Appendice B
Pacchetto d'onde e velocità di gruppo

Un pacchetto d'onde si ottiene dalla sovrapposizione di un gruppo d'onde *pressocchè* monocromatiche, cioè tale che nello sviluppo di Fourier

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} a(k) e^{i[kx-\omega(k)t]} dk$$

compaiamo con intensità apprezzabile soltanto le frequenze comprese in un piccolo intervallo, ossia che $a(k)$ si possa ritenere diverso da zero solo per k compreso entro un piccolo intervallo ($k_0 - \epsilon$, $k_0 + \epsilon$). Possiamo quindi scrivere $k = k_0 + \eta$, con $\eta \ll k_0$

$$\omega(k) \approx \omega(k_0) + \left(\frac{d\omega}{dk}\right)_{k_0} \eta + ... = \omega(k_0) + v_g \eta$$

con

$$v_g = \left(\frac{d\omega}{dk}\right)_{k_0}$$

velocità di gruppo, e quindi

$$u(x,t) \approx e^{i[k_0 x - \omega(k_0)t]} \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} a(k_0+\eta) e^{i(x-v_g t)\eta} d\eta$$

La funzione ora trovata rappresenta un'onda armonica pura di frequenza $\omega(k_0)/2\pi$ ma di ampiezza (e fase) variabile, funzione di ($x - v_g t$), che rappresenta l'inviluppo del pacchetto d'onde (quindi il pacchetto nel suo insieme) e che si muove con la velocità di gruppo v_g. Se, per un dato t, rappresentiamo graficamente il modulo dell'integrale in funzione di x (curva tratteggiata, che chiamiamo *profilo* del gruppo), la u sarà rappresentata da una specie di sinusoide ad ampiezza variabile, iscritta entro questa curva.

Si noti che l'integrale contiene x e t solo nella combinazione $x - v_g t$: ciò significa che il profilo del gruppo si sposta senza deformarsi con velocità v_g: si può quindi dire che tutto il gruppo d'onde progredisce con questa velocità. Si osservi che la velocità di gruppo è generalmente diversa dalla velocità $v = \omega/k$ con cui si spostano le singole onde (velocità di fase).