

METODOLOGIA DELLE SCIENZE FISICHE

La Fisica è una Scienza (rigorosa nel metodo ma non esatta e non definitiva) che si basa sulla sperimentazione e sulla interpretazione e descrizione teorico-matematica dei fenomeni fisici.

I passaggi fondamentali sono:

- Osservare il fenomeno che si intende studiare.
- Individuare le grandezze fisiche rilevanti per la descrizione del fenomeno.
- Formulare delle procedure operative per la misurazione delle grandezze al fine di ottenerne la loro misura.
- Determinare, se esistono, le relazioni fra le grandezze fisiche e formulare le leggi fisiche del fenomeno.

Duplici obiettivi:

SPIEGARE, CIOE' CORRELARE FRA LORO I FENOMENI FORNENDONE UNA DESCRIZIONE RIGOROSA (NON NECESSARIAMENTE ESATTA) E PREVEDERE NUOVI FATTI E FENOMENI.

GRANDEZZE FONDAMENTALI E DERIVATE

MISURE DIRETTE

Una grandezza viene confrontata con un'altra della stessa specie scelta come unità di misura.

GRANDEZZE FONDAMENTALI

Le grandezze fondamentali sono grandezze fra loro indipendenti nel senso che l'unità di misura di una non ha alcuna influenza sull'unità di misura scelta per l'altra.

Ad es. Massa, Lunghezza, Tempo, Intensità di corrente, Temperatura, ...

La scelta delle grandezze fondamentali è in qualche modo arbitraria ed è basata su motivi di opportunità:

- facilità di realizzare campioni dell'unità di misura stabili nel tempo e facilmente riproducibili.
- facilità di costruire strumenti di misura ed effettuare misure dirette.

GRANDEZZE DERIVATE

Le grandezze derivate sono grandezze collegate ad altre grandezze tramite relazioni matematiche.

Ad es. Velocità, Forza, Volume, Pressione, ...

DIMENSIONI FISICHE

Le dimensioni fisiche di una grandezza fondamentale indicano il tipo o specie di grandezza fondamentale e si indicano fra parentesi quadre:

$$[\text{massa}] = [M]$$

$$[\text{lunghezza}] = [L]$$

$$[\text{tempo}] = [T]$$

Le dimensioni fisiche di una grandezza derivata rappresentano la relazione che sussiste fra la sua unità di misura e quelle delle grandezze fondamentali, indipendentemente dai fattori numerici che compaiono nella relazione matematica che definisce la grandezza derivata.

$$[\text{velocità}] = [L] [T]^{-1}$$

$$[\text{forza}] = [M] [L] [T]^{-2}$$

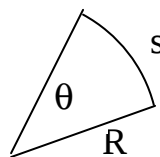
Le dimensioni fisiche restano immutate anche se si usano multipli o sottomultipli delle unità di misura.

Le grandezze adimensionali hanno tutti gli esponenti uguali a zero. Ciò non vuol dire che non si possa misurare una tale grandezza dopo aver definito la corrispondente grandezza campione che si assume come unità di misura.

Esempio.

La misura in radianti di un angolo piano è per definizione il rapporto fra la lunghezza di un qualsiasi arco di circonferenza centrata sull'origine delle semirette ed il raggio corrispondente:

$$\theta = s / R$$



L'angolo è adimensionale essendo il rapporto fra due lunghezze !

LE EQUAZIONI FISICHE SONO OMOGENEE, nel senso che devono avere le stesse dimensioni fisiche.

Tale considerazione costituisce anche un potente strumento di controllo (dimensionale) delle formule. Nulla tuttavia si può dire sulla correttezza della formula anche dal punto di vista degli eventuali coefficienti numerici.

Esempio.

Supponiamo che il periodo di oscillazione di un pendolo semplice di lunghezza l e massa sospesa m dipenda “in qualche modo” dall’accelerazione di gravità g (oltre che eventualmente da m e l).

Trattiamo la questione dal punto di vista puramente dimensionale:

$$\begin{aligned} [\text{Periodo di oscillazione}] &= [T] = [M]^\alpha [L]^\beta [g]^\gamma = \\ &[M]^\alpha [L]^\beta [L]^\gamma [T]^{-2\gamma} = [M]^\alpha [L]^{\beta+\gamma} [T]^{-2\gamma} \end{aligned}$$

da cui deve essere:

$$\alpha = 0 \quad \beta + \gamma = 0 \quad -2\gamma = 1 \quad \rightarrow \quad \alpha = 0 \quad \beta = 1/2 \quad \gamma = -1/2$$

cioè, per puri motivi dimensionali, il periodo di oscillazione del pendolo semplice deve risultare legato a l e a g dalla relazione:

$$T \propto \sqrt{\frac{l}{g}}$$

che, a parte un fattore numerico 2π , è proprio la formula giusta nell’approssimazione di piccole oscillazioni !

L'unità delle misura delle grandezze derivate dipende da quelle delle grandezze fondamentali ma è tuttavia in qualche modo arbitraria e di conseguenza anche le relazioni matematiche corrispondenti godono di una certa arbitrarietà di definizione.

Esempio.

L'unità di area è solitamente definita come l'area del quadrato il cui lato sia lungo 1 m.

Conseguentemente:

Area del rettangolo di lati a e b :	$a \ b$
Area dell'ellisse di semiassi a e b :	$\pi \ a \ b$
Area del triangolo di base a e altezza b :	$\frac{1}{2} \ a \ b$

In generale : $AREA = F \ a \ b$ dove F si chiama fattore di forma ed è un numero diverso per ciascuna forma geometrica.

Se avessimo scelto come area unitaria quella del cerchio di raggio unitario, avremmo avuto:

Area del rettangolo di lati a e b :	$1/\pi \ a \ b$
Area dell'ellisse di semiassi a e b :	$a \ b$
Area del triangolo di base a e altezza b :	$1/2\pi \ a \ b$

Cambiano i fattori di forma, cioè le relazioni matematiche, ma non cambiano le dimensioni fisiche.

STRUMENTI DI MISURA

Uno strumento di misura è composto da:

Rivelatore:

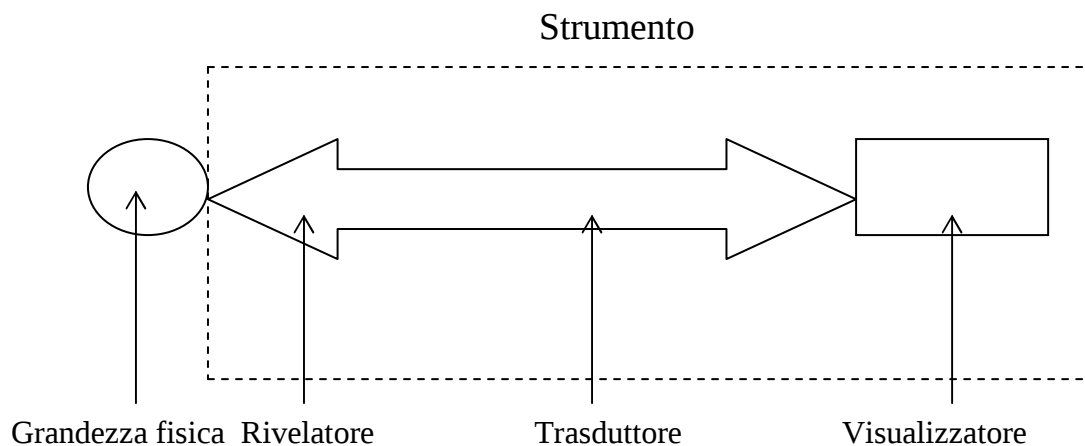
elemento sensibile rispetto alla grandezza da misurare che si mette in “equilibrio” con essa.

Trasduttore:

eventuale sistema di trasformazione dell’informazione per l’elaborazione e la presentazione della stessa.

Visualizzatore:

sistema di presentazione grafica o numerica del risultato della misura.



Chiamiamo:

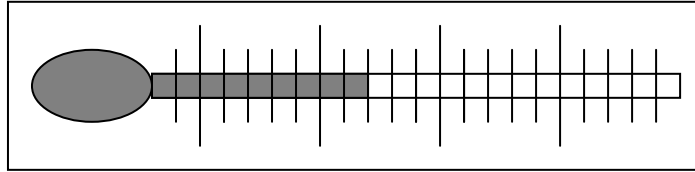
G: la grandezza fisica.

