

CURVE E SUPERFICI

13.1 CURVE DEL PIANO CARTESIANO

Nel seguito si suppongono note le nozioni di curva e superficie nel piano e nello spazio cartesiano reale.

Le curve del piano cartesiano qui considerate saranno espresse in una delle forme seguenti:

a) in *forma cartesiana*

$$(1) \quad f(x, y) = 0$$

dove $f(x, y)$ è una funzione reale di due variabili continua con derivate parziali $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ continue in un aperto di $\mathbb{R}^2$;

b) in *forma parametrica*

$$(2) \quad \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

dove $x(t), y(t)$ sono funzioni reali nella variabile t (detta *parametro*) continue con derivate prime $x'(t), y'(t)$ continue in un intervallo I di $\mathbb{R}$.

Se $f(x, y)$ è un polinomio in due variabili, la curva $f(x, y) = 0$ dice *algebrica*. Il grado del polinomio f si dice *grado della curva*.

Esempio 13.1.1. Le rette e le coniche sono curve algebriche di grado 1 e 2.

Può avere interesse il passaggio dalla forma (1) alla forma (2) e viceversa, ma non sempre esistono metodi elementari per effettuarlo.

Esempio 13.1.2. Data la circonferenza Γ di equazione $x^2 + y^2 = 1$, le equazioni

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

sono equazioni parametriche della circonferenza.

Si possono ottenere anche equazioni parametriche *razionali*, intersecando Γ con una retta variabile del fascio di centro $Q = (0, 1)$. Poiché Q è un punto della circonferenza, una retta variabile per Q di equazione $y - 1 = tx$ incontra la circonferenza nell'ulteriore punto $P = \left(\frac{-2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2} \right)$ e dunque si ottengono le seguenti equazioni parametriche di Γ :

$$\begin{cases} x = -\frac{2t}{1+t^2} \\ y = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

Esempio 13.1.3. Data la curva

$$\begin{cases} x = t^2 \\ y = t^3 \end{cases}$$

si può eliminare t in uno dei seguenti modi: si elevano rispettivamente al cubo e al quadrato i due membri della prima e seconda equazione e poi si sottrae ottenendo:

$$x^3 - y^2 = 0$$

Si poteva pervenire allo stesso risultato, ricavando $t = \frac{t^3}{t^2} = \frac{y}{x}$ dalle due equazioni parametriche e sostituendo nella prima equazione parametrica.

Se però si fosse sostituito $t = \frac{y}{x}$ nella seconda equazione parametrica si sarebbe ottenuto $y(x^3 - y^2) = 0$ e questa curva si spezza nella retta di equazione $y = 0$ che non appartiene a Γ e nella curva $x^3 - y^2 = 0$ che coincide effettivamente con Γ (come si vede controllando che ogni punto di $x^3 - y^2 = 0$ è un punto di Γ). Ciò porta alla seguente osservazione di carattere generale.

Osservazione 13.1.4. Se una curva Γ è data nella forma parametrica (2) e si elimina il parametro dalle sue equazioni, si perviene ad un'equazione cartesiana del tipo (1) corrispondente a una curva Γ' ; si ha $\Gamma \subseteq \Gamma'$ (tutti i punti ottenibili in corrispondenza a un valore del parametro soddisfano all'equazione cartesiana) ma non è detto

che valga il viceversa: Γ' può contenere strettamente Γ ed occorre un'ulteriore analisi per scartare la parte sovrabbondante.

Date due curve piane C_1 e C_2 in forma cartesiana, rispettivamente $f(x, y) = 0$ e $g(x, y) = 0$, i punti comuni alle due curve sono tutti e soli i punti $P = (x, y)$ le cui coordinate risolvono il sistema

$$\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$$

Non è detto che tale sistema sia risolubile in generale. Se $f(x, y) = 0$ e $g(x, y) = 0$ sono polinomi privi di fattori comuni di $K[x, y]$ vi sono dei metodi non elementari [Teorema di Bezout] che mostrano che, se m e n sono i gradi dei due polinomi f e g , il sistema ha al più mn soluzioni, cioè due curve algebriche C_1 e C_2 si incontrano in un numero finito di punti ($\leq mn$). In particolare una curva algebrica di grado n incontra una retta in al più $1 \cdot n = n$ punti. Quest'ultimo risultato può anche essere ottenuto direttamente nel modo seguente.

Se $f(x, y)$ è un polinomio di grado n e $\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \end{cases}$ è una retta, i punti di intersezione della curva $f(x, y) = 0$ con la retta corrispondono ai valori del parametro t che verificano l'equazione algebrica $f(x_0 + lt, y_0 + mt) = 0$ che ha grado n in t e quindi ha al più n radici reali.

In generale le intersezioni di una curva del tipo (1) con una curva del tipo (2) si ottengono determinando i valori di t che sono soluzioni dell'equazione in una variabile:

$$f(x(t), y(t)) = 0$$

Se invece si vogliono determinare i punti comuni alla curva (2) e alla curva

$$\begin{cases} x = x_1(t) \\ y = y_1(t) \end{cases}$$

tali punti si ottengono in corrispondenza a coppie s, t tali che

$$\begin{cases} x(s) - x_1(t) = 0 \\ y(s) - y_1(t) = 0 \end{cases}$$

13.2 SUPERFICI DELLO SPAZIO CARTESIANO

Le superfici considerate saranno espresse in una delle forme seguenti:

a) in *forma cartesiana*

$$(3) \quad f(x, y, z) = 0$$

dove $f(x, y, z)$ è una funzione reale di tre variabili con derivate parziali $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial z}$ continue in un aperto di $\mathbb{R}^3$;

b) in *forma parametrica*

$$(4) \quad \begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{cases}$$

dove $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ sono funzioni reali di due variabili continue con le derivate parziali $\frac{\partial x}{\partial u}$, $\frac{\partial y}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial u}$, $\frac{\partial x}{\partial v}$, $\frac{\partial y}{\partial v}$, $\frac{\partial z}{\partial v}$ continue in un aperto di $\mathbb{R}^2$.

Anche nel caso delle superfici (come per le curve) si può talvolta passare dalla forma parametrica a quella cartesiana (e viceversa), tenendo presente che nel passaggio suddetto possono comparire componenti sovrabbondanti.

Se $f(x, y, z)$ è un polinomio di grado n , la superficie si dice *algebrica* di grado n .

Un'osservazione analoga a quella fatta nel paragrafo 13.1 mostra che *una superficie algebrica* del tipo (3), definita da un polinomio di grado n ha al più n intersezioni nello spazio con una retta.

13.3 CURVE DELLO SPAZIO CARTESIANO. CURVE PIANE

Una curva dello spazio può essere data:

a) mediante *equazioni parametriche*:

$$(5) \quad \Gamma : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

dove $x(t), y(t), z(t)$ sono funzioni reali nella variabile t continue con derivate prime $x'(t), y'(t), z'(t)$ continue in un intervallo I di $\mathbb{R}$.

b) come *intersezione di due superfici* in forma cartesiana:

$$f(x, y, z) = 0, \quad g(x, y, z) = 0$$

(con derivate parziali continue) cioè le coordinate x, y, z dei punti devono verificare il sistema.

$$(6) \quad \begin{cