per la grandezza in esame il modello adottato è quello di un cilindro retto, descrivibile con la sola misura del diametro;

l'unità di misura essenziale per comprendere il valore assunto dal misurando;

l'incertezza della misura che consente di valutare il grado di indeterminazione con cui è stato valutato il misurando.

Possono poi essere aggiunte altre informazioni relative ad esempio alle condizioni ambientali o, in generale, a tutte le grandezze d'influenza, al momento della prova.

1.4 Tipi di grandezza

Il termine **grandezza** viene usato per indicare ogni quantità, proprietà, condizione usata per descrivere fenomeni e valutabile in termini di unità di misura. Come esempi si possono indicare la resistenza elettrica di un dato conduttore o la durata di un impulso. Il termine **specie di grandezza** si utilizza per indicare l'insieme delle grandezze valutabili con lo stesso metodo di misurazione o con metodi di misurazione omologhi. Grandezze della stessa specie si dicono omogenee e possono essere valutate in base alla stessa unità di misura. L'essere valutate usando unità di misura aventi lo stesso nome o dotate delle stesse dimensioni non è però condizione sufficiente a che le grandezze siano della stessa specie. Considerando il modo di esprimere e collegare i valori assunti dalle grandezze, esse possono essere classificate in diversi tipi:

Grandezze razionali Sono grandezze i cui valori sono espressi da numeri razionali;

Grandezze numeriche (o numerali) Sono grandezze concernenti la misurazione di oggetti o eventi individuati singolarmente, i cui valori sono espressi da numeri interi positivi. L'unità di misura è il singolo oggetto o evento. Come esempio si può citare il numero di abitanti di una certa regione. Da notare che il numero di abitanti per kilometro quadrato è invece una grandezza razionale.

Grandezze complesse Sono grandezze il cui valore è espresso mediante un insieme ordinato di numeri relativi, presupponendo un sistema di riferimento. I singoli elementi dell'insieme si dicono componenti. L'intero insieme costituisce, in senso generalizzato, un numero complesso. Come esempi si possono citare tutte le grandezze vettoriali o tensoriali.

1.5 Misurabilità di una grandezza

La definizione di misura non ha applicazione immediata a tutte le grandezze, le quali possono essere distinte in più gruppi:

Grandezze direttamente misurabili per le quali si può definire e realizzare fisicamente una operazione di somma ed applicare il concetto di rapporto con una grandezza di riferimento;

Grandezze indirettamente misurabili per le quali il valore della misura viene ottenuto a partire dalla misurazione di altre grandezze, legate a quella d'interesse da una legge fisica (es. misura della resistività di un materiale a partire dal valore della resistenza e delle dimensioni geometriche del campione in esame);

Grandezze classificabili alle quali si possono applicare uguaglianze e disuguaglianze, ma non possono essere eseguiti rapporti (es. temperatura , durezza). Anche a queste viene associato un numero, considerando scale convenzionali, estendendo il concetto di misura precedentemente illustrato. In pratica si sceglie un insieme di grandezze fisiche $(G_1, G_2, \ldots, G_n)$ che rappresentano una scala di valori, associando ad esse un numero progressivo $(P_1, P_2, \ldots, P_n)$. La grandezza da misurare viene confrontata con il principio dell'uguaglianza e disuguaglianza rispetto alla scala, in modo da determinare il valore P_i cui è più prossima. Alcune grandezze diventano misurabili considerando le loro variazioni ad intervalli (es. salti di temperatura).

1.6 Metodi di misurazione

L'esecuzione di una misurazione comporta diverse fasi:

1. la prima fase è quella dell'impostazione teorica, che richiede una conoscenza preventiva del fenomeno in esame, e che consente di determinare il principio di misurazione da adottare;

2. il principio scelto viene quindi tradotto in una sequenza logica di operazioni (metodo di misurazione) ed eventualmente anche in una descrizione dettagliata delle operazioni da eseguire (procedura);

3. segue infine la realizzazione sperimentale del metodo, utilizzando strumentazione opportunamente scelta ed assemblata.

I metodi di misurazione possono essere classificati in diversi modi. Considerando come viene determinato il valore delle grandezze si hanno i seguenti metodi:

metodo diretto la misura della grandezza è ottenuta direttamente, senza misurare altre grandezze ad essa legate (con eccezione delle grandezze d'influenza e di eventuali campioni utilizzati); es. misurazione di una tensione direttamente con un voltmetro;

metodo indiretto la misura della grandezza è ottenuta a partire dalla misurazione diretta di altre grandezze che sono legate ad essa mediante relazioni funzionali; es. misurazione indiretta di una resistenza, a partire dai valori ottenuti con la misurazione diretta della tensione e della corrente e dalla legge di Ohm.

Se invece si considera il modo in cui avviene la misurazione si ha:

misurazione fondamentale in cui il valore misurato è ottenuto dalla misurazione di una delle grandezze fondamentali del Sistema di Unità di Misura (es. massa, lunghezza, tempo,..);

misurazione con il metodo del confronto la misura è ottenuta mediante confronto con una grandezza della stessa specie e di valore noto; ci sono diversi metodi di confronto:

differenziale si esegue un confronto tra la grandezza in esame ed una grandezza della stessa specie e di valore prossimo ad essa e si determina solo la differenza tra le due;

di sostituzione la grandezza in esame viene sostituita nel circuito di misura da una grandezza della stessa specie e dello stesso valore e viene verificato che lo strumento dia la stessa indicazione;

di zero la misurazione si esegue bilanciando una grandezza mediante la variazione di una o più grandezze di valore noto, legate alla prima mediante relazioni matematiche note. La condizione di bilanciamento è visualizzata dall'indicazione di zero di un appropriato strumento (es. bilanciamento dei ponti per la misurazione di resistenze o di impedenze, tecniche potenziometriche per la misurazione di tensioni).

I metodi di misurazione sono anche classificati come:

a lettura singola la misura viene ottenuta effettuando un'unica misurazione;

a lettura ripetuta la misura viene ottenuta effettuando un'analisi statistica sulla distribuzione dei dati ottenuti ripetendo la misurazione in condizioni nominalmente uguali.

1.7 Strumento per misurazione

Uno strumento per misurazione (o di misura) può essere rappresentato mediante lo schema a blocchi di Fig. 1.1.

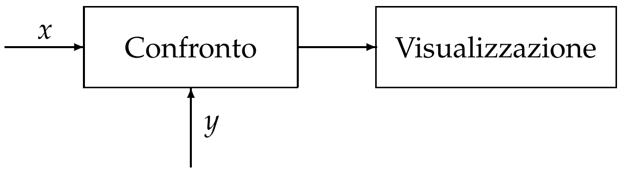

Figura 1.1: Schema a blocchi funzionale di uno strumento per misurazione

Da essa possiamo vedere che il misurando viene messo a confronto con una grandezza, ad esso omogenea, ottenuta tramite un campione di riferimento. Il risultato di questo confronto viene restituito tramite un visualizzatore. Va precisato che l'interazione tra il sistema misurato, lo strumento e l'ambiente che si instaura per generare il segnale di misura, comporta degli scambi energetici che possono alterare sia lo stato del sistema misurato che quello dello strumento. Un cambiamento dello stato del sistema misurato potrebbe modificare il valore del misurando, anche se essa in alcuni casi può essere valutata considerando il carico dello strumento e le caratteristiche del sistema misurato.