V(G): il valore “vero” della grandezza.

R(G): la risposta propria dello strumento.

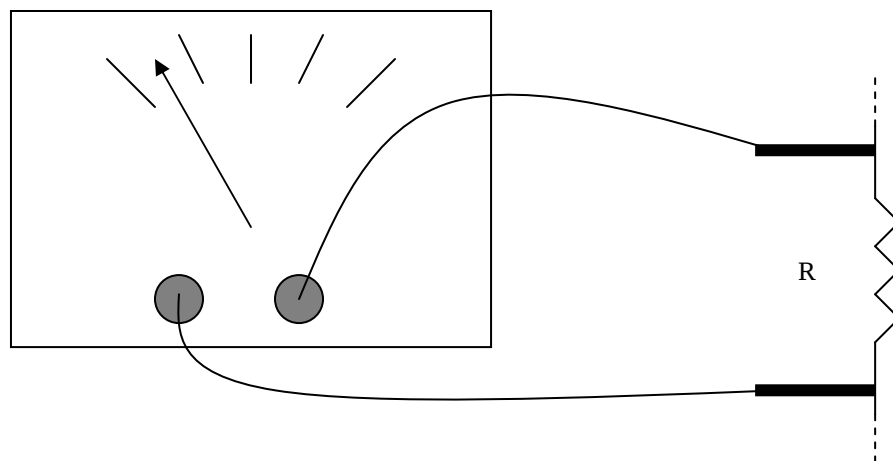
M(G): il risultato della misura.

Esempio: TERMOMETRO A MERCURIO



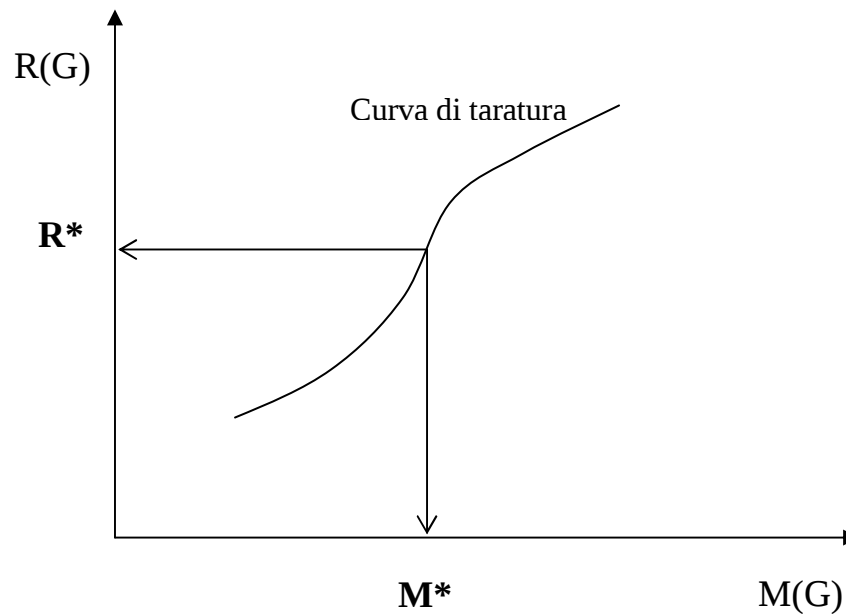
Il bulbo con il mercurio funge da elemento rivelatore e trasduttore.
Il capillare e la scala graduata fungono da visualizzatore.
La risposta del termometro è la lunghezza della colonnina di mercurio.

Esempio: VOLTMETRO



I puntali costituiscono il rivelatore.
Il sistema dei circuiti interni al voltmetro fungono da trasduttore.
La scala graduata e l'indice mobile costituiscono il visualizzatore.
La risposta dello strumento è la posizione assunta dall'indice.

Per passare dalla risposta dello strumento al risultato della misura occorre conoscere la relazione esistente fra $R(G)$ e $M(G)$, occorre cioè TARARE lo strumento.



Dalla curva di taratura o curva di risposta, data una risposta R^* dello strumento, si risale alla misura M^* della grandezza.

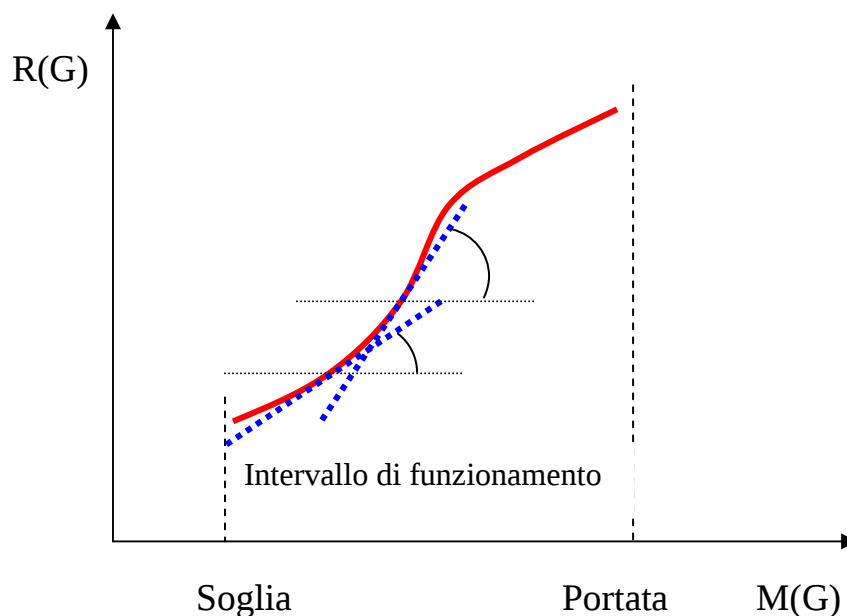
Se non ci fossero errori di misura, sarebbe $M(G) = V(G)$.

CARATTERISTICHE DI UNO STRUMENTO DI MISURA

- Intervallo di funzionamento
- Prontezza
- Sensibilità
- Giustezza
- Precisione

INTERVALLO DI FUNZIONAMENTO

E' l'intervallo di valori di funzionamento dello strumento, fra un minimo, che si chiama soglia, ed un massimo che si chiama portata. Al di fuori di tale intervallo lo strumento o è insensibile (non risponde) o è inaffidabile o addirittura si rompe se va oltre la portata: si pensi al termometro.



PRONTEZZA

E' la rapidità con la quale l'elemento sensibile si avvicina allo stato di equilibrio con la grandezza da misurare. E' esprimibile attraverso un tempo caratteristico, definibile per ciascuno strumento.

SENSIBILITA'

E' il rapporto fra la variazione della risposta e la variazione dello stimolo: $S = dR(G) / dV(G)$ (derivata) ed è approssimabile con $\Delta R(G) / \Delta M(G)$ (variazioni finite).

Se la curva di risposta non è lineare, la sensibilità non è costante.

A parità di variazione della grandezza, uno strumento è più sensibile se è maggiore la variazione della sua risposta.

Es.: Supponiamo che l'allungamento di 1 mm della colonnina di mercurio di un termometro sia provocata dalla variazione di 2°C in un caso e di 10 °C nell'altro. Le due sensibilità sono rispettivamente:

$$1/2 = 0,5 \text{ mm/}^{\circ}\text{C} \quad \text{e} \quad 1/10 = 0,1 \text{ mm/}^{\circ}\text{C}$$

L'errore di sensibilità, invece, che non va confuso con la sensibilità, è la minima variazione della grandezza (della misura) apprezzabile dallo strumento; è in pratica il valore del minima differenza di valori misurabili. Talvolta si chiama anche risoluzione.

Es.: Quando si parla di termometro a un decimo di grado, si sta parlando del suo errore di sensibilità o risoluzione (non della sensibilità !); così quando si parla di una bilancia a cento grammi, di un cronometro al centesimo di secondo e così via.

