
Corso di Calcolatori Elettronici I

A.A. 2012-2013

Algebra di Boole

Lezione 5

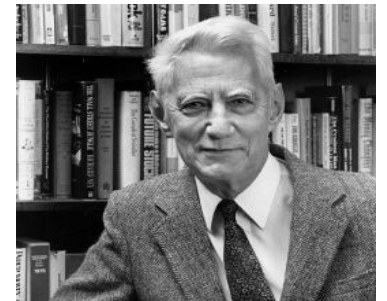
Prof. Antonio Pescapè

Università degli Studi di Napoli Federico II
Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria Informatica



Da Boole a Shannon

- L'algebra di Boole fu introdotta nel 1854 come strumento per la soluzione matematica di problemi di logica
- George Boole (1815-1864)
 - *An investigation into the laws of thought on which are founded the mathematical theories of logic and probabilities (1854)*
- Il suo uso per descrivere reti binarie di commutazione si deve a Claude Shannon
 - *A symbolic analysis of relay and switching circuits (1938)*



Algebra di Boole

- E' uno strumento per l'analisi e la sintesi delle reti di commutazione
- Consente di descrivere in forma algebrica le funzioni dei circuiti componenti e delle reti, fornendo altresì i metodi per la realizzazione del progetto logico
- Stabilisce una corrispondenza biunivoca fra espressioni algebriche e reti di commutazione

Algebra astratta

Un'Algebra Astratta è costituita da:

un insieme K (sostegno)

+

due leggi binarie di composizione interna “+” e “.”

In altri termini, un'Algebra Astratta è definita da una terna $\langle K, +, \cdot \rangle$

- ◆ L'*Algebra di Boole* è un'algebra astratta dotata di un insieme di ulteriori proprietà

Definizione dell'Algebra di Boole

- Il modo in cui si identificano le proprietà essenziali dell'Algebra di Boole non è univoco
- Possono essere utilizzate diverse strutture algebriche per specificare l'Algebra di Boole
 - Gruppi e anelli
 - Reticoli

L'AdB definita attraverso i reticoli

Un'algebra astratta $\langle K, +, \cdot \rangle$ si dice *reticolo* se per ogni elemento di K valgono le seguenti proprietà

◆ **commutativa:**

$$P1 : a+b = b+a$$

$$P'1 : a \cdot b = b \cdot a$$

◆ **associativa:**

$$P2 : (a+b)+c = a+(b+c)$$

$$P'2; (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

◆ **idempotenza o potenza identica:**

$$P3 : a+a = a$$

$$P'3 : a \cdot a = a$$

◆ **assorbimento:**

$$P4 : a+(a \cdot b) = a$$

$$P'4 : a \cdot (a+b) = a$$

Proprietà dei reticoli

- I reticoli sono *ordinati*, ovvero posseggono una relazione d'ordine “ \leq ” così definita

$$x \leq y \stackrel{\text{def}}{\iff} x + y = y$$

- ◆ Ricordiamo che una relazione d'ordine “ \leq ” deve godere delle seguenti proprietà
 - riflessiva: $x \leq x$
 - antisimmetrica: $x \leq y$ e $y \leq x \implies x = y$
 - transitiva: $x \leq y$ e $y \leq z \implies x \leq z$

Reticoli distributivi

- Un reticolo si dice distributivo se per ogni elemento di K vale la proprietà

distributiva

$$P5 : a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$$

$$P'5 : a + (b \cdot c) = (a+b) \cdot (a+c)$$

sia di “ \cdot ” rispetto a “ $+$ ”, sia di “ $+$ ” rispetto a “ \cdot ”

Minimo e Massimo

- Un reticolo distributivo si dice dotato di minimo e massimo assoluti se in K sono presenti due elementi - che diremo 0 e 1 rispettivamente - i quali verificano la

proprietà del minimo e massimo

$$P6 : a \cdot 0 = 0$$

$$P'6 : a + 1 = 1$$

Complemento

- Un reticolo distributivo si dice complementato se per ogni elemento a di K esiste ed è unico un elemento che diremo (complemento di a) per il quale è valida la proprietà

del complemento

$$P7 : a \cdot \bar{a} = 0$$

$$P'7 : a + \bar{a} = 1$$

Postulati: ricapitolando

Commutativa	P1	$a+b = b+a$	P'1	$a \cdot b = b \cdot a$
Associativa	P2	$(a+b)+c = a+(b+c)$	P'2	$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
Idempotenza	P3	$a+a = a$	P'3	$a \cdot a = a$
Assorbimento	P4	$a+a \cdot b = a$	P'4	$a \cdot (a+b) = a$
Distributiva	P5	$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$	P'5	$a+b \cdot c = (a+b) \cdot (a+c)$
Min e max	P6	$a \cdot 0 = 0$	P'6	$a+1 = 1$
Complemento	P7	$a \cdot \bar{a} = 0$	P'7	$a+\bar{a} = 1$

Definizione di AdB

- Un reticolo distributivo, dotato di minimo e massimo assoluti e complementato, si dice un'algebra di Boole
- La sestupla

$$\langle K, +, \cdot, -, 0, 1 \rangle$$

Legge di dualità

- Da qualsiasi identità booleana se ne può trarre un'altra per *dualità*, sostituendo cioè ad ogni operatore e agli elementi 0 ed 1 il rispettivo duale
- In altre parole, i 14 postulati impiegati per definire l'algebra non sono tutti indipendenti fra loro

Alcuni “teoremi”

- 0 ed 1 sono l'uno il complemento dell'altro
- Per la dimostrazione
 - Ricordate come sono definiti il “minimo” ed il “massimo” ($a=1$ per la P_6 e $a=0$ per la P'_6)
 - verificate la definizione di complemento (esiste ed è *unico*...)

$$1 \cdot 0 = 0$$

$$1 + 0 = 1$$

(P_6, P'_6)

Convoluzione

- Negando due volte un elemento si ottiene l'elemento stesso
- Per la dimostrazione
 - Applicate la definizione di complemento sia ad un elemento a che al suo negato (e poi la proprietà commutativa), e ricordate che il complemento è unico

$$\underline{a \cdot \bar{a}} = 0$$

$$\underline{a + \bar{a}} = 1$$

(P7, P'7)

$$\bar{a} \cdot \bar{\bar{a}} = 0$$

$$\bar{a} + \bar{\bar{a}} = 1$$

(unicità del complemento)

Elementi neutri di somma e prodotto

- 0 è l'elemento neutro della somma
- 1 è l'elemento neutro del prodotto
- Per la dimostrazione
 - Per le proprietà dell'assorbimento
$$a + (a \cdot 0) = a \quad e \quad a \cdot (a + 1) = a$$
 - Per la proprietà del minimo e del massimo si ha che
$$a \cdot 0 = 0 \quad e \quad a + 1 = 1$$
 - Quindi $a + 0 = a$ e $a \cdot 1 = a$

Assorbimento del complemento

$$a + \bar{a}b = a + b$$

- ◆ Per la dimostrazione
 - Usate la proprietà distributiva ed infine il complemento

$$\underline{a + \bar{a}b} = \underline{(a + \bar{a})} \underline{(a + b)} \quad (P5)$$

$$a + \bar{a}b = (a + b) \quad (P7)$$

Teoremi di De Morgan

$$\overline{a + b} = \bar{a} \cdot \bar{b}$$

$$\overline{ab} = \bar{a} + \bar{b}$$

- ◆ Per la dimostrazione
 - Consideriamo ad esempio la prima: dovete dimostrare che $a+b$ è il complemento dell'espressione al secondo membro. Per farlo applicate la definizione di complemento