Dal punto di vista della utilizzazione, uno strumento per misurazione è caratterizzato dalle seguenti grandezze, riportate nel manuale d'uso ed a volte anche esternamente allo strumento stesso:

natura del misurando grandezza che lo strumento è destinato a misurare;

campo di misura (portata) intervallo comprendente tutti i valori delle misure che lo strumento può assegnare;

precisione grado di finezza nelle prestazioni di un operazione, o il grado di perfezione di uno strumento o metodo di misura [1]. E' un indicazione dell'uniformità o riproducibilità di un risultato di misura. La precisione si riferisce alla qualità di un'operazione dalla quale si ottiene un risultato, ed è diversa dall'accuratezza, che si riferisce alla qualità del risultato;

accuratezza grado di conformità con un riferimento (il valore "vero"). L'accuratezza si riferisce alla qualità del risultato, ed è diversa dalla precisione, definita in precedenza;

consumo caratterizza il carico dello strumento e quindi l'influenza che esso ha sul circuito di misura in cui è inserito;

limiti di impiego definiscono il campo di valori delle grandezze d'influenza entro cui lo strumento può operare conservando le sue prestazioni. Superati tali limiti lo strumento innanzitutto perde le sue caratteristiche di precisione, inoltre potrebbe essere anche permanentemente danneggiato. Come esempi si possono citare: i limiti di temperatura, la massima tensione di alimentazione, il massimo sovraccarico;

sensibilità nell'accezione più generale, è il rapporto tra il più piccolo valore rappresentabile da uno strumento di misura e il corrispondente valore della grandezza in ingresso. Analiticamente, essa è la derivata dell'uscita rispetto all'ingresso:

$$S = \frac{dy}{dx} \tag{1.1}$$

Nel caso di strumenti analogici con visualizzazione ad indice, la sensibilità è la minima variazione della grandezza in ingresso necessaria affinché l'indicatore si sposti dalla posizione di riposo alla prima deviazione rappresentata sulla scala graduata.

risoluzione minimo valore rappresentatbile dallo strumento di misura e, come tale, è legata al dispositivo di visualizzazione dello strumento. Per un dispositivo con indicazione digitale, la risoluzione coincide con la variazione di una unità della cifra meno significativa. Ad esempio, un voltmetro che sta visualizzando il valore 119,99 V ha una risoluzione di 0,01 V;

dinamica è l'intero intervallo di valori che può essere rappresentato dallo strumento; è la differenza tra la portata e la sensibilità (vista come valore minimo dell'ingresso).

1.8 Errori

Nell'eseguire una misurazione, si commette sempre un errore E,

$$E = M - V, \tag{1.2}$$

pari alla distanza tra il valore "vero" del misurando V e il risultato della misurazione M. Questa definizione, tuttavia, non è utile dal punto di vista operativo perché il valore "vero" non esiste e comunque non sarebbe possibile misurarlo proprio perché ogni tentativo è affetto da un errore, di cui non si conosce nè ampiezza nè segno. Perciò la (1.2) non si può usare per determinare, a partire dal valore misurato, il valore vero del misurando. Ciò nonostante, l'errore è una grandezza che ancora viene utilizzata, per lo meno a fini didattici, perché è stato storicamente il primo approccio utilizzato per qualificare la bontà di una misura. Inoltre, se considerazioni sul fenomeno in osservazione, sulla strumentazione e sulla procedura di misura adottata ce lo consentono, è spesso possibile introdurre un valore massimo dell'errore $E_{\max}$ che ci si può aspettare dalla misurazione, così da poter ottenere un'informazione, ancorché incompleta, sulla fascia entro la quale ci si deve aspettare di trovare il valore vero del misurando:

$$V = M \pm E_{\max} \tag{1.3}$$

Molto spesso, anziché in termini assoluti, si preferisce esprimere l'errore in termini relativi:

$$e = \frac{M - V}{V} \approx \frac{M - V}{M}, \tag{1.4}$$

dove l'ultima uguaglianza vale se l'errore assoluto E è sufficientemente piccolo. Qualora il valore di e dovesse essere particolamente piccolo, lo si può esprimere in termini percentuali (%), in permille, o anche in parti per milione (*ppm*).

Gli errori si dividono in tre tipologie diverse, a seconda della loro natura:

- **errori grossolani**: sono quegli errori dovuti, ad esempio, alla distrazione dell'operatore che legge un valore sbagliato del risultato della misurazione sullo schermo di uno strumento numerico, o sbagliando a dare un valore numerico alla posizione dell'indice in uno strumento analogico. Questi errori sono generalmente di natura tale da poter essere facilmente identificati, e la relativa misura viene perciò scartata e se possibile ripetuta;

- **errori sistematici**: sono errori che in misure ripetute mantengono il proprio segno e la propria ampiezza. In linea di principio tali errori possono essere corretti, in quanto il loro contributo resta sempre uguale: tuttavia la correzione è completa solo se si riesce a determinarne il valore senza incertezza, il che è impossibile. Anche dopo la correzione resterà perciò un'aliquota la cui entità dipende dalla bontà della misura effettuata per correggere l'errore sistematico;

- **errori aleatori**: sono così definiti quegli errori il cui valore in modulo e segno varia ad ogni misurazione. Tralasciando gli errori grossolani, e ricordando che gli errori sistematici lasciano in eredità un'aliquota imponderabile, di fatto gli unici errori che restano tali sono quelli aleatori, che sono governati da leggi di tipo statistico.

Proprio la presenza di errori aleatori rende impossibile l'individuazione del valore "vero" di un misurando poichè ogni misura sarà affetta da un errore il cui valore cambia di continuo. Alla luce di queste considerazioni, e rimandando alla Appendice A a pag. 137 per il necessario approfondimento, bisogna concludere che un valore vero non esiste: al più riusciremo ad individuare un valore che *convenzionalmente* riterremo vero, ottenuto attraverso un certo numero di misurazioni, che considereremo il più rappresentativo della grandezza oggetto della misurazione.

1.9 Legge di propagazione degli errori

Molto spesso per attribuire un valore al misurando è necessario ricorrere alla misurazione di altre grandezze ad esso collegate. Come anticipato nella Sez. 1.6 si definiscono pertanto due tipologie di misurazioni:

- **diretta**: è una misurazione, con ovvio significato dei termini, nella quale la grandezza d'interesse viene misurata direttamente; ad esempio, una tensione viene misurata direttamente mediante un voltmetro.

- **indiretta**: è quella in cui la grandezza d'interesse viene misurata attraverso la misurazione di altre grandezze legate da una relazione funzionale a quella d'interesse: se y è il misurando, anzichè misurarlo per via diretta — cosa che potrebbe a volte anche essere impossibile: si pensi alla misura di una resistenza di valore ohmico R — si può utilizzare una relazione funzionale:

$$y = f(x_1, \dots, x_n), \tag{1.5}$$

  che lega y a n grandezze indipendenti $x_1, \dots, x_n$ tramite la funzione $f(\cdot)$. Misurando per via diretta le n grandezze x_i, o comunque conoscendone il valore in qualche modo (eventualmente mediante misurazioni indirette a cascata), è possibile risalire al valore di y utilizzando la (1.5). È tipico il caso di misure di resistenza, in cui il valore della resistenza R viene misurato per via indiretta misurando la tensione V ai suoi capi e la corrente I che circola al suo interno:

$$R = \frac{V}{I}. \tag{1.6}$$

Sorge a questo punto il dubbio su come si comporti, o meglio come si *propaghi* l'errore nelle misure indirette, ovvero quale sia l'errore E_y che mi devo aspettare sulla misurazione della grandezza y una volta che siano noti gli errori E_i che commettiamo sulla misura di ciascuna delle grandezze x_i. Partiamo dalla relazione in (1.5), e scriviamo il differenziale di y:

$$dy = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n, \tag{1.7}$$

dove dy e dx_i sono variazioni infinitesime delle grandezze y e x_i intorno ad un punto. Alle derivate parziali viene comunemente assegnato il termine *coefficienti di sensibilità*. Se l'errore è, come è auspicabile e il più delle volte verificato, molto piccolo, la sostituzione $dx_i = E_i$ e $dy = E_y$ non lascia sorpresi, e pertanto la (1.7) diventa:

$$E_y = \frac{\partial f}{\partial x_1} E_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} E_n. \tag{1.8}$$

Per poter calcolare l'errore E_y tramite quest'ultima relazione è però necessario conoscere i valori e i segni di ciascuno degli errori e delle derivate coinvolte. Nella quasi totalità dei casi, però, non è necessario conoscere l'errore da cui una misura è affetta, ma solo il suo valore massimo, così da dare un'indicazione del caso peggiore con il quale nella misurazione ci dovremo confrontare. Per ottenere tale indicazione, possiamo semplicemente sommare i valori assoluti di ciascun addendo nella (1.8), e attribuire agli errori E_i i loro valori massimi. Ne discende la *legge della propagazione degli errori*:

$$E_{y,\max} = \left|\frac{\partial f}{\partial x_1}\right| E_{1,\max} + \cdots + \left|\frac{\partial f}{\partial x_n}\right| E_{n,\max}. \tag{1.9}$$

1.9.1 Esempi

Presentiamo adesso alcuni esempi di propagazione degli errori per grandezze misurate per via indiretta ottenute mediante operazioni elementari. Per semplicità di lettura riterremo che le grandezze si riferiscono sempre ai valori assoluti (così da ottenere il *worst case*).

1.9.1.1 Somma di due grandezze

$$y = x_a + x_b \quad \Rightarrow \quad E_y = E_a + E_b \quad \Rightarrow \quad e_y = \frac{E_y}{y} = \frac{E_a + E_b}{x_a + x_b} \tag{1.10}$$

Ad esempio, sommando due lunghezze $L = L_1 + L_2$, dove $L_1 = 1{,}1\,\mathrm{m}$ e $L_2 = 2{,}3\,\mathrm{m}$, a cui sono associati gli errori assoluti $E_1 = 0{,}3\,\mathrm{m}$ e $E_2 = 0{,}1\,\mathrm{m}$, si ottiene:

$$E_L = E_1 + E_2 = 0{,}4\,\mathrm{m} \quad \Rightarrow \quad e_L = \frac{0.4}{3.4} \approx 0.12$$

1.9.1.2 Differenza di due grandezze

$$y = x_a - x_b \quad \Rightarrow \quad E_y = E_a + E_b \quad \Rightarrow \quad e_y = \frac{E_y}{y} = \frac{E_a + E_b}{x_a - x_b} \tag{1.11}$$

Facciamo un esempio per mostrare quanto sia critica la misura effettuata per differenza. Supponiamo di voler misurare le perdite in un cavo coassiale: avremo una potenza in ingresso P_i e una in uscita P_o, la cui differenza è il misurando P_α, ovvero la potenza dissipata nel cavo. Se la frequenza non è troppo elevata e il cavo sufficientemente corto, possiamo ritenere che la dissipazione sia piccola. Ricordando che è: $E_x = e_x\,x$, possiamo scrivere:

$$e_d = \frac{e_i P_i + e_o P_o}{P_d} = e_p \frac{P_i + P_o}{P_i - P_o} = e_p \frac{1+\eta}{1-\eta}, \qquad (1.12)$$

dove $\eta = P_o/P_i \sim 1$ per le ipotesi fatte. Supponendo che $\eta = 99\%$, si ottiene $e_d = 199\,e_p$. Se, ad esempio, $e_p = 0.1\%$, si ottiene $e_d = 19.9\%$: l'errore sulla misura delle singole potenze d'ingresso e d'uscita viene cioè amplificato di circa 200 volte.

1.9.1.3 Prodotto di due grandezze

$$y = x_a x_b \quad \Rightarrow \quad E_y = x_b E_a + x_a E_b \quad \Rightarrow \quad e_y = \frac{E_y}{y} = e_a + e_b \qquad (1.13)$$

Volendo misurare l'area di un terreno rettangolare mediante la formula $A = b\,h$, supponendo di aver misurato $b = 15{,}5\,\mathrm{m}$, $h = 100{,}8\,\mathrm{m}$, con errori assoluti $E_b = 0{,}5\,\mathrm{m}$ e $E_h = 0{,}9\,\mathrm{m}$, si ottiene:

$$A = b\,h = 1562{,}40\,\mathrm{m}^2 \quad \Rightarrow \quad e_L \approx 0.0322 + 0.0089 \approx 0.04 \qquad (1.14)$$

1.9.1.4 Rapporto di due grandezze

$$y = \frac{x_a}{x_b} \quad \Rightarrow \quad E_y = \frac{1}{x_b} E_a + \frac{x_a}{x_b^2} E_b \quad \Rightarrow \quad e_y = \frac{E_y}{y} = e_a + e_b \qquad (1.15)$$

Per misurare il valore di una resistenza, possiamo usare la legge di Ohm $R = V/I$. Supponendo che i valori misurato per tensione e corrente siano rispettivamente $V = 1{,}01\,\mathrm{V}$ e $I = 3{,}1\,\mathrm{A}$, con errori relativi di ampiezza $e_V = 0.15$ e $e_I = 0.33$ varrà:

$$R = \frac{V}{I} = 0{,}326\,\Omega \quad \Rightarrow \quad e_R = 0.15 + 0.33 = 0.48 \qquad (1.16)$$

1.10 Sistemi di unità di misura

Misurare una qualsiasi grandezza fisica significa confrontarla con un'altra, ad essa omogenea, convenzionalmente assunta unitaria. Pertanto, la misura di una grandezza è costituita da una unità di misura e da un numero che esprime quante volte detta unità è contenuta nella grandezza da misurare. Quindi, per eseguire la misura di una qualsivoglia grandezza fisica, è necessario associare ad essa un'opportuna *unità di misura*. A tal riguardo, si definisce *sistema di unità di misura*, un qualsiasi insieme di grandezze, assunte convenzionalmente di valore unitario, attraverso le quali è possibile rappresentare tutte le grandezze di interesse della fisica.

La scelta di quali e quante unità includere in un sistema di unità di misura è, almeno in linea di principio, arbitraria. Infatti, si potrebbero definire tante unità di misura per quante sono le grandezze di interesse della fisica. Questo approccio era, appunto,

Tabella 1.1: Grandezze fondamentali del Sistema Internazionale

Grandezza	**Nome**	**Simbolo**
lunghezza	metro	m
massa	kilogrammo	kg
tempo	secondo	s
corrente elettrica	ampere	A
temperature	kelvin	K
quantità di sostanza	mole	mol
intensità luminosa	candela	cd

quello seguito in alcuni sistemi metrici di vecchio tipo, dove, per esempio, le unità di lunghezza, area e volume erano scelte indipendentemente l'una dall'altra. All'estremo opposto, sarebbe possibile definire un'unica unità fondamentale, facendo derivare, da questa, tutte le altre. Per esempio, assumendo il secondo come unità fondamentale di intervallo di tempo:

- potremmo definire come unità di lunghezza, lo spazio che la luce percorre nel vuoto in un secondo (la velocità della luce nel vuoto è una costante universale);
- avendo definito spazio e tempo, si potrebbero definire di conseguenza velocità e accelerazione;
- come unità di massa, si potrebbe definire quella che imprime l'accelerazione unitaria a una massa uguale collocata alla distanza unitaria;

e così via. Con tale approccio, tutte le dimensioni si esprimerebbero in funzione del *secondo*. Agli inizi del secolo XIX, si riteneva quasi dogmatico dover esprimere tutte le dimensioni in funzione di tre fondamentali, da scegliersi nel campo meccanico, e quindi dovere assumere tre unità meccaniche quali primitive e, da esse, far dipendere tutte le altre. Questo era d'accordo con l'idea meccanicista che tutti i fenomeni fisici si dovessero spiegare per via cinetica. Ma già verso la fine del XIX secolo, le teorie meccaniciste vennero abbandonate e si riconobbe la convenienza di introdurre, per la descrizione dei fenomeni fisici, altre unità di misura fondamentali come la temperatura, l'intensità luminosa, l'intensità di corrente elettrica, ecc.