GIUSTEZZA

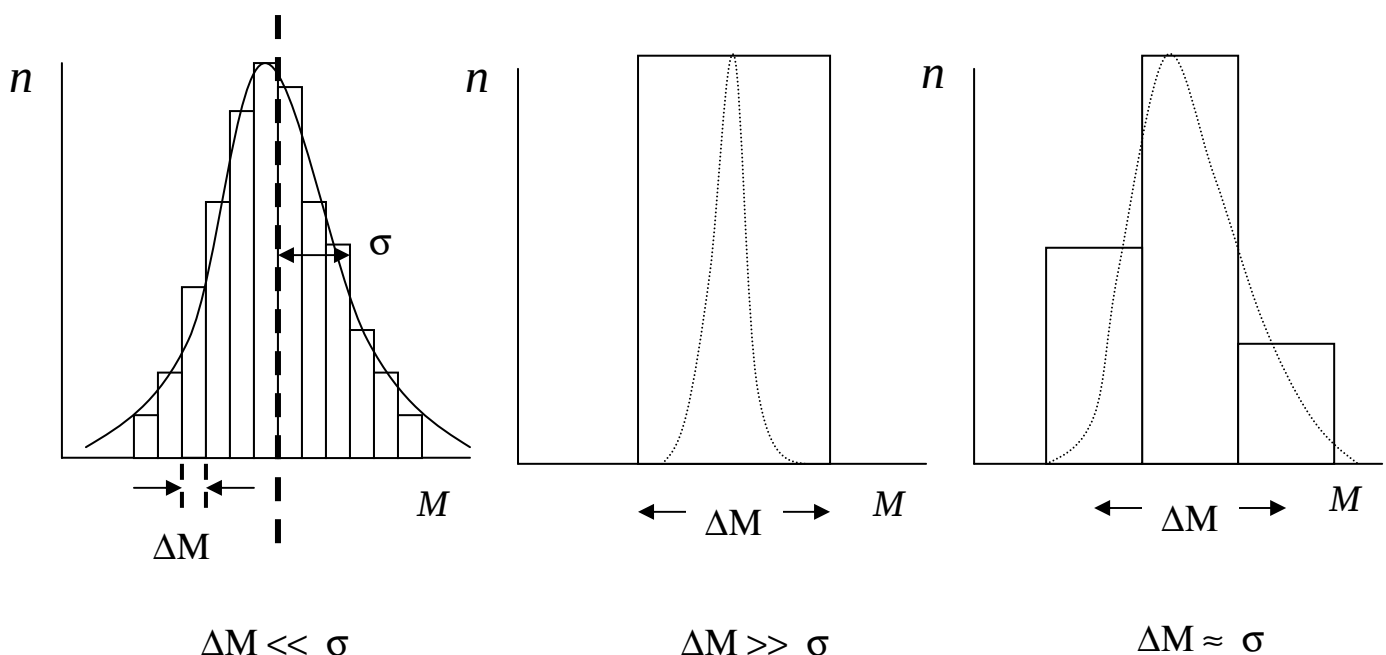
Indica se la migliore stima della grandezza tende al valore vero. Uno strumento giusto è esente da malfunzionamenti, starature, ecc., cioè la misura è priva di errori sistematici (*vedi dopo*).

PRECISIONE

E' un concetto legato alla ripetibilità delle misure effettuate nelle stesse condizioni sperimentali. In generale, se l'errore di sensibilità ΔM di uno strumento è sufficientemente piccolo, ovvero si possono apprezzare valori anche molto vicini, ripetendo le misure si può costruire un istogramma che mostra una distribuzione di valori la cui larghezza o dispersione σ è un indice del grado di precisione (proporzionale a $1/\sigma$) dello strumento (e della misura). La definizione rigorosa di σ verrà data in seguito quando si parlerà di distribuzione gaussiana.

Se ripetendo le misure molte volte si trovano sempre uno o due valori, allora probabilmente la distribuzione è "coperta" dall'errore di sensibilità e nulla si può affermare sulla sua larghezza.

Spesso si verifica anche il caso intermedio: i valori trovati sono diversi ma non si evidenzia chiaramente una distribuzione. E' il caso più difficile e delicato da trattare.



ERRORI DI MISURA

OGNI PROCESSO DI MISURAZIONE FISICA E' SOGGETTO AD ERRORI PER CUI AD OGNI MISURA E' NECESSARIO ASSOCIARE UN ERRORE O INCERTEZZA.

IN FISICA E' FONDAMENTALE VALUTARE GLI ERRORI IN MODO DA ATTRIBUIRE UN GRADO DI ATTENDIBILITA' AL RISULTATO DELLA MISURA, IN RELAZIONE AL VALORE VERO ESATTO DELLA GRANDEZZA CHE RESTA "INCONOSCIBILE".

Distinguiamo vari tipi di errore:

- Errore casuale o statistico.
- Errore di sensibilità.
- Errore massimo.
- Errore sistematico.

ERRORE CASUALE O STATISTICO

E' dovuto al caso, cioè alle fluttuazioni delle condizioni di misura o della grandezza da misurare o dello strumento di misura o alle fluttuazioni introdotte dallo sperimentatore. Supponiamo che quando si esegue una misura si è in condizioni tali che le tantissime piccole cause d'errore (errori di tipo "gaussiano") possano condurre ad una misura più grande o più piccola del valore "vero" della grandezza. Allora se si eseguono molte misure ripetute si ottiene una distribuzione simmetrica attorno ad un valore centrale e la distribuzione limite (corrispondente ad "infinite" misure) è la distribuzione normale o gaussiana (*vedi dopo*).

ERRORE DI SENSIBILITA'.

E' la minima variazione della grandezza apprezzabile da uno strumento; quando si legge una scala graduata l'errore di sensibilità è l'errore di lettura della scala.

ERRORE MASSIMO.

Se eseguendo misure ripetute otteniamo sempre lo stesso risultato (o quasi) allora l'errore di sensibilità dello strumento copre le fluttuazioni di varia origine. In tal caso si dice che la misura è affetta da errore massimo che viene identificato con l'errore di sensibilità.

Talvolta si dà un'interpretazione estensiva al concetto di errore massimo intendendo con esso il massimo errore con cui si presume di conoscere la grandezza misurata. Una sua stima quindi può essere ben diversa (in generale molto maggiore) dall'errore di sensibilità.

Es.: Si può valutare un intervallo di “messa a fuoco” di un'immagine (ben maggiore dell'errore di sensibilità con cui si misurano le distanze) e si può attribuire alla semiampiezza dell'intervallo di messa a fuoco il significato di errore massimo.

E' evidente che fornire una misura con errore massimo allarga l'intervallo in cui probabilmente è contenuto il valore “vero” della grandezza.

ERRORE SISTEMATICO.

E' un vero e proprio “sbaglio” nel senso che può essere dovuto ad un malfunzionamento o staratura dello strumento o al procedimento di misura , all'uso scorretto di un modello o di una teoria o addirittura ad una teoria sbagliata nel caso in cui questa venga utilizzata per ricavare indirettamente il valore della grandezza da misurare.

E' il tipo di errore più subdolo perché non sempre si è consapevoli di commetterlo. Spesso, se ce se ne accorge, si cerca di renderlo il più piccolo possibile o di eliminarlo o di correggere il risultato finale per tener conto di tale errore se non è sperimentalmente eliminabile.

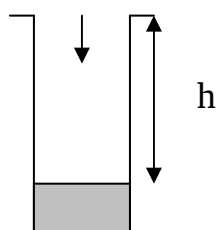
Talvolta le misure possono risultare molto precise, tuttavia due sperimentatori possono trovare due risultati incompatibili; ciò è quasi sempre indice di qualche errore sistematico commesso da uno di essi o da entrambi.

L'errore sistematico conduce sempre ad una sovrastima o ad una sottostima del valore vero.

Esempio.

Si desideri misurare la profondità di un pozzo d'acqua lasciando cadere un sasso e misurando l'intervallo di tempo fra l'istante in cui si lascia il sasso e quello in cui si sente il rumore del tonfo nell'acqua. E' evidente che, a parte discorsi legati alla descrizione corretta del moto del sasso dovuta ad es. alla resistenza dell'aria, il procedimento è sbagliato in quanto non tiene conto che il suono del tonfo nell'acqua impiega un certo tempo per raggiungere le orecchie dello sperimentatore.

In questo caso l'errore sistematico, che porterebbe ad una sovrastima di h), è valutabile e si può correggere; la formula corretta da usare è (a parte le correzioni al moto già dette) :



$$h = \frac{1}{2} g (t_{\text{mis}} - t_{\text{suono}})^2$$

$$\text{dove } t_{\text{suono}} = h / v_{\text{suono}}$$

$$\text{da cui si può ricavare } h = f(t_{\text{mis}}).$$

RISULTATO DI UNA MISURA E CIFRE SIGNIFICATIVE

RISULTATO DI UNA MISURA.

