

RIDUZIONE A FORMA CANONICA DELL'EQUAZIONE DI UNA CONICA NON DEGENERE

Sia C una conica. Fissato un riferimento $R = (O, R_v = (\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y))$, sia

$$(1) \quad a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0.$$

un'equazione che rappresenta C in R (in coordinate non omogenee) e sia $A = (a_{ij})$, $1 \leq i, j \leq 3$ la matrice di C in R (associata all'equazione (1)).

Ponendo $M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $N = (2a_{13} \quad 2a_{23})$ e $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, l'equazione (1) si

scrive così :

$$(2) \quad X^t M X + N X + a_{33} = 0.$$

Osserviamo che la somma dei termini di secondo grado nella (1), cioè $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy$, è uguale a $X^t M X$ e che $|M| = A_{33}$, complemento algebrico dell'elemento a_{33} della matrice A .

Sia ora R' un altro riferimento e siano

$$(3) \quad X = B X' + C,$$

dove $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$, $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$, le formule di passaggio da

R' a R . Applicando tali formule, la (2) diventa

$$(B X' + C)^t M (B X' + C) + N (B X' + C) + a_{33} = 0.$$

In tale equazione, che rappresenta C in R' , la somma dei termini di secondo grado è $(X')^t (B^t M B) X'$. Ne segue che

$$(4) \quad A'_{33} = |B^t M B| = |B|^2 A_{33} = A_{33}.$$

Sia ora C non degenerare. Vogliamo determinare un opportuno riferimento (*riferimento canonico*) in cui l'equazione della conica diventa particolarmente semplice (*equazione canonica*). Per far questo fissiamo l'attenzione sull'equazione della conica nella forma (2). Poiché la matrice M è una matrice simmetrica reale, esiste una matrice ortogonale P tale che $P^t M P$ è una matrice diagonale D avente sulla diagonale principale gli autovalori di M . Osserviamo subito che, poiché M non è la matrice nulla, i suoi autovalori non possono essere entrambi uguali a zero (infatti in tal caso D sarebbe la matrice nulla e da $P^t M P = P^{-1} M P = D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ si otterrebbe $M = P D P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$).

Consideriamo il riferimento ortogonale monometrico $R' = (O, R'_v = (\mathbf{e}'_x, \mathbf{e}'_y))$ avente la stessa origine di R e in cui i versori $\mathbf{e}'_x$ ed $\mathbf{e}'_y$ sono i vettori liberi le cui componenti in R_v sono le colonne della matrice P . Evidentemente, $X = P X'$ sono le formule di passaggio da R' ad R . Nel riferimento R' , l'equazione della conica diventa $(X')^t D X' + (NP) X' + a_{33} = 0$. Detti h_1 e h_2 gli autovalori di M , tale equazione si scrive :

$$(5) \quad h_1 x'^2 + h_2 y'^2 + n_1 x' + n_2 y' + a_{33} = 0,$$

dove $n_1 x' + n_2 y' = (NP) X'$.

Distinguiamo due casi.

1° caso : h_1 e h_2 entrambi diversi da 0.

Effettuiamo ora un nuovo cambio di riferimento; precisamente, per ogni scelta di $\alpha, \beta \in \mathcal{R}$, scegliamo il riferimento $R'' = (O'', R''_v = (\mathbf{e}'_x, \mathbf{e}'_y))$ dove O'' è il punto di coordinate (α, β) in R' . Le formule di passaggio da R'' ad R' sono $\begin{cases} x' = x'' + \alpha \\ y' = y'' + \beta \end{cases}$.