Teorema di De Morgan

$$\overline{a + b} = \bar{a} \cdot \bar{b} \quad (1)$$

$$\overline{ab} = \bar{a} + \bar{b} \quad (2)$$

$$(a + b) + (\bar{a} \cdot \bar{b}) = 1 \quad (1.1)$$

$$(a + b) \cdot (\bar{a} \cdot \bar{b}) = 0 \quad (1.2)$$

(1.1) *Dimostrazione*

$$\begin{aligned} a + b + \bar{a} \cdot \bar{b} &= a + \bar{a} \cdot \bar{b} + b + \bar{a} \cdot \bar{b} = && (P1, P3) \\ &= a + \bar{b} + b + \bar{a} = && (ass.comp) \\ &= a + \bar{a} + b + \bar{b} = && (P1) \\ &= 1 + 1 = 1 && (P'7, P'6) \end{aligned}$$

(1.2) *Dimostrazione*

$$\begin{aligned} (a + b) \cdot \bar{a} \cdot \bar{b} &= a \cdot \bar{a} \cdot \bar{b} + b \cdot \bar{a} \cdot \bar{b} = && (P5) \\ &= 0 \cdot \bar{b} + 0 \cdot \bar{a} = && (P7) \\ &= 0 + 0 = 0 && (P6, P3) \end{aligned}$$

La (2) vale per dualità

Principio di eliminazione

- Nell'algebra di Boole **non vale il principio di eliminazione**
- $x+y=x+z$ non implica necessariamente $y=z$!
- L'implicazione vale se è verificata la condizione aggiuntiva $xy=xz$

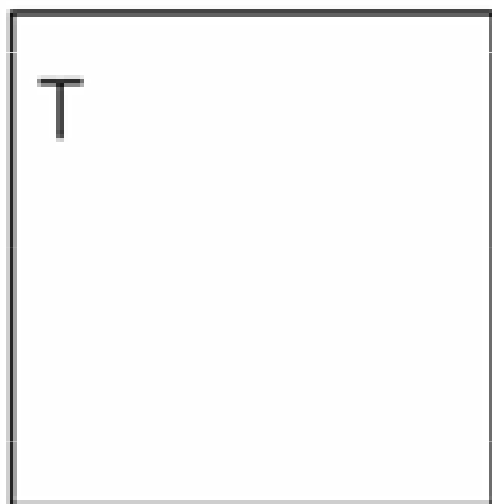
Algebre di Boole (al plurale)

- La definizione di AdB come reticolo non specifica quale sia K e come siano definite le operazioni “+”, “.” e “−”
 - Specifica soltanto un insieme di proprietà che devono essere soddisfatte da tali operazioni
- Sono così possibili diversi modelli di algebra di Boole
- Altri possibili modelli di algebra di Boole
 - l'algebra degli insiemi
 - l'algebra della logica delle proposizioni
 - l'algebra dei circuiti

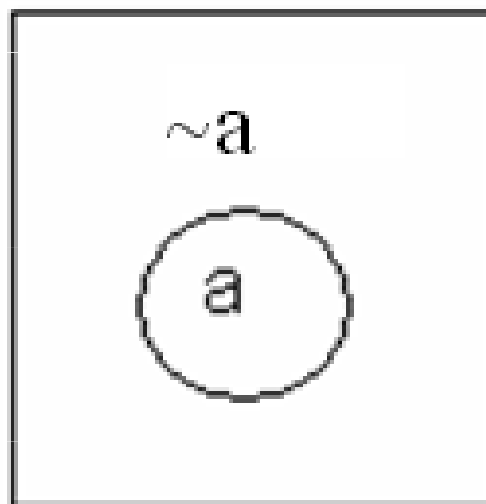
Algebra degli insiemi

Insiemi		Modello matematico	
\cup	unione	+	somma
\cap	intersezione	\cdot	prodotto
$\sim A$	complemento	\bar{a}	complemento
\emptyset	insieme vuoto	0	minimo assoluto
T	insieme "totale"	1	massimo assoluto