1.10.1 Il Sistema Internazionale

Il Sistema Internazionale [2] adotta **sette grandezze fondamentali** (Tab. 1.1) e **due supplementari** (Tab. 1.2) con le relative unità e varie grandezze derivate dalle precedenti, con le relative unità.

Esso fu definito dalla XI CGPM (Conferenza Generale Pesi e Misure) nel 1960, ed è stato adottato da molti stati, tra cui l'Italia, allo scopo di superare gli inconvenienti propri dei molteplici sistemi di unità di misura che si erano diffusi nel corso dei secoli.

Infatti, un sistema di unità di misura, per essere efficace, deve rispondere ad una serie di requisiti, tra i quali:

Tabella 1.2: Grandezze supplementari del Sistema Internazionale

Grandezza	**Nome**	**Simbolo**
Angolo piano	radiante	rad
Angolo solido	steradiante	sr

universalità: il sistema deve essere accettato da tutti (diverse categorie di utenti, tutte le Nazioni, chiunque deve poter accedere ai campioni, ecc.);

precisione: il sistema deve dare la possibilità di esprimere il valore di una grandezza con tutta la precisione che la specifica applicazione richiede;

praticità: il sistema si deve prestare all'uso pratico senza creare eccessivi problemi di apprendimento e di uso;

uniformità: il sistema deve dare la possibilità di ricavare l'ampiezza di un intervallo di valori tramite due letture lungo una scala (i cippi kilometrici lungo le strade sono un esempio di misurazione uniforme);

coerenza: il sistema deve dare la possibilità di esprimere qualsiasi grandezza del sistema in funzione delle unità fondamentali, senza far ricorso a costanti o coefficienti.

Una qualsiasi unità del SI deve, quindi, poter essere espressa mediante un monomio del tipo:

$$\text{unità SI} = \mathrm{m}^{\alpha} \cdot \mathrm{kg}^{\beta} \cdot \mathrm{s}^{\gamma} \cdot \mathrm{A}^{\delta} \cdot \mathrm{K}^{\epsilon} \cdot \mathrm{cd}^{\eta} \cdot \mathrm{mol}^{\theta} \cdot \mathrm{rad}^{\lambda} \cdot \mathrm{sr}^{\mu} \tag{1.17}$$

nel quale gli esponenti $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \mu$ possono avere il valore di un numero intero: positivo, negativo o nullo.

1.10.2 Definizione delle unità di misura fondamentali

Lunghezza Il metro (m) è la lunghezza del tragitto compiuto dalla luce nel vuoto in un intervallo di tempo $t = 1/299792458$ s. Tale definizione vede l'unità di lunghezza come un'unità dipendente dal tempo. In Italia il metro è attuato mediante i campioni dell'Istituto di Metrologia Gustavo Colonnetti del CNR, a Torino.

Massa Il kilogrammo (kg) è la massa del prototipo internazionale, costituito da un cilindro di platino con altezza uguale al diametro, conservato al Pavillon de Breteuil (Sèvres). In Italia il campione del kilogrammo è conservato presso il Ministero dell'Industria, del Commercio e dell'Artigianato (Servizio Metrico), a Roma. Un altro campione è conservato presso l'Istituto di Metrologia Gustavo Colonnetti del CNR, a Torino.

Tempo Il secondo (s) è l'intervallo di tempo che contiene 9.192.631.770 periodi della radiazione corrispondente alla transizione fra i due livelli iperfini dello stato fondamentale dell'atomo di cesio 133. In Italia il secondo è attuato mediante il campione dell'Istituto Elettrotecnico Nazionale Galileo Ferraris, a Torino.

Intensità di corrente elettrica L'ampere (A) è l'intensità di corrente che, mantenuta costante in due conduttori paralleli rettilinei, di lunghezza infinita, di sezione circolare trascurabile e posti alla distanza di 1 m l'uno dall'altro nel vuoto, produce tra i due conduttori la forza di $2 \cdot 10^{-7}$ N per ogni metro di lunghezza. In Italia l'ampere è attuato mediante il campione dell'Istituto Elettrotecnico Nazionale Galileo Ferraris, a Torino.

Definito l'ampere come sopra, è possibile definire anche il valore della permeabilità magnetica nel vuoto μ_0. Se infatti ricordiamo che vale:

$$F = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1 I_2}{d} l \tag{1.18}$$

imponendo $I_1 = I_2 = 1$ A, $d = 1$ m ed $F/l = 2 \cdot 10^{-7}$ N, si ottiene per μ_0 il valore:

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \mathrm{H/m}. \tag{1.19}$$

Discendendo direttamente dalla definizione di ampere e da una legge fisica, l'espressione di μ_0 in (1.19) è nota senza incertezza. Ciò peraltro è vero fintantochè π viene scritto in forma simbolica. Qualora servisse esplicitarne il valore numerico, la sua natura di numero irrazionale darebbe la possibilità di scrivere solo un numero finito di cifre decimali, con un conseguente errore di troncamento che si ripercuoterebbe con pari entità sul valore di μ_0.

Proseguendo sulla stessa linea che ci ha consentito di ricavare il valore di μ_0 possiamo ricavare il valore di ϵ_0, costante dielettrica nel vuoto, a partire dalla conoscenza della costante universale c, velocità della luce nel vuoto:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \Rightarrow \epsilon_0 = \frac{1}{c^2 \mu_0} \mathrm{F/m}. \tag{1.20}$$

Temperatura termodinamica Il grado kelvin (K) è la frazione $1/273,16$ della temperatura termodinamica del punto triplo dell'acqua. In Italia la scala termodinamica della temperatura è attuata mediante i campioni dell'Istituto di Metrologia Gustavo Colonnetti del CNR, a Torino.

Quantità di sostanza La mole (mol) è la quantità di sostanza di un sistema che contiene un numero di Avogadro di entità elementari (numero di atomi presenti in 0,012 kg di carbonio 12). Le entità elementari devono essere specificate e possono essere atomi, molecole, ioni, elettroni, ecc. ovvero gruppi specificati di tali particelle.

Intensità luminosa La candela (cd) è l'intensità luminosa in una data direzione di una sorgente che emette una radiazione monocromatica di frequenza $540 \cdot 10^{12}$ Hz e la cui intensità energetica in quella direzione è $1/683$ W/sr. Tale grandezza è, in genere, rappresentata da lampade campioni, alimentate da un valore prefissato di corrente continua. In Italia la candela è attuata mediante il campione dell'Istituto Elettrotecnico Nazionale Galileo Ferraris, a Torino.

1.10.3 Definizione delle unità di misura supplementari

Angolo piano Il radiante (rad) è l'angolo piano al centro di una circonferenza che intercetta su di essa un arco di lunghezza uguale a quella del raggio.

Angolo solido Lo steradiante (sr) è l'angolo solido al centro di una sfera che intercetta su di essa una calotta di area uguale a quella del quadrato di lato uguale al raggio.

1.10.4 Campioni

A ciascuna unità di misura del SI è associato un campione. I requisiti fondamentali richiesti ad un campione sono:

Stabilità nel tempo la grandezza realizzata dal campione deve mantenere il più possibile costante nel tempo il suo valore;

Riproducibilità il campione deve essere facilmente realizzabile in laboratorio;

Non influenzabilità il campione non deve essere perturbato dall'ambiente circostante;

Confrontabilità il campione deve essere facilmente comparabile con grandezze ad esso omogenee.

I campioni possono essere classificati in:

naturali se riferiti ad un fenomeno fisico;

artificiali se basati su prototipi che materializzano la relativa grandezza.

La definizione delle unità di misura del sistema SI, spetta alla **Conferenza Generale dei Pesi e Misure** (CGPM) il cui organo tecnico, il **Bureau International de Poids et Mesures** (BIPM) ha il compito di conservare i campioni materiali delle unità del sistema SI, detti *campioni primari*, e di curare il loro confronto con i campioni realizzati presso i vari laboratori metrologici nazionali, detti *campioni secondari*.

In Italia, le funzioni di istituti metrologici, sono svolte dall'Istituto Metrologico G. Colonnetti di Torino nel campo della meccanica e della termologia; dall'Istituto Elettrotecnico Nazionale G. Ferraris, sempre di Torino, per le misure di tempo, frequenza, per le grandezze elettriche, ottiche ed acustiche. Infine l'ENEA si occupa delle misure nel campo delle radiazioni ionizzanti.

Questi istituti conservano i campioni nazionali delle varie grandezze e procedono, periodicamente, al loro confronto con quelle di altre nazioni e del BIPM. Inoltre essi sono di riferimento, in ambito nazionale, per tutto il settore scientifico ed industriale. Ad esempio, nel settore della produzione industriale, è importantissimo e, spesso prescritto, il rispetto di Norme specifiche del bene che si intende produrre. Per garantire tale requisito, le varie fasi della lavorazione del prodotto devono prevedere apposite operazioni di misurazione a scopo di verifica e collaudo e, gli strumenti di misura devono essere, a loro volta, controllati periodicamente presso un istituto metrologico o in appositi centri autorizzati dagli istituti metrologici stessi.

Tabella 1.4: Prefissi usati nel SI

Prefisso	Simbolo	Valore	Prefisso	Simbolo	Valore
yocto	y	10^{-24}	yotta	Y	10^{24}
zepto	z	10^{-21}	zetta	Z	10^{21}
atto	a	10^{-18}	exa	E	10^{18}
femto	f	10^{-15}	peta	P	10^{15}
pico	p	10^{-12}	tera	T	10^{12}
nano	n	10^{-9}	giga	G	10^{9}
micro	µ	10^{-6}	mega	M	10^{6}
milli	m	10^{-3}	kilo	k	10^{3}
centi	c	10^{-2}	hecto	h	10^{2}
deci	d	10^{-1}	deca[a]	da	10^{1}

[a] Negli USA, è spesso usato il termine 'deka'.

i metodi di misura. A tale normalizzazione provvedono appositi organi nazionali ed internazionali. In campo elettrico, l'Ente preposto alla normalizzazione internazionale è la Commissione Elettrotecnica Internazionale (addetta alla pubblicazione delle Norme IEC) e, in sede nazionale, opera il Comitato Elettrotecnico Italiano (addetto alla pubblicazione delle Norme CEI). Le Norme IEC costituiscono norme generali, in materia di definizioni, modalità di prova, criteri di collaudo, ecc., che formano la base delle norme nazionali. Alcune Norme CEI, di interesse produttivo, sono trasferite a leggi di Stato. La rispondenza degli strumenti alle norme nazionali è, in genere, indicata con un apposito contrassegno (marchio CEI). È utile ricordare che le unità di misura elettriche, i cui nomi derivano da quelli di grandi fisici del passato (e.g. Ampere, Joule, Volta, Henry, etc.), quando sono indicate per esteso, vanno usate con l'iniziale minuscola e sono indeclinabili (e.g. in inglese non prendono la s al plurale).

1.11 Legge della propagazione delle incertezze

Sebbene valida da un punto di vista storico, e ancora utilizzata in alcuni ambiti industriali, la trattazione dell'errore ha lasciato da tempo posto alla trattazione dell'incertezza, più corretta da un punto di vista formale perché assume come punto di partenza non l'esistenza di un valore vero ma di una distribuzione di valori. Nella Appendice A, a cui si rimanda per un approfondimento, vengono richiamati alcuni concetti fondamentali di statistica. In particolare, viene mostrato che di una grandezza x che assume valori secondo una determinata distribuzione, quello più rappresentativo è la media statistica $\mu = E[x]$, perché essa minimizza l'errore medio quadratico fra la grandezza x e qualsiasi altro stimatore (vedi (A.21) a pag. 144). Come per l'errore, si pone anche per la trattazione in termini probabilistici il problema di determinare l'incertezza nelle misure indirette (vedi [**?**, 4]).

Un primo approccio potrebbe essere quello di determinare la distribuzione di y a partire dalla conoscenza delle distribuzioni di x_i e della funzione $f(\cdot)$, e ricavare μ_y e σ_y applicando le definizioni in (A.12) a pag. 142. Tuttavia, quand'anche le distribuzioni fossero note, solitamente il calcolo della distribuzione di y è laborioso e spesso si può effettuare solo per via numerica.

Nel seguito affronteremo il problema in un modo alternativo: partendo dalla relazione funzionale (1.5), otterremo una stima y_e della grandezza y tramite le stime $x_{i,e} = E[x_i]$ delle grandezze x_i e daremo una formula per la valutazione dell'incertezza di tale stima a partire dalle incertezze $u(x_i)$.

Supponiamo innanzitutto che la (1.5) possa essere linearizzata intorno alle stime $x_{i,e}$, così da avere il seguente modello:

$$y_l = f(x_{1,e}, \ldots, x_{n,e}) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_i - x_{i,e}), \tag{1.30}$$

nella quale le derivate parziali sono calcolate nei punti $x_i = x_{i,e}$, anche se per brevità tale indicazione verrà omessa nel seguito.

La migliore stima del modello linearizzato è $y_{l,e} = E[y_l] = \mu_{y_l}$, che è pari a:

$$y_{l,e} = E[y_l] = E\left[f(x_{1,e}, \ldots, x_{n,e})\right] + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} E\left[(x_i - x_{i,e})\right] = f(x_{1,e}, \ldots, x_{n,e}), \tag{1.31}$$

dal momento che $E[(x_i - x_{i,e})] = 0$. Pertanto è:

$$\boxed{y_{l,e} = f(x_{1,e}, \ldots, x_{n,e})}, \tag{1.32}$$

che ci dice che se la y si può linearizzare intorno alle $x_{i,e}$, allora la stima del misurando y è uguale alla funzione $f(\cdot)$ valutata nei punti corrispondenti alle stime delle singole variabili x_i. Qual è l'errore che commetto nell'approssimare y_l con la sua stima $y_{l,e}$? Quanto dista mediamente una realizzazione di y_l dalla sua media? In altre parole, qual è l'incertezza associata a y_l? Calcoliamo allora l'errore quadratico medio fra la grandezza linearizzata y_l e la sua stima $y_{l,e}$, ovvero la varianza di y_l:

$$E\left[(y_l - y_{l,e})^2\right] = E\left[\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_i - x_{i,e})\right)^2\right]. \tag{1.33}$$

Il quadrato della somma all'interno dell'operatore di media statistica si espande nella somma dei quadrati dei singoli termini, più la somma dei doppi prodotti dei termini con indice $i \neq j$:

$$E\left[(y_l - y_{l,e})^2\right] = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 E[(x_i - x_{i,e})^2] + 2\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j} E[(x_i - x_{i,e})(x_j - x_{j,e})]. \tag{1.34}$$

Ricordando quanto detto in Appendice A, gli errori quadratici medi presenti nella prima sommatoria a secondo membro della (1.34) corrispondono alle incertezze associate a x_i, mentre i termini mutui $E[(x_i - x_{i,e})(x_j - x_{j,e})]$ corrispondono ai termini di covarianza, che sono diversi da zero solo se le misure sono correlate. Possiamo perciò riscrivere $E[(x_i - x_{i,e})^2] = u^2(x_i)$, $E[(x_i - x_{i,e})(x_j - x_{j,e})] = u(x_i, x_j)$, e la formula in (1.34) diventa:

$$\boxed{u^2(y_l) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 u^2(x_i) + 2\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j} u(x_i, x_j)}, \tag{1.35}$$

che è nota come *legge di propagazione delle incertezze*.

1.11.1 Metodologie per la valutazione dell'incertezza

Con la (1.35) abbiamo uno strumento che ci consente di conoscere l'incertezza sulla misura indiretta tramite la conoscenza dell'incertezza sulle grandezze misurate per via diretta e la funzione che le lega al misurando.

Per valutare le diverse componenti che concorrono a determinare l'incertezza $u(x_i)$ della stima $x_{i,e}$ si possono applicare due metodi, così come indicato dalla norma specifica [5], la cui applicazione è mostrata in [6]:

- **Metodologia di Tipo A**: è quella metodologia nella quale l'incertezza viene valutata per via statistica mediante l'esecuzione di misure ripetute;

- **Metodologia di Tipo B**: è quella metodologia in cui le informazioni sull'incertezza provengono per altra via, non attraverso misure ripetute: conoscenza pregressa, informazioni ottenute da specifiche strumentali, risultati di precedenti misurazioni sono un sempio di come si possa effettuare una valutazione di tipo B.

1.11.1.1 Valutazione di tipo A

Qualora si voglia e si possa effettuare un insieme di M misure ripetute nelle stesse condizioni, è possibile ottenere una stima $x_{i,e}$ attraverso la *media campionaria* delle M misure, secondo quanto riportato dalla teoria presentata in Appendice A. Pertanto, la stima $x_{i,e}$ sarà $x_{i,e} = \bar{x}$ e l'incertezza su tale stima sarà pari allo scarto tipo sperimentale $u(\bar{x}) = s(x_i)/\sqrt{M}$. Come esempio, supponiamo di avere M misure $V_1, V_2, \ldots, V_M$ della differenza di potenziale V ai capi di una resistenza. La stima del valore della tensione, ovvero il valore che indicheremo come risultato della misurazione, e l'incertezza legata a tale stima saranno:

$$\bar{V} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} V_i \tag{1.36}$$

$$u_A = u(\bar{V}) = \sqrt{\frac{1}{M(M-1)}\sum_{i=1}^{M}(V_i - \bar{V})^2} \tag{1.37}$$

1.11.1.2 Valutazione di tipo B

Può succedere spesso che ci si debba affidare ad altre informazioni per determinare il valore da assegnare a $u(x_i)$, e che essa venga stimata attraverso la varianza di una distribuzione ottenuta sulla base delle informazioni disponibili. Tali informazioni possono essere ottenute, ad esempio, da fogli di specifica degli strumenti, o da ipotesi fatte sul comportamento dei dati di misura.

Ad esempio, potremmo avere a disposizione l'errore massimo relativo ϵ dichiarato da un costruttore sul valore di una resistenza di valore nominale R. Tale informazione deve essere in qualche modo trasformata in un'informazione di varianza di una distribuzione. L'approccio più semplice è quello di associare al valore nominale una distribuzione rettangolare di semi-ampiezza pari a ϵ, la cui varianza è pari a:

$$u_B = \frac{\varepsilon}{\sqrt{3}}. \tag{1.38}$$

È importante sottolineare che su ogni grandezza misurata x_i si devono valutare tutti i contributi che concorrono a determinare il valore globale di incertezza associata a quella misura. Alcuni contributi potranno essere valutati solo tramite un approccio di tipo A, altri solo mediante un approccio di tipo B. Una volta ottenuti tutti i contributi, seguendo quanto dice la norma [5] essi vanno combinati in un'unica espressione mediante la formula:

$$u = \sqrt{u_A^2 + u_B^2}. \tag{1.39}$$

1.11.2 Fattore di copertura k

Torniamo alla (1.35). Una volta ottenute le incertezze $u(x_i)$, e anche le covarianze $u(x_i, x_j)$ se le misure sono correlate, è possibile determinare l'incertezza $u(y)$ da associare alla stima di y. Essa corrisponde alla varianza della distribuzione dei dati di misura, e ad essa corrisponderà una determinata probabilità con la quale ci dobbiamo aspettare di trovare il valore vero all'interno dell'intervallo di semi-ampiezza $u(y)$. Se la distribuzione dei dati di misura è gaussiana, come di solito ci si aspetta in considerazione della dipendenza del misurando y da un numero elevato di grandezze ciascuna delle quali fornisce il proprio contributo all'incertezza complessiva, le corrispondenze fra ampiezza degli intervalli e probabilità associate è la seguente:

$$P(\mu \in [x_e - \sigma; x_e + \sigma]) \sim 68.3\% \tag{1.40}$$
$$P(\mu \in [x_e - 2\sigma; x_e + 2\sigma]) = 95.45\% \tag{1.41}$$
$$P(\mu \in [x_e - 3\sigma; x_e + 3\sigma]) = 99.73\%. \tag{1.42}$$

Spesso è importante riportare l'indicazione dell'incertezza relativa ad un intervallo che corrisponde ad una probabilità maggiore del 68%. In altre parole, è necessario applicare all'incertezza un fattore di copertura $k \neq 1$, e pari solitamente a $k = 2$ o $k = 3$. L'incertezza così ottenuta $U(y) = k\,u(y)$ è detta **incertezza estesa**, e nel riportarne il valore nel risultato della misurazione è sempre importante indicare il coefficiente di copertura applicato, per evitare di generare fraintendimenti nell'interpretazione dei risultati.

1.12 Esempio numerico

Come esempio dell'applicazione della legge di propagazione dell'incertezza, presentiamo una misura di potenza dissipata in regime continuo su una resistenza di valore ohmico R. Come è noto dall'elettrotecnica, esistono tre diverse relazioni per ottenere l'informazione desiderata: 1) $P = VI$; 2) $P = V^2/R$; 3) $P = I^2R$. Nel seguito effettueremo la misura secondo tutti e tre i metodi, al fine di verificare quale dei tre, con le specifiche strumentali che indicheremo di seguito, dia i risultati con incertezza più bassa. L'esercizio sarà svolto nelle seguenti ipotesi:

1. Il valore nominale della resistenza è $R = 150\,\Omega$, e in base alle specifiche fornite dal costruttore, il suo valore è noto con un errore massimo relativo $\varepsilon = 0.05\%$;

2. Sia per le misure di tensione, sia per la misure di corrente, stimeremo il valore del misurando mediante misure ripetute con $N = 36$ valori di tensione e di corrente.

3. Le specifiche di *accuracy* del voltmetro e dell'amperometro sono le seguenti:

$$U_v = 30\,\text{ppm}\,V_l + 5\,\text{ppm}\,V_R \tag{1.43}$$
$$U_i = 500\,\text{ppm}\,I_l + 800\,\text{ppm}\,I_R, \tag{1.44}$$

   dove V_l e I_l sono i valori letti dal voltmetro e dall'amperometro rispettivamente, V_R e I_R sono i *range*, ovvero le portate[1] degli strumenti usate nelle misure correnti, nel nostro caso pari a $V_R = 10\,\text{V}$ e $I_R = 100\,\text{mA}$, e ppm *indica parti per milione*, ovvero 10^{-6}. Entrambe le specifiche sono fornite con un fattore di copertura $k = 4$.

Procediamo a questo punto con l'applicazione di ciascuno dei tre metodi.

[1] Il concetto di portata è stato introdotto al §1.7 e sarà meglio definito in §2.3 e corrisponde alla massima ampiezza della grandezza da misurare con determinate impostazioni dello strumento.

1.12.1 $P = VI$

Acquisendo 36 valori di tensione e di corrente, e ricavandone il valore medio campionario e deviazione standard campionaria mediante la (1.36), otteniamo:

$$\bar{V} = 11.50052929906782\ldots \text{ V} \tag{1.45}$$
$$s_V = 0.002797843082521308\ldots \text{ V}. \tag{1.46}$$

L'incertezza di tipo A[2] è ottenuta dal calcolo dello *scarto tipo sperimentale*:

$$u_A = \frac{s_V}{\sqrt{36}} = 0.0004663071804202181\ldots \text{ V} \tag{1.47}$$

Per valutare il contributo all'incertezza dato dal voltmetro, possiamo fare riferimento alle specifiche strumentali riportate in (1.43) e ottenere:

$$4u_B = 30 \cdot 10^{-6}\bar{V} + 5 \cdot 10^{-6}10 = 0.0003950158789720345\ldots \text{ V}. \tag{1.48}$$

A questo punto, è facile ottenere l'incertezza associata alla misura di tensione utilizzando la (1.39):

$$u(V) = \sqrt{u_A^2 + u_B^2} = 0.0004766494865742088\ldots \text{ V} \tag{1.49}$$

Possiamo procedere analogamente per il calcolo della stima della corrente e la valutazione della sua incertezza, ottenendo:

$$\bar{I} = 0.07669469888875015\ldots \text{ A} \tag{1.50}$$
$$s_I = 0.0002281023326640961\ldots \text{ A}, \tag{1.51}$$

da cui otteniamo:

$$u_A = \frac{s_I}{\sqrt{36}} = 0.00003801705544401602\ldots \text{ A}. \tag{1.52}$$

Il contributo dell'amperometro, calcolato secondo la tipologia B, è invece:

$$4u_B = 500 \cdot 10^{-6}\bar{I} + 800 \cdot 10^{-6}100 \cdot 10^{-3} = 0.0001183473494443751\ldots \text{ A}. \tag{1.53}$$

Ne risulta un'incertezza da associare alla misura di corrente pari a:

$$u(I) = \sqrt{u_A^2 + u_B^2} = 0.00004817341019343764\ldots \text{ A}. \tag{1.54}$$

Note le stime di tensione V e corrente I, e le relative incertezze, è possibile usare la propagazione delle incertezze e ottenere la stima della potenza P e l'associata incertezza $u(P)$, eventualmente con fattore di copertura $k \neq 1$.

[2]A rigore il termine incertezza di tipo A e B è scorretto, in quanto sono i metodi per la valutazione a essere di tipo A o B. Tuttavia, per semplicità spesso si commette un piccolo abuso, e anziché dire *contributo di incertezza valutato mediante metodologia di tipo A* si ricorre alla forma ridotta *incertezza di tipo A*. Nel seguito useremo indifferentemente l'una o l'altra locuzione, ritenendo spesso superfluo l'uso della versione corretta ma più estesa.

La stima della potenza è banalmente:

$$P = \bar{V}\bar{I} = 0.8820296316532551\ldots\,\mathrm{W}, \tag{1.55}$$

mentre l'incertezza composta ad essa associata è:

$$u(P) = \sqrt{\left(\frac{\partial P}{\partial V}u(V)\right)^2 + \left(\frac{\partial P}{\partial I}u(I)\right)^2} = 0.0005552244788288262\ldots\,\mathrm{W}. \tag{1.56}$$

La norma indica che l'incertezza debba essere indicata con **al più due cifre significative**, arrotondando sempre per eccesso l'ultima. Il peso dell'ultima cifra dell'incertezza determinerà poi dove il risultato della misura debba essere troncato[3]. Otteniamo perciò:

$$u(P) = 0.00056\,\mathrm{W}, \tag{1.57}$$

e di conseguenza:

$$P = 0.88202\,\mathrm{W}. \tag{1.58}$$

Indicheremo perciò il risultato della nostra misurazione come

$$P = 0.88202 \pm 0.00056\,\mathrm{W}. \tag{1.59}$$

Qualora invece avessimo dovuto usare un fattore di copertura diverso da $k = 1$, avremmo dovuto prima applicare tale fattore e successivamente le regole indicate dalla norma per la corretta scrittura del risultato. Ad esempio, con $k = 3$ avremmo:

$$u(P) = 3 \cdot 0.0005552244788288262\ldots = 0.001665673436486479\ldots = 0.0017\,\mathrm{W}, \tag{1.60}$$

e quindi

$$\boxed{P = 0.8820 \pm 0.0017\,\mathrm{W}}. \tag{1.61}$$

Notiamo che sebbene la cifra meno significativa del risultato sia pari a zero, essa dove comunque essere riportata nel risultato finale in quanto è una cifra il cui valore è stato determinato ed è significativo perché di peso uguale a quello consentito dall'incertezza.

1.12.2 $P = V^2/R$

Supponendo per comodità di utilizzare le stesse misure di tensione ottenute con il metodo precedente, resta da valutare l'incertezza associata al valore di resistenza. Per determinarla, facciamo riferimento alle specifiche fornite dal costruttore, che dichiara un errore massimo relativo sul valore nominale pari allo 0.05%. L'informazione così dichiarata può essere ricondotta alla conoscenza dell'incertezza passando attraverso

[3] Troncato, e non arrotondato. Ciò perché se, ad esempio, ho determinato che l'incertezza ha un contributo sulla quarta cifra decimale, le cifre del risultato dalla quinta cifra decimale in poi non hanno alcun significato.

l'attribuzione di una distribuzione uniforme di semi-ampiezza pari a ε. Pertanto, avremo

$$u(R) = \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\varepsilon}{100}150 = 0.0433012701892219\ldots\ \Omega. \tag{1.62}$$

Ne discende:

$$P = \frac{\bar{V}^2}{R} = 0.8817478277247820\ldots\ \mathrm{W}, \tag{1.63}$$

e

$$u(P) = \sqrt{\left(\frac{\partial P}{\partial V}\,u(V)\right)^2 + \left(\frac{\partial P}{\partial R}\,u(R)\right)^2} = 0.0002648245236072581\ldots\ \mathrm{W}. \tag{1.64}$$

Il risultato finale sarà pertanto:

$$\boxed{P = 0.88174 \pm 0{,}00080\,\mathrm{W}}. \tag{1.65}$$

Il particolare valore dell'incertezza ottenuto in questo caso ci consente di fare alcune considerazioni sulle cifre significative. Si sarebbe infatti portati a cancellare lo zero finale che compare nel risultato dell'incertezza. **Ciò è sbagliato!** perché bisogna tener conto del fatto che sebbene lo zero compaia come ultima cifra decimale e quindi dal punto di vista matematico con peso nullo, dal punto di vista misuristico esso ci ricorda che l'incertezza è stata determinata fino alla quinta cifra decimale, cosa che tra l'altro ci permette di scrivere il valore della potenza con lo stessa risoluzione. Pertanto, se l'ultima cifra dell'incertezza è stata determinata pari a zero, essa dovrà essere comunque riportata nei certificati di misura, perché essa contiene comunque un'informazione di primaria importanza!