Il risultato della misura di una grandezza fisica è espresso tramite le seguenti informazioni:

- la migliore stima del valore della grandezza.
- la migliore stima dell'errore di misura.
- l'attendibilità della misura in termini probabilistici.

$$x = x_{\text{best}} \pm \delta x$$

Tale notazione è equivalente alla seguente:

$$x \in [x_{\text{best}} - \delta x, x_{\text{best}} + \delta x]$$

La migliore stima del valore vero μ di una grandezza è data dal valor medio delle N misure ripetute:

$$x_{\text{best}} = \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N} \rightarrow \mu$$

La migliore stima dell'errore di misura δx è data dall'errore massimo Δx se le misure ripetute danno sempre (o quasi) lo stesso valore. L'attendibilità, nel caso dell'errore massimo è pari al 100 %. Tale valore discende direttamente dal concetto di “massimo errore”.

In tal caso si scrive che il risultato della misura è: $\bar{x} \pm \Delta \bar{x}$

Se invece si ottiene una distribuzione di valori, l'errore di misura da attribuire a x_{best} è:

$$\sigma(x_{best}) = \sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{N}}$$

σ_x si chiama deviazione standard del campione ed è la migliore stima della deviazione standard della popolazione (universo delle infinite misure):

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}{N-1}} \rightarrow \sigma$$

σ_x è nient'altro che la radice quadrata della media dei quadrati degli scarti delle misure dalla media. Al denominatore c'è N-1 e non N in quanto nella formula compare la media e non il valore vero μ . Gli N dati sono stati "usati" 1 volta proprio per calcolare il valor medio.

N-1 rappresenta il numero di gradi di libertà, ovvero il numero di dati meno il numero di condizioni o vincoli fra i dati.

Si dimostra che se si usasse N e non N-1, non si otterrebbe la migliore stima della deviazione standard della popolazione.

σ_x^2 si chiama varianza.

$\sigma_{\bar{x}}$ si chiama deviazione standard della media o errore standard.

Se si esegue una singola misura aggiuntiva, questa ha la probabilità del 68,3 % di trovarsi nell'intervallo $\bar{x} \pm \sigma_x$. Tale valore discende dallo studio della distribuzione gaussiana.

Se si esegue una serie di misure ripetute e se ne fa la media, tale media ha la probabilità del 68,3 % di trovarsi nell'intervallo $\bar{x} \pm \sigma_x^-$.

σ_x indica quanto è larga la distribuzione delle misure. Se si aumenta il numero di misure, a parte ovvie fluttuazioni statistiche, la larghezza della distribuzione non cambia.

σ_x^- indica quanto bene si conosce il valor medio. Più misure si fanno e meglio è, nel senso che l'errore standard diminuisce.

Nel caso di una misura con errori statistici il risultato si scrive così:

$$\bar{x} \pm \sigma_x^-$$

L'attendibilità è la probabilità che il valore vero sia compreso nell'intervallo, supposto che non sussistano errori sistematici.

CIFRE SIGNIFICATIVE.

Quando si scrive il risultato di una misura occorre fare attenzione al numero di cifre con cui esso viene espresso.

Le cifre significative di un numero sono tutte le cifre a partire da destra fino all'ultima cifra a sinistra diversa da 0.

Esempio:

4,8	0,48	0,0048	hanno 2 cifre significative (4 e 8)
130	1,30	0,0130	hanno 3 cifre significative (1, 3 e 0)

L'errore δx si scrive con un numero di cifre significative coerente con l'incertezza sull'errore stesso, tenendo presente che:

ANCHE L'ERRORE POSSIEDE UN'INCERTEZZA!

Si dimostra che nel caso di N misure ripetute l'errore relativo sull'errore è dell'ordine di

$$\frac{\delta(\delta x)}{(\delta x)} \approx \frac{1}{\sqrt{2(N-1)}}$$

E' chiaro quindi che quanto più grande è N tanto maggiore è il numero di cifre significative consentito. Ad es. se $N = 20$ si ha che l'errore relativo sull'errore è circa il 15%.

Se si scrive $\delta x = 5,2$ con due cifre significative si intende automaticamente che esso è compreso nell'intervallo $[5,15 - 5,25]$ e quindi che l'incertezza su δx è inferiore a un'unità della cifra meno significativa, cioè 0,1 nel nostro esempio. Da ciò risulta che l'errore relativo è inferiore a $0,1/5,2 = 2\%$.

In generale possiamo affermare che:

N. cifre significative dell'errore	Errore relativo sull'errore
1	5 % - 50 %
2	0,5 % - 5 %
3	0,05 % - 0,5%

Nelle misure di laboratorio di fisica non particolarmente sofisticate, cioè quando il numero di misure è limitato a poche decine (per motivi di tempo o per semplicità di esecuzione delle misure), è opportuno scrivere l'errore con una (se la cifra è > 2) o al massimo due cifre significative (se la cifra più significativa è 1 o 2); ad es. 15; 3; 2,1; 6; 0,7 ecc.

REGOLE DI SCRITTURA DI UN RISULTATO.

- Si scrive l'errore con una o due cifre significative.
- Si scrive il risultato con la cifra meno significativa allineata con quella meno significativa dell'errore.

Esempi: $27,4 \pm 0,4$ 351 ± 6 $56,3 \pm 1,8$
E' invece sbagliato scrivere: $27,4 \pm 0,42$ o $27,43 \pm 0,4$ ecc.

REGOLE PER GLI ARROTONDAMENTI.

Nei calcoli conviene sempre mantenere qualche cifra in più di quelle che saranno necessarie nella scrittura del risultato finale, al fine di evitare gli arrotondamenti precoci e perdita prematura di cifre significative. Quando occorre eseguire gli arrotondamenti (ad es. alla fine dei calcoli) le regole da rispettare sono:

- Se la prima cifra eliminata è < 5 , si lascia invariata la cifra precedente.
- Se la prima cifra eliminata è > 5 o $= 5$ ma le cifre successive sono diverse da 0, si aumenta di 1 la cifra precedente.
- Se la prima cifra eliminata è $= 5$ e le successive sono 0 si lascia la cifra precedente se è dispari, la si aumenta di 1 se è pari.

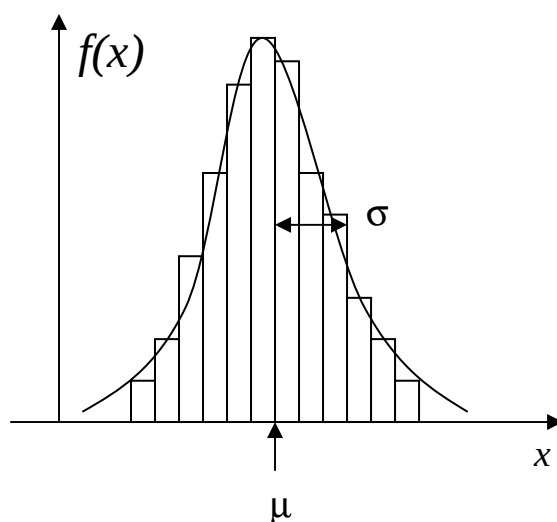
Esempi: $47,8350 \rightarrow 48$ o $47,8$ o $47,83$
 $47,8450 \rightarrow 47,85$ $47,8456 \rightarrow 47,846$

DISTRIBUZIONE GAUSSIANA

Quando si eseguono molte misure ripetute e gli errori di misura sono casuali la distribuzione delle misure tende ad una distribuzione limite a forma di campana, centrata attorno al valore vero e simmetrica rispetto ad esso.

La funzione matematica che descrive tale distribuzione limite è la distribuzione normale o distribuzione di Gauss (“gaussiana”) che dipende da due parametri μ e σ e si estende in linea di principio da $-\infty$ a $+\infty$.

$$f(x) \propto e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$



Tale funzione $f(x)$ è una densità di probabilità, nel senso che il prodotto $f(x)dx$ rappresenta la probabilità di avere valori nell'intervallo $[x, x+dx]$. La condizione di normalizzazione:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

conduce alla forma:

$$f_{\mu,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

SIGNIFICATO DEI PARAMETRI μ e σ .

Il parametro μ ha il significato di valor medio di x secondo la distribuzione gaussiana assegnata.

Infatti, per definizione:

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

da cui, ponendo $y = x - \mu$:

$$\begin{aligned} \langle x \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} y e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} dy + \int_{-\infty}^{+\infty} \mu e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} dy \right] \\ &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} [0 + \mu\sigma\sqrt{2\pi}] \Rightarrow \\ &\quad \langle x \rangle = \mu \end{aligned}$$

Il parametro σ ha il significato di valor medio del quadrato degli scarti delle misure dal valore medio μ .

$$\langle (x - \mu)^2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

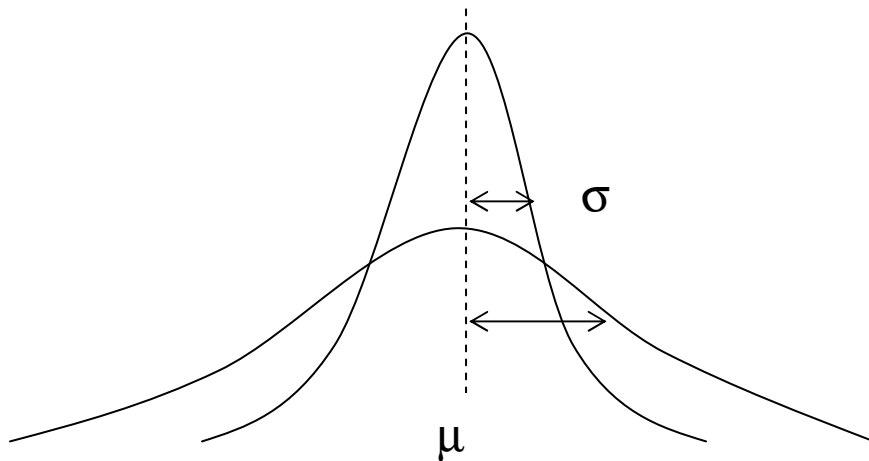
Tale integrale si risolve per parti e dà:

$$\langle (x - \mu)^2 \rangle = \sigma^2$$

σ è in effetti un parametro di larghezza come si capisce anche osservando che

$$f_{\max}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$$

e che l'area sotto la curva è costante (è la probabilità totale = 1).
Pertanto, quanto più alta è la curva tanto più essa è stretta.



E' chiaro a questo punto che per un numero sempre maggiore di misure ripetute:

- la media aritmetica delle misure tende al valor medio della distribuzione limite;
- la varianza del campione (che è la media degli scarti al quadrato, a parte il discorso di sostituire $1/N$ con $1/(N-1)$) tende alla varianza della distribuzione limite.

La distribuzione gaussiana ci consente, grazie al suo significato di densità di probabilità, di dedurre i seguenti importanti risultati:

➤ Probabilità che una singola misura cada nell'intervallo $[a,b]$:

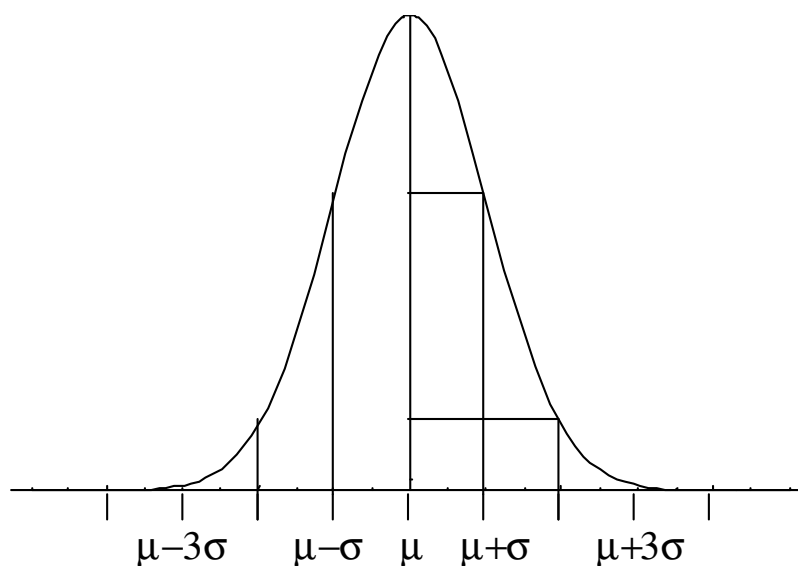
$$P(x \in [a,b]) \equiv \int_a^b \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

➤ Probabilità che una singola misura cada nell'intervallo $[\mu-k\sigma, \mu+k\sigma]$:

$$P(x \in [\mu - k\sigma, \mu + k\sigma]) \equiv \int_{\mu-k\sigma}^{\mu+k\sigma} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

In particolare si hanno i seguenti notevoli valori di livelli di probabilità (aree sotto la curva):

$\mu \pm 1 \sigma$	$\mu \pm 2 \sigma$	$\mu \pm 3 \sigma$	$\mu \pm 4 \sigma$
68,27 %	95,45 %	99,73 %	99,99 %



PROPAGAZIONE DEGLI ERRORI

Quando la misura di una grandezza dipende dalle misure di altre grandezze gli errori vanno propagati in modo da ottenere l'errore sulla grandezza derivata. Esistono regole differenti per la propagazione degli errori massimi e degli errori statistici (casuali).

Per la dimostrazione formale si veda ad es. *J.R. Taylor "Introduzione all'analisi degli errori", Zanichelli.*

Sia ad es. z una grandezza funzione di due grandezze x e y :

$$z = f(x, y)$$

PROPAGAZIONE DEGLI ERRORI MASSIMI
(propagazione lineare).

$$\Delta z = \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| \Delta x + \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| \Delta y$$

PROPAGAZIONE DEGLI ERRORI STATISTICI
(propagazione quadratica).

$$\sigma_z = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 \sigma_x^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \sigma_y^2}$$

Tale formula vale se le misure delle grandezze x e y sono indipendenti e casuali; la relazione più generale invece deve tener conto dell'eventuale correlazione fra x e y :

$$\sigma_z = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 \sigma_x^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \sigma_y^2 + 2\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\sigma_{xy}}$$

Il termine di covarianza σ_{xy} , chiamato anche $\text{cov}(x,y)$, ha le dimensioni fisiche del prodotto $x y$. Supponiamo di aver effettuato N coppie di misure (x_i, y_i) ; in tal caso la covarianza σ_{xy} è data da:

$$\sigma_{xy} = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

Il fattore $N-1$ piuttosto che N è dovuto al fatto che le coppie di misure indipendenti sono $N-1$ in quanto una coppia è stata usata per determinare i valori medi di x e y .

Essa è diversa da 0 quando ad es. una sovrastima (o sottostima) di x comporta una sovrastima (o sottostima) di y .

In particolare invece, quando le misure di x e y sono indipendenti e casuali, la covarianza (dopo molte misure) tende a zero. In effetti, qualunque sia x_i , $(y_i - \bar{y})$ ha la stessa probabilità di essere positiva o negativa e quindi la somma di molti termini tende a 0.

Notiamo che nel caso semplice in cui la funzione f è composta solo da prodotti, quozienti o potenze, le formule precedenti si riducono semplicemente a somme lineari o quadratiche degli errori relativi, come si può facilmente verificare (k è una costante):

$$z = k \frac{x y^n}{w^m}$$

$$\left| \frac{\Delta z}{z} \right| = \left| \frac{\Delta x}{x} \right| + n \left| \frac{\Delta y}{y} \right| + m \left| \frac{\Delta w}{w} \right| \quad \left(\frac{\sigma_z}{z} \right)^2 = \left(\frac{\sigma_x}{x} \right)^2 + \left(n \frac{\sigma_y}{y} \right)^2 + \left(m \frac{\sigma_w}{w} \right)^2$$

Esempi:

$$T = 2\pi k \sqrt{\frac{L}{g}} \Rightarrow g = 4\pi^2 \frac{L}{T^2} \Rightarrow$$

$$\frac{\sigma_g}{g} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_L}{L}\right)^2 + 4\left(\frac{\sigma_T}{T}\right)^2} \quad (\text{errori statistici})$$

$$\left|\frac{\Delta g}{g}\right| = \left|\frac{\Delta L}{L}\right| + 2\left|\frac{\Delta T}{T}\right| \quad (\text{errori massimi})$$

$$M = m_1 \pm m_2 \Rightarrow$$

$$\sigma_M = \sqrt{m_1^2 + m_2^2} \quad (\text{errori statistici})$$

$$\Delta M = \Delta m_1 + \Delta m_2 \quad (\text{errori massimi})$$

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f} \Rightarrow f = \frac{q p}{q + p} \Rightarrow$$

$$\sigma_f = \sqrt{\left(\frac{q^2}{(q+p)^2}\right)^2 \sigma_p^2 + \left(\frac{p^2}{(q+p)^2}\right)^2 \sigma_q^2} \quad (\text{errori statistici})$$

$$\Delta f = \frac{q^2}{(q+p)^2} \Delta p + \frac{p^2}{(q+p)^2} \Delta q \quad (\text{errori massimi})$$

La formula di propagazione degli errori statistici giustifica la formula dell'errore standard ovvero dell'errore sulla media aritmetica:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N} \Rightarrow \sigma_x^2 = \sum_{i=1}^N \left[\left(\frac{1}{N} \right)^2 \sigma_x^2 \right] \Rightarrow \sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{N}}$$

Che cosa si fa quando bisogna combinare grandezze che hanno errore statistico con altre che hanno errore massimo (che quindi hanno differenti significati probabilistici) ?

La soluzione più semplice, per dare alla fine un livello probabilistico non ambiguo all'errore complessivo, è di “massimizzare” gli errori statistici, cioè moltiplicare ciascuno di essi per 3: si rammenti infatti che un'incertezza pari a 3σ corrisponde quasi al 100 % di probabilità di contenere il valore vero entro $\bar{x} \pm 3\sigma$. A questo punto si propagano tutti gli errori (quelli massimi e quelli statistici “massimizzati”) con la formula degli errori massimi e si attribuisce all'errore complessivo il significato di errore massimo con il livello di probabilità del 100%.

Esempio:

Si abbia errore massimo su L ed errore statistico su T (pendolo semplice):

$$\sigma_T \Rightarrow \Delta T \approx 3\sigma_T \Rightarrow$$

$$\Delta g = \left(\left| \frac{\Delta L}{L} \right| + 2 \left| \frac{\Delta T}{T} \right| \right) g = \left(\left| \frac{\Delta L}{L} \right| + 2 \left| \frac{3\sigma_T}{T} \right| \right) g$$

Nel caso in cui uno degli errori relativi fosse molto più piccolo dell'altro, si può trascurare l'errore sulla grandezza corrispondente e si può effettuare la propagazione solo dell'errore sull'altra grandezza.

Ad es. se $\Delta L/L \ll \sigma_T/T$ si ha semplicemente $\sigma_g/g = 2 \sigma_T/T$ con il significato probabilistico del 68%.

DISCREPANZA STATISTICA

Spesso occorre confrontare il risultato di una misura con un valore “accettato” o con un’altra misura al fine di valutarne la compatibilità statistica, a meno di errori sistematici.

Si chiama discrepanza fra due valori la grandezza:

$$t = \frac{|x_1 - x_2|}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}$$

La differenza $x_1 - x_2$ è essa stessa una variabile casuale con dispersione data dal denominatore sopra scritto. Si può affermare che se le due misure appartengono alla stessa popolazione della grandezza X , tale differenza deve essere centrata attorno a 0.

Da qui discendono i seguenti criteri di compatibilità:

Se $t \leq 1$ le due misure sono compatibili entro una deviazione standard (cioè al 68,3 %), se $t \leq 2$ le due misure sono compatibili entro due deviazioni standard (cioè al 95,4 %) e così via.

Spesso si sceglie convenzionalmente come criterio di compatibilità il valore $t \leq 1,96$ che corrisponde ad un livello di compatibilità pari al 95 %.

PRINCIPIO DELLA MASSIMA VEROSIMIGLIANZA

Supponiamo di aver effettuato N misure di una grandezza fisica X. La probabilità composta di osservare gli N valori $x_1, x_2, \dots, x_N$, se le misure sono casuali ed indipendenti è il prodotto delle probabilità di osservare i singoli valori:

$$P(x_1, x_2, \dots, x_N) = P(x_1) P(x_2) \dots P(x_N)$$

ovvero :

$$P = \left(\frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \right)^N e^{-\frac{\sum_{i=1}^N [x_i - \mu]^2}{2 \sigma^2}} dx_1 \cdot dx_2 \cdots dx_N$$
$$\equiv L \quad dx_1 \cdot dx_2 \cdots dx_N$$

dove L si chiama funzione di verosimiglianza.

IL PRINCIPIO DELLA MASSIMA VEROSIMIGLIANZA AFFERMA CHE IL CAMPIONE ESTRATTO DALLA POPOLAZIONE PARENTE E' QUELLO A CUI CORRISPONDE LA MASSIMA PROBABILITA'

(nell'ipotesi che il campione sia stato formato tramite un grande numero di misure ripetute casuali ed indipendenti).

Applichiamo il principio della massima verosimiglianza per giustificare le espressioni della media aritmetica e della deviazione standard del campione come migliori stime $\hat{\mu}$ e $\hat{\sigma}$ del valor vero μ e della deviazione standard σ della popolazione.

Infatti:

$$\frac{\partial L}{\partial \hat{\mu}} = 0 \Rightarrow \sum x_i - N\mu = 0$$

$$\Rightarrow \hat{\mu} = \frac{\sum x_i}{N} \equiv \bar{x}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \hat{\sigma}} = 0 \Rightarrow \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{N} \sum (x_i - \mu)^2$$

$$\Rightarrow \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{N-1} \sum (x_i - \bar{x})^2 \equiv \sigma_x^2$$

Il fattore N-1 piuttosto che N è dovuto al fatto che il numero di gradi di libertà è N-1 in quanto i dati vengono utilizzati una volta per stimare il valor medio.

Se le misure vengono effettuate con diversi metodi di misura non possiamo assumere che esse abbiano la stessa varianza. Ciò significa che gli N valori della stessa grandezza X sono caratterizzati dalle deviazioni standard $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_N$.

Il principio della massima verosimiglianza porta in questo caso alla formula della media pesata. Infatti:

$$L = \prod_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_i \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{[x_i - \mu]^2}{2\sigma_i^2}} \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \hat{\mu}} = 0 \Rightarrow \sum \frac{(x_i - \mu)}{\sigma_i^2} = 0$$

$$\Rightarrow \hat{\mu} = \frac{\sum_i w_i x_i}{\sum_i w_i} \equiv \bar{x}_{pesato}$$

dove $w_i \equiv \frac{1}{\sigma_i^2}$ vengono chiamati pesi.

L'errore sulla media pesata si ricava applicando la propagazione degli errori:

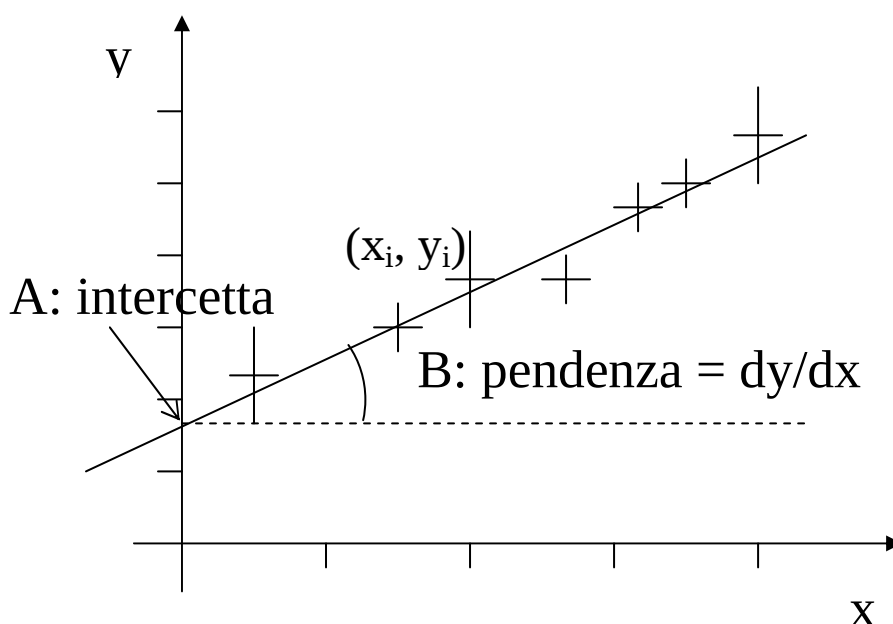
$$\begin{aligned}\sigma_x^2 &= \sum \left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial x_i} \sigma_i \right)^2 = \sum_i \left(\frac{w_i}{\sum w_i} \sigma_i \right)^2 = \frac{1}{(\sum w_i)^2} \sum (w_i \sigma_i)^2 = \\ &= \frac{1}{(\sum w_i)^2} \sum w_i = \frac{1}{\sum w_i} \Rightarrow\end{aligned}$$