Applicando tali formule alla (5), l'equazione della conica in R'' diventa:

$$h_1 x''^2 + h_2 y''^2 + (2h_1\alpha + n_1)x'' + (2h_2\beta + n_2)y'' + h_1\alpha^2 + h_2\beta^2 + n_1\alpha + n_2\beta + a_{33} = 0.$$

Poiché h_1 e h_2 sono entrambi diversi da 0, è possibile scegliere α e β in modo tale che nell'equazione precedente i coefficienti di x'' e y'' siano entrambi uguali a 0

(basta porre $\alpha = -\frac{n_1}{2h_1}$ e $\beta = -\frac{n_2}{2h_2}$). Con questa scelta di α e β , l'equazione della

conica diventa

$$(6) \quad h_1 x''^2 + h_2 y''^2 + p = 0,$$

avendo indicato con p il termine noto. Essendo C non degenerare, i coefficienti della

(6) sono tutti diversi da 0. Esaminiamo ora le varie possibilità che possono presentarsi per tali coefficienti.

(i) h_1 e h_2 concordi ($|A| \neq 0$, $A_{33} > 0$: C è un'ellisse, eventualmente priva di punti

reali). Dividendo la (6) per $-p$ si ottiene $\frac{x''^2}{a^2} + \frac{y''^2}{b^2} = 1$, avendo posto $-\frac{h_1}{p}$

$= \frac{1}{a^2}$ e $-\frac{h_2}{p} = \frac{1}{b^2}$. Notiamo che, se $h_1 = h_2$, allora C è in particolare una

circonferenza.

(ii) h_1 e h_2 discordi ($|A| \neq 0$ e $A_{33} < 0$: C è un'iperbole). Supponiamo $-p$

concorde con h_1 (analogamente si ragiona nell'altro caso). Dividendo la (6) per

$-p$ si ottiene $\frac{x''^2}{a^2} - \frac{y''^2}{b^2} = 1$, avendo posto $-\frac{h_1}{p} = \frac{1}{a^2}$ e $-\frac{h_2}{p} = -\frac{1}{b^2}$.

2° caso. h_1 oppure h_2 uguale a 0.

($|A| \neq 0$ e $A_{33} = 0$, C è una parabola). Per fissare le idee supponiamo $h_1 = 0$

(analogamente si ragiona nell'altro caso). Effettuiamo ora un nuovo cambio di

riferimento; precisamente, per ogni scelta di $\alpha, \beta \in \mathcal{R}$, scegliamo il riferimento

R'' tale che $\begin{cases} x' = x'' + \alpha \\ y' = y'' + \beta \end{cases}$ sono le formule di passaggio da R'' ad R' . Applicando

tali formule alla (5), l'equazione della conica in R'' diventa

$h_2 y''^2 + n_1 x'' + (2h_2 \beta + n_2) y'' + h_2 \beta^2 + n_1 \alpha + n_2 \beta + a_{33} = 0$. Poiché h_2 è diverso da 0, è possibile scegliere β in modo tale che nell'equazione precedente il coefficiente di y'' sia uguale a 0 (basta porre $\beta = -\frac{n_2}{2h_2}$). Con questa scelta di β , l'equazione della

conica diventa

$$(7) \quad h_2 y''^2 + n_1 x'' + h_2 \left(-\frac{n_2}{2h_2} \right)^2 + n_1 \alpha - n_2 \frac{n_2}{2h_2} + a_{33} = 0.$$

Poiché C è non degenere, è $n_1 \neq 0$ e dunque è possibile scegliere α in modo da annullare il termine noto nella (7) che diventa così $h_2 y''^2 + n_1 x'' = 0$, e cioè

$y''^2 = 2px''$, avendo posto $\frac{-n_1}{h_2} = 2p$.

ESEMPI

Fissato nel piano un riferimento reale e proprio R , classifichiamo e determiniamo un'equazione canonica per le seguenti coniche C :

$$1. \quad 2x^2 + 2xy + 2y^2 + x - 2y - 3 = 0.$$

Scriviamo la matrice A associata a C in R : $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 2 & -1 \\ \frac{1}{2} & -1 & -3 \end{pmatrix}$. Poiché $|A| =$

$-\frac{25}{2} \neq 0$, $A_{33} = 3 > 0$ e $a_{11} |A| = -\frac{25}{2} < 0$, allora C è non degenere ed è una ellisse.