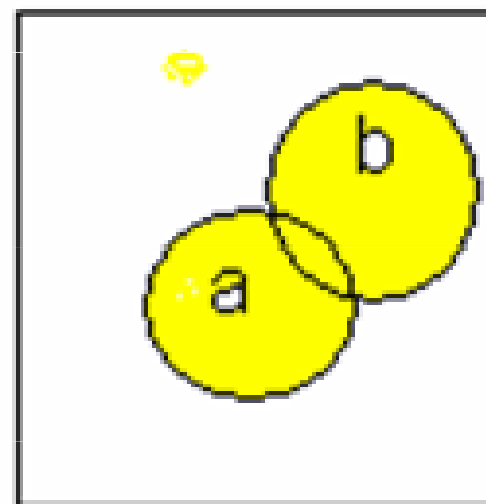
Algebra degli insiemi (1/2)



a) Insieme universo



b) $\sim a$

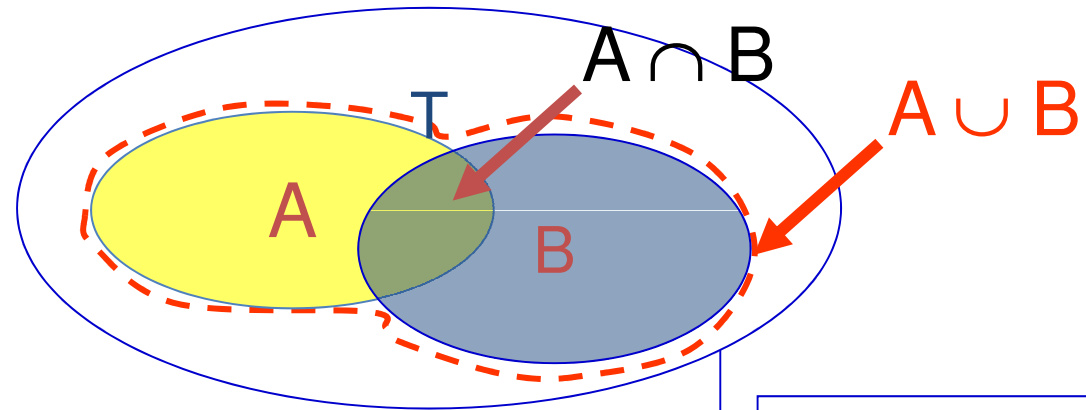


c) $a \cup b$

Algebra degli insiemi (2/2)

- Dati due insiemi $A, B \in \mathcal{T}$, sono definite le operazioni di
 - Unione (\cup)
 - Intersezione (\cap)
 - Complemento (\sim)

$$a \cap \Phi = \Phi$$
$$a \cup T = T$$



*Diagramma
di Venn*

la sestupla $\langle K, \cup, \cap, \sim, \Phi, T \rangle$ è un'algebra di Boole.

ove:

- K indica l'insieme delle parti di T
- Φ indica l'insieme vuoto

- La relazione d'ordine \leq equivale alla relazione di inclusione tra insiemi

Teorema di Stone

- Ogni algebra di Boole è rappresentabile su un'algebra di insiemi
- Il modello degli insiemi (e equivalentemente i diagrammi di Venn) può essere assunto come strumento per verificare o dimostrare proprietà di una qualsiasi algebra di Boole

Algebra della logica

- L'insieme $K=\{F,V\}$ su cui siano definite le operazioni
 - Congiunzione (\wedge)
 - Disgiunzione (\vee)
 - Negazione (\neg)

è un algebra di Boole con $F = 0$, $V = 1$,

congiunzione = \cdot , disgiunzione = $+$, negazione = \neg

x	y	$x \wedge y$
F	F	F
F	V	F
V	F	F
V	V	V

x	y	$x \vee y$
F	F	F
F	V	V
V	F	V
V	V	V

x	$\neg x$
F	V
V	F

Algebra della logica

- Due funzioni notevoli nell'algebra delle proposizioni:

- Funzione equivalenza

$$a \Leftrightarrow b$$

$$f(a,b) = ab + \bar{a}\bar{b}$$

- Funzione implicazione

$$a \Rightarrow b, f(a,b) = \bar{a} + b$$

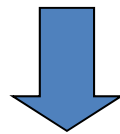
Si dice che x implica y se e solo se dalla verità di x (antecedente) scaturisce necessariamente la verità di y (conseguente). In termini algebrici, essendo l'implicazione falsa se e solo se x è vera e y è falsa, applicando il Teorema di De Morgan, si ha

$$\overline{x \Rightarrow y} = x\bar{y}$$

$$x \Rightarrow y = \bar{x} + y$$

Algebra della logica

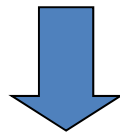
- Se $x \Rightarrow y$ è vera, allora $\bar{x} + y = 1$
 $\bar{x} + y = \bar{x} \cdot \bar{y} + y$ (ass.compl)
 $= \bar{x} \cdot \bar{y} + xy + y$ (P4)
 $= \bar{x} \cdot \bar{y} \cdot \bar{y} + xy + yy$ (P3)
 $= \overline{(x + y)} \cdot \bar{y} + (x + y) \cdot y = 1$ (DeMorgan)



per le proprietà dell'equivalenza

$$ab + \bar{a}\bar{b}$$

$$x + y = y \Leftrightarrow x \leq y$$



l'implicazione è la relazione d'ordine nell'algebra della logica

Circuiti logici

- I circuiti logici sono circuiti elettronici nei quali una grandezza elettrica ai morsetti di ingresso e di uscita può assumere solo due valori, convenzionalmente rappresentati con i due elementi dell'algebra di Boole 0 ed 1
- In elettronica digitale si studia come realizzare circuiti elettronici per i quali il legame tra ingressi ed uscite corrisponde a quello delle operazioni fondamentali AND, OR e NOT dell'algebra di Boole
 - PORTE LOGICHE

Algebra dei circuiti

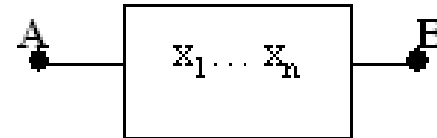
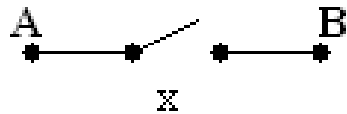
- Associa i simboli “0” e “1” ai livelli logici “basso” e “alto”
- Un circuito è descritto dalla funzione

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

dove: y =bit di uscita; x_1, x_2, \dots, x_n =bit di ingresso

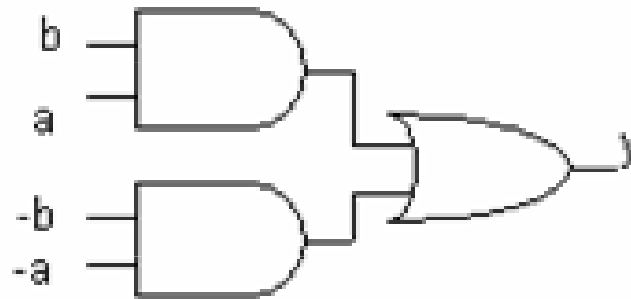
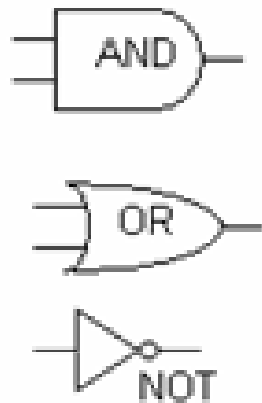
Algebra dei circuiti: reti bilaterali

Rete bilaterale: la funzione di uscita è valutata tra due punti.



Algebra dei circuiti: reti unilaterali

Rete unilaterale: il flusso di informazione procede in un unico senso (ingresso \rightarrow uscita)



Segnali in circuiti elettronici digitali

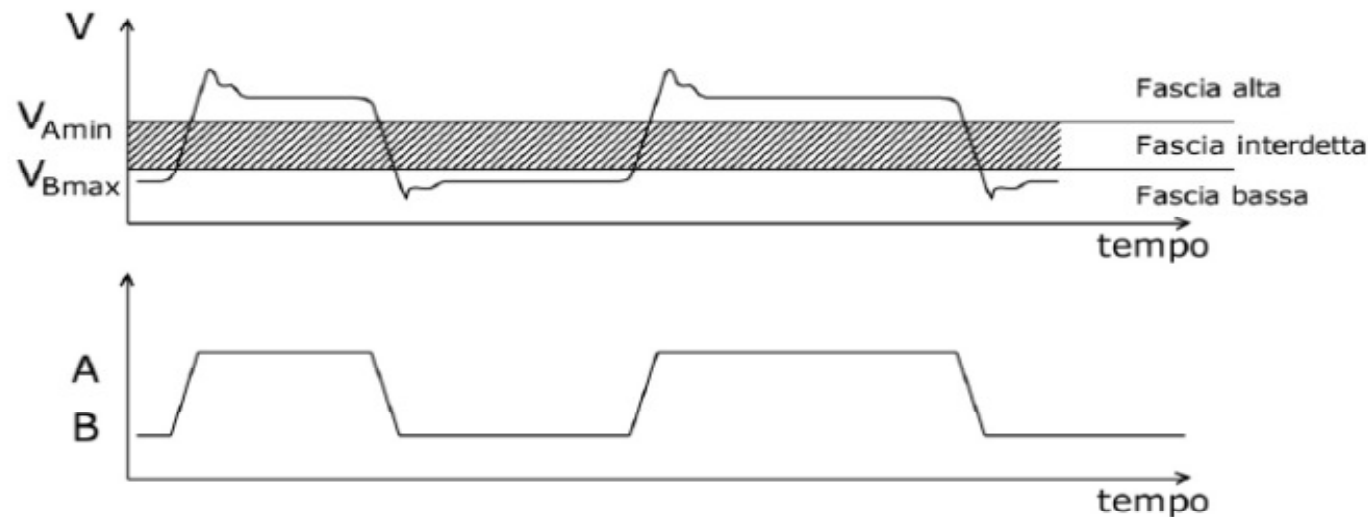
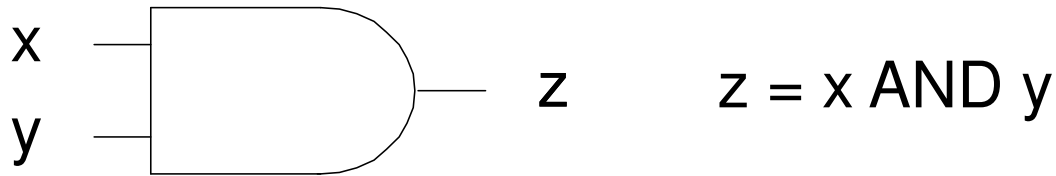


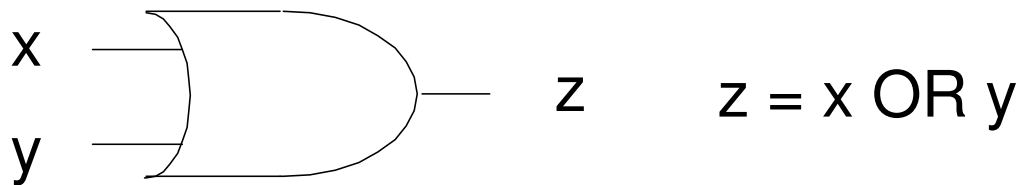
Figura 3.1 - La figura in alto mostra un possibile andamento di un segnale binario reale (si fa riferimento a un segnale di tensione). Il segnale può stare in due zone distinte corrispondenti alla fascia alta e alla fascia bassa. La zona interdetta viene solo attraversata nel passaggio tra le due fasce. V_{Amin} e V_{Bmax} rappresentano rispettivamente gli estremi inferiore e superiore della fascia alta e della fascia bassa. La figura in basso dà una rappresentazione idealizzata del segnale. Questa rappresentazione, per quanto idealizzata, mostra che i tempi di *salita* e di *discesa* non sono nulli.