1.12.3 $P = I^2R$

Per il terzo metodo, facciamo riferimento ai valori di corrente già misurati e alle specifiche per la resistenza già richiamate, ottenendo:

$$P = \bar{I}^2R = 0{,}8823115256454081\ \mathrm{W}, \tag{1.66}$$

e

$$u(P) = \sqrt{\left(\frac{\partial P}{\partial I}\,u(I)\right)^2 + \left(\frac{\partial P}{\partial R}\,u(R)\right)^2} = 0{,}001137281442319458\ \mathrm{W}. \tag{1.67}$$

Nel complesso, avremo:

$$\boxed{P = 0.8823 \pm 0{,}0035\,\mathrm{W}}. \tag{1.68}$$

1.12.4 Conclusioni e commenti

Per confrontare i tre metodi, riportiamo i risultati ottenuti nei diversi casi:

$$\begin{aligned} P &= 0.8820 \pm 0.0017\,\mathrm{W} \\ P &= 0.88174 \pm 0.00080\,\mathrm{W} \\ P &= 0.8823 \pm 0.0035\,\mathrm{W} \end{aligned} \tag{1.69}$$

e diamone una rappresentazione grafica come quella in Fig. 1.7. In essa si osserva che i tre metodi danno risultati che, considerando l'intervallo esteso con $k = 3$, hanno intersezione non nulla, e a tale intervallo è assegnata una certa probabilità di contenere il valore *vero* del misurando. In una situazione di questo tipo si dice che le misure sono *compatibili*. Diversamente, se gli intervalli entro cui si ritiene di trovare il valore vero per ciascuno dei tre metodi hanno intersezione nulla, le misure sono *incompatibili*. Ciò indica due possibilità: o non si è tenuto in giusto conto, ad esempio, la presenza di un offset che potrebbe aver spostato il risultato delle misurazioni di tensione o corrente, o che tra le misure effettuate con i tre metodi si è verificata la variazione di uno o più parametri esterni (ad esempio la temperatura) i cui effetti sono stati quelli di una variazione delle misure tale da richiederne la ripetizione.

Facciamo notare, lasciando allo studente la semplice dimostrazione, che la compatibilità delle misure non gode della proprietà transitiva: due misure ciascuna compatibile con una terza non devono necessariamente essere compatibili fra di loro.

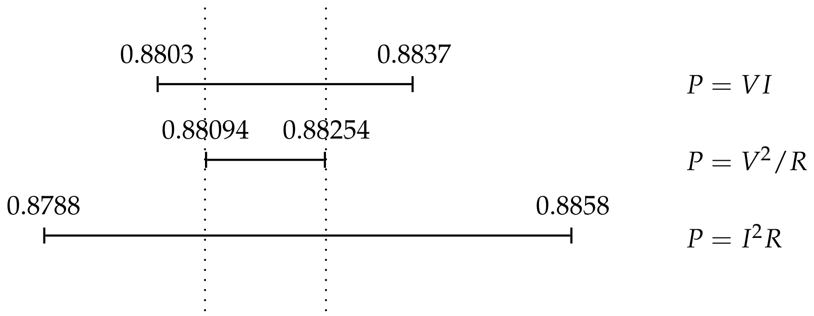

Figura 1.7: Confronto fra metodi di misura

1.13 Approccio deterministico

Sebbene la norma richieda un approccio di tipo probabilistico per la valutazione dell'incertezza, in campo industriale è spesso ancora usato un approccio che fa riferimento alle tolleranze, intese come gli errori massimi che vengono commessi nella misurazione di una grandezza. Tale esigenza si verifica ad esempio quando in un contratto fra committente e fornitore si definiscono le specifiche di un prodotto in termini di tolleranza rispetto ad un valore nominale: ad esempio, ci si accorda sul fatto che lo spessore nominale di una lastra d'acciaio debba essere di 3 mm con una tollerenza di 0,1 mm, ovvero che lo spessore dovrà essere compreso fra 2,9 mm e 3,1 mm.

Quello della tolleranza è un approccio del tutto analogo a quello dell'errore, per cui non ripeteremo cose già note. Presenteremo solo la legge, uguale a quella della propagazione degli errori ma con simboli diversi, che ci permette di ottenere informazioni sulla tolleranza Δy di una grandezza misurata per via indiretta a partire dalle tolleranze di grandezze primarie Δx_i:

$$\boxed{\Delta y = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial y}{\partial x_i} \Delta x_i.} \tag{1.70}$$

Ovviamente, la relazione appena scritta può essere scritta anche in termini relativi $\Delta y/y$, che nel caso in cui la y sia espressa solo tramite prodotti e divisioni da luogo all'espressione:

$$\frac{\Delta y}{y} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta x_i}{x_i}, \tag{1.71}$$

grazie alla quale possiamo scrivere l'incertezza relativa come somma di incertezze relative della grandezze primarie.

1.13.1 Incertezza e tolleranza nelle specifiche industriali

C'è tuttavia da tener conto di un aspetto importante che si presenta quando è necessario verificare se le specifiche di tolleranza siano rispettate o no. Supponiamo infatti che periodicamente dalla produzione venga misurato lo spessore di un certo numero di lastre d'acciaio. Il metodo di misura avrà una sua incertezza che dovrà essere tenuta in conto nel determinare se lo spessore verifica le specifiche fissate in fase contrattuale. La situazione cioè è quella mostrata in Fig. 1.8, in cui oltre all'intervallo tra il *Limite Inferiore di Specifica* (LIS) e il *Limite Superiore di Specifica* (LSS) è necessario tenere in conto anche l'incertezza U_y, in particolare se i valori misurati sono in prossimità degli estremi dell'intervallo di specifica.

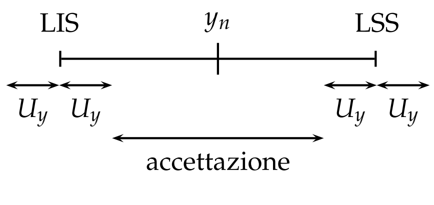

Figura 1.8: Verifica delle specifiche industriali

Infatti, se il valore misurato cade all'interno dell'intervallo e a distanza maggiore di U_y dall'estremo più vicino, allora possiamo ritenere che la misura rispetti le specifiche, e definiremo pertanto un *intervallo di accettazione*, meno ampio dell'intervallo di specifica. Al contrario, se la misura cade all'esterno dell'intervallo di specifica e a distanza maggiore di U_y, dovremo ritenere che essa non rispetti le specifiche fissate. Infine, se la misura cade all'interno dell'intervallo centrato su LIS o LSS e di semiampiezza pari a U_y, nulla potrò dire sull'effettivo rispetto delle specifiche, ritorvandomi pertanto in una zona di indeterminazione.

Bibliografia

[1] "Accuracy and precision," http://www.flatsurv.com/accuprec.htm.

[2] "The international system of units (si)," http://www.bipm.org/en/si/.

[3] G. Zingales, *Misure Elettriche: Metodi e Strumenti*. Torino: UTET, 1992.

[4] National Institute of Standard and Technology, "Uncertainty of measurement results," http://physics.nist.gov/cuu/Uncertainty/index.html.

[5] ISO-IEC, *Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement*.

[6] NIST, "Guidelines for evaluating and expressing the uncertainty of nist measurement results, Tech. Rep. 1297, 1994.