Vogliamo ora determinare un'equazione canonica dell'ellisse C . A tale scopo

occorre per prima cosa diagonalizzare ortogonalmente la matrice simmetrica reale

$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Una matrice ortogonale che diagonalizza M è la matrice

$$P = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \text{ e la matrice diagonale } P^t M P \text{ è } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Nel riferimento R' tale che $X = P X'$ sono le formule di passaggio da R' ad R , l'equazione della conica diventa (continuando a indicare le indeterminate con x e y ,

$$\text{anziché con } x' \text{ e } y') \quad x^2 + 3y^2 - \frac{3\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y - 3 = 0.$$

Detto $R_{\alpha,\beta}$ un riferimento tale che $\begin{cases} x = x' + \alpha \\ y = y' + \beta \end{cases}$ sono le formule di passaggio da $R_{\alpha,\beta}$

ad R' , l'equazione di C in $R_{\alpha,\beta}$ è

$$x^2 + 3y^2 + (2\alpha - \frac{3\sqrt{2}}{2})x + (6\beta - \frac{\sqrt{2}}{2})y + \alpha^2 + 3\beta^2 - \frac{3\sqrt{2}}{2}\alpha - \frac{\sqrt{2}}{2}\beta - 3 = 0$$

(continuando a indicare le indeterminate con x e y). E' possibile determinare α e β

in modo tale che $R_{\alpha,\beta}$ sia un riferimento canonico; basta porre $\alpha = \frac{3\sqrt{2}}{4}$ e $\beta = \frac{\sqrt{2}}{12}$.

Un'equazione canonica di C è dunque $x^2 + 3y^2 - \frac{25}{6} = 0$.

$$2. \quad 2x^2 + 2\sqrt{3}xy - 2x - 1 = 0.$$

Scriviamo la matrice A associata a C in R : $A = \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{3} & -1 \\ \sqrt{3} & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Poiché $|A| =$

$3 \neq 0$, $A_{33} = -3 < 0$, allora C è non degenera ed è un'iperbole. Vogliamo ora determinare un'equazione canonica dell'iperbole C . Una matrice ortogonale che

diagonalizza la matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}$ è la matrice $P = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$ e la matrice

diagonale $P^t M P$ è $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Nel riferimento R' tale che $X = P X'$ sono le formule di passaggio da R' ad R , l'equazione della conica diventa $3x'^2 - y'^2 - \sqrt{3}x' + y' - 1 = 0$.

Detto $R_{\alpha,\beta}$ un riferimento tale che $\begin{cases} x = x' + \alpha \\ y = y' + \beta \end{cases}$ sono le formule di passaggio da $R_{\alpha,\beta}$

ad R' , l'equazione di C in $R_{\alpha,\beta}$ è

$3x'^2 - y'^2 + (6\alpha - \sqrt{3})x' + (-2\beta + 1)y' + 3\alpha^2 - \beta^2 - \sqrt{3}\alpha + \beta - 1 = 0$. E' possibile determinare α e β in modo tale che $R_{\alpha,\beta}$ sia un riferimento canonico; basta porre

$\alpha = \frac{\sqrt{3}}{6}$ e $\beta = \frac{1}{2}$. Un'equazione canonica di C è dunque $3x'^2 - y'^2 - 1 = 0$.

$$3.4x^2 + y^2 - 4xy + 2y = 0.$$

Scriviamo la matrice A associata a C in R : $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Poiché $|A| = -4 \neq 0$

e $A_{33} = 0$, allora C è una parabola. Vogliamo ora determinarne un'equazione canonica. Una matrice ortogonale che diagonalizza la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \text{ è la matrice } P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \text{ e la matrice diagonale } P^t M P \text{ è}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Nel riferimento R' tale che $X = P X'$ sono le formule di passaggio da R' ad R ,

$$\text{l'equazione della conica diventa } 5y^2 + \frac{4\sqrt{5}}{5}x + \frac{2\sqrt{5}}{5}y = 0.$$

Per quanto visto 2° caso, esiste un riferimento canonico per C in cui l'equazione

$$\text{della parabola è } 5y^2 + \frac{4\sqrt{5}}{5}x = 0.$$