Porte logiche o gate

Circuiti elettronici che realizzano le operazioni fondamentali



x	y	$x \text{ AND } y$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1



x	y	$x \text{ OR } y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

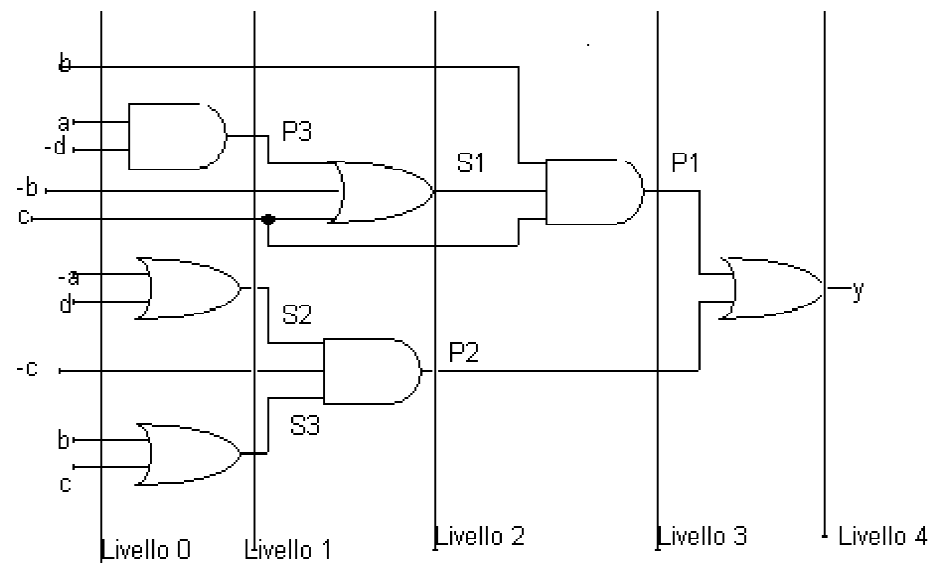


x	$\text{NOT } x$
0	1
1	0

Un esempio (1/3)

- ◆ Applichiamo le proprietà viste sinora per trasformare questa funzione

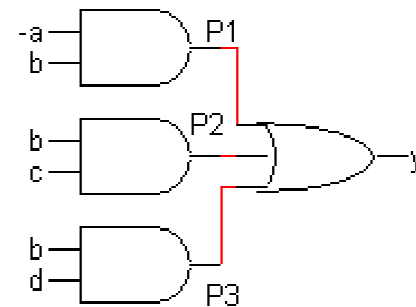
$$y = bc(a\bar{d} + \bar{b} + c) + \bar{c}(d + \bar{a})(b + c)$$



Un esempio (2/3)

- Provate ad applicare tutte le proprietà viste sinora (nell'ordine, distributiva, commutativa, idempotenza, assorbimento)
- Possiamo trasformare la precedente funzione in questa:

$$y = \bar{a}b + bc + bd$$



Soluzione (3/3)

$$y = bc(\overline{ad} + \overline{b} + c) + \overline{c}(d + \overline{a})(b + c)$$



Proprietà distributiva

$$y = bc\overline{ad} + bc\overline{b} + bcc + \overline{c}db + \overline{c}dc + \overline{c}\overline{a}b + \overline{c}\overline{a}c$$



Proprietà commutativa

$bb = cc = 0; cc = c$

$$y = abc\overline{d} + bc + b\overline{c}d + \overline{a}b\overline{c}$$



Assorbimento, ($bc = bc + abc\overline{d}$)

$$y = bc + b\overline{c}d + \overline{a}b\overline{c} \rightarrow y = b(c + (\overline{c}(\overline{a} + d)))$$



Proprietà distributiva [$a+bc=(a+b)(a+c)$]

$$y = c + \overline{c}(\overline{a} + d) = (c + \overline{c})(c + (\overline{a} + d)) = \overline{a} + c + d$$



$$y = b(\overline{a} + c + d)$$

$$y = \overline{a}b + bc + bd$$