$$\sigma_x = \frac{1}{\sqrt{\sum w_i}}$$

METODO DEI MINIMI QUADRATI

Supponiamo di misurare N coppie indipendenti di valori $(x_1, y_1), \dots, (x_N, y_N)$ di due grandezze fisiche legate fra loro da una **RELAZIONE LINEARE**:

$$y = A + Bx$$



Se le misure non fossero affette da errori, tutti i punti sarebbero allineati su una retta $y = A + Bx$. Nella realtà i punti, a causa degli errori, sono solo approssimativamente allineati.

Sorge allora il seguente interessante problema:

Supposto che fra le due grandezze sussista una relazione lineare, qual è la migliore retta che passa per gli N punti sperimentali ?

In altri termini: Quali sono le migliori stime dei parametri A e B ?

IL METODO DEI MINIMI QUADRATI RISOLVE IL PROBLEMA.

Facciamo, per semplicità, le seguenti ipotesi:

IPOTESI N.1

Gli errori relativi su una delle due grandezze siano molto minori di quelli sull'altra grandezza. Chiamiamo x tale grandezza e scegliamola come variabile indipendente:

$$\frac{\sigma_{xi}}{|x_i|} \ll \frac{\sigma_{yi}}{|y_i|}$$

IPOTESI N.2

Ciascun valore sperimentale y_i è distribuito normalmente, cioè secondo una distribuzione normale (gaussiana), attorno al valore vero $y_i^{vero} = A + B x_i$, con dispersione (deviazione standard) nota σ_{yi} :

IPOTESI N.3

Gli errori casuali (statistici) σ_{yi} sulle y_i siano tutti uguali: $\sigma_y = \sigma_{yi}$.

IL PRINCIPIO DELLA MASSIMA VEROSIMIGLIANZA afferma che la migliore retta che passa per gli N punti è quella che massimizza la probabilità di ottenere proprio i valori osservati y_i .

La probabilità di ottenere la misura y_i è:

$$P_{A,B}(y_i) \propto \frac{1}{\sigma_y} e^{-\frac{[y_i - (A + Bx_i)]^2}{2\sigma_y^2}}$$

dove A e B sono i due parametri incogniti.

La probabilità di ottenere l'insieme delle misure y_i è data dal prodotto delle N probabilità $P(y_i)$ (osservazioni indipendenti):

$$P_{A,B}(y_1, \dots, y_N) = P(y_1) \cdot P(y_2) \cdot \dots \cdot P(y_N)$$

$$\propto \frac{1}{\sigma_y^N} e^{-\frac{\sum_{i=1}^N [y_i - (A + Bx_i)]^2}{2\sigma_y^2}} \equiv \frac{1}{\sigma_y^N} e^{-\frac{1}{2}\chi^2}$$

Le migliori stime dei parametri A e B sono quelle che minimizzano la somma dei quadrati delle deviazioni delle misure sperimentali y_i dai valori attesi $A + Bx_i$:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^N \frac{[y_i - (A + Bx_i)]^2}{\sigma_{y_i}^2}$$

Tale grandezza si chiama **CHI-QUADRATO**.

Osserviamo che ciascuna deviazione è pesata per il reciproco dell'errore σ_{y_i} . Nel nostro caso i pesi sono tutti uguali.

Derivando rispetto ad A ed a B ed imponendo che le derivate siano uguali a 0, si ottiene:

$$\frac{\partial \chi^2}{\partial A} = -\frac{2}{\sigma_y^2} \sum_{i=1}^N [y_i - (A + Bx_i)] = 0$$

$$\frac{\partial \chi^2}{\partial B} = -\frac{2}{\sigma_y^2} \sum_{i=1}^N \{x_i [y_i - (A + Bx_i)]\} = 0$$

Le due equazioni danno luogo al sistema:

$$\begin{cases} -\sum_{i=1}^N y_i + N A + B \sum_{i=1}^N x_i = 0 \\ -\sum_{i=1}^N x_i y_i + A \sum_{i=1}^N x_i + B \sum_{i=1}^N x_i^2 = 0 \end{cases}$$

Le formule risolutive del FIT DELLA RETTA DEI MINIMI QUADRATI NON PESATO (valide nel caso di PESI STATISTICI UGUALI) sono:

$$A = \frac{\sum (x_i^2) \cdot \sum y_i - \sum x_i \cdot \sum (x_i y_i)}{\Delta}$$

$$B = \frac{N \sum (x_i y_i) - \sum x_i \cdot \sum y_i}{\Delta}$$

dove:

$$\Delta = N \sum (x_i^2) - (\sum x_i)^2$$

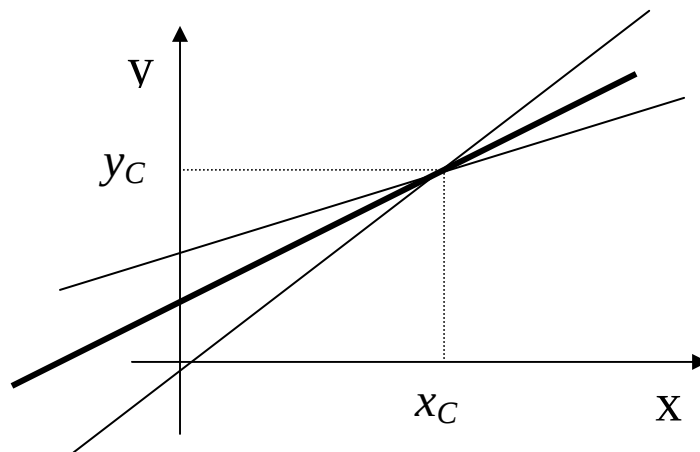
I parametri A e B sono essi stessi affetti da incertezza statistica. Utilizzando la propagazione degli errori si ricava:

$$\sigma_A = \sigma_y \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{\Delta}} \quad \sigma_B = \sigma_y \sqrt{\frac{N}{\Delta}}$$

In realtà c'è sempre anche una certa dipendenza statistica dei parametri fra loro, nel senso che la stima di un parametro influenza la stima dell'altro, benché le misure siano per ipotesi

statisticamente indipendenti. Ci si rende facilmente conto di ciò se si tiene presente che la retta migliore (retta di best fit) passa sempre per il centro di gravità dei punti (che per l'ipotesi n. 3 hanno lo stesso peso statistico):

$$x_C = \frac{\sum x_i}{N}; \quad y_C = \frac{\sum y_i}{N}$$



La pendenza e l'intercetta della retta di best fit sono evidentemente correlate: se aumenta la pendenza, diminuisce l'intercetta e viceversa. Tale correlazione è descritta tramite una grandezza chiamata covarianza:

$$\text{cov}(A, B) = -\sigma_y^2 \frac{\sum x_i}{\Delta}$$

La covarianza è rilevante nel caso in cui si debba stimare l'errore su una grandezza fisica derivata F che dipenda da entrambi i parametri A e B . Infatti:

$$F = f(A, B) \quad \Rightarrow$$

$$\sigma_F = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial A}\right)^2 \sigma_A^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial B}\right)^2 \sigma_B^2 + 2 \left(\frac{\partial f}{\partial A}\right) \left(\frac{\partial f}{\partial B}\right) \text{cov}(A, B)}$$

RILASCIAMO L'IPOTESI N. 3, supponiamo cioè che:

Gli errori statistici sulle y_i NON siano tutti necessariamente uguali e quindi i pesi w_i così definiti:

$$w_i = \frac{1}{\sigma_{y_i}^2}$$

NON siano tutti necessariamente uguali.

Si può dimostrare, utilizzando il principio di massima verosimiglianza che **le formule più generali del FIT DELLA RETTA DEI MINIMI QUADRATI PESATO (valide nel caso di PESI STATISTICI NON NECESSARIAMENTE UGUALI)** sono:

$$A = \frac{\sum w_i x_i^2 \cdot \sum w_i y_i - \sum w_i x_i \cdot \sum w_i x_i y_i}{\Delta}$$

$$B = \frac{\sum w_i \cdot \sum w_i x_i y_i - \sum w_i x_i \cdot \sum w_i y_i}{\Delta}$$

$$\Delta = \sum w_i \cdot \sum w_i x_i^2 - (\sum w_i x_i)^2$$

$$\sigma_A = \sqrt{\frac{\sum w_i x_i^2}{\Delta}} \quad \sigma_B = \sqrt{\frac{\sum w_i}{\Delta}}$$

$$x_C = \frac{\sum (w_i x_i)}{\sum w_i}; \quad y_C = \frac{\sum (w_i y_i)}{\sum w_i}$$

$$\text{cov}(A, B) = -\frac{\sum w_i x_i}{\Delta}$$

RILASCIAMO L'IPOTESI N. 2, supponiamo cioè che:

Gli errori σ_{y_i} sulle y_i NON siano noti.

Ciò può succedere o perché non si sono eseguite misure ripetute per ogni punto y_i oppure perché gli errori sono di tipo MASSIMO Δy_i non necessariamente uguali.

In entrambi i casi se, come in genere succede, si può fare l'ipotesi che gli errori statistici σ_{y_i} , benché ignoti, siano tutti uguali, allora si esegue **il FIT DELLA RETTA DEI MINIMI QUADRATI NON PESATO**.

Per ricavare gli errori sui parametri A e B occorre comunque stimare a posteriori (in base ai dati e al fit) gli errori σ_y , supposti uguali.

Si dimostra che la migliore stima di σ_y è data da:

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N [y_i - (A + Bx_i)]^2}{N - 2}}$$

dove al denominatore c'è $N-2$ giacché gli N dati sono stati usati per stimare i 2 parametri A e B e pertanto i GRADI DI LIBERTA' sono $N-2$.

RILASCIAMO L'IPOTESI N. 1, supponiamo cioè che:

Gli errori relativi sulle x_i NON siano trascurabili rispetto a quelli sulle y_i .

Si può dimostrare che definendo l'errore trasportato

$$\sigma_i^2 = \sigma_{y_i}^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right) \sigma_{x_i}^2$$

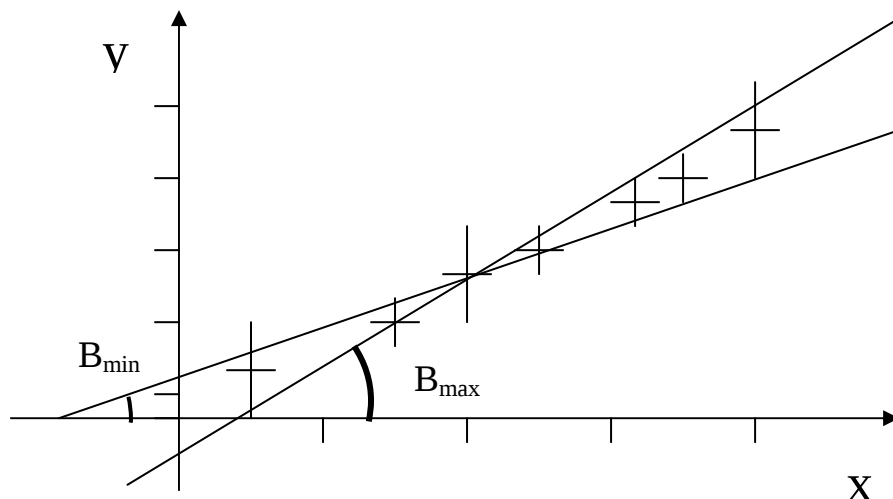
il chi-quadrato da minimizzare è:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^N \frac{[y_i - (A + Bx_i)]^2}{\sigma_i^2}$$

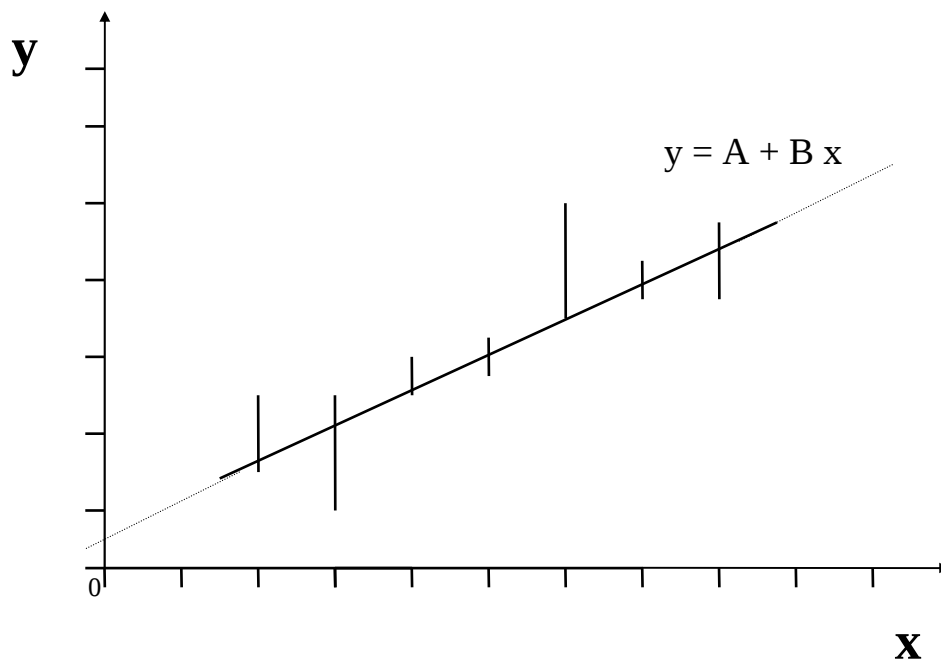
e le formule da usare sono quelle già viste pur di sostituire σ_{y_i} con σ_i .

Per effettuare il calcolo di σ_i si può fare una prima stima della pendenza come media fra la minima e la massima pendenza compatibile ad occhio con i dati.

$$\frac{\partial y}{\partial x} \approx \frac{B_{\max} + B_{\min}}{2}$$



FORMULE RIASSUNTIVE DEL FIT DEI MINIMI QUADRATI DI UNA RETTA $y = A + Bx$



A) FIT NON PESATO (ERRORI STATISTICI σ_{y_i} IGNOTI, ERRORE STATISTICO COMUNE σ_y CALCOLATO)

$$A = \frac{\sum x_i^2 \cdot \sum y_i - \sum x_i \cdot \sum x_i y_i}{\Delta}$$

$$B = \frac{N \cdot \sum x_i y_i - \sum x_i \cdot \sum y_i}{\Delta}$$

dove

$$\Delta = N \cdot \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2$$

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{\sum (y_i - A - B \cdot x_i)^2}{N - 2}}$$

$$\sigma_A = \sigma_y \cdot \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{\Delta}} \quad \sigma_B = \sigma_y \cdot \sqrt{\frac{N}{\Delta}} \quad \text{cov}(A, B) = -\frac{\sum x_i}{\Delta} \sigma_y^2$$

B) FIT PESATO (ERRORI STATISTICI σ_{yi} NOTI)

$$A = \frac{\sum w_i x_i^2 \cdot \sum w_i y_i - \sum w_i x_i \cdot \sum w_i x_i y_i}{\Delta}$$

$$B = \frac{\sum w_i \cdot \sum w_i x_i y_i - \sum w_i x_i \cdot \sum w_i y_i}{\Delta}$$

dove w_i sono chiamati “pesi” $w_i = \frac{1}{\sigma_i^2}$

$$\Delta = \sum w_i \cdot \sum w_i x_i^2 - (\sum w_i x_i)^2$$

$$\sigma_A = \sqrt{\frac{\sum w_i x_i^2}{\Delta}} \quad \sigma_B = \sqrt{\frac{\sum w_i}{\Delta}} \quad \text{cov}(A, B) = -\frac{\sum w_i x_i}{\Delta}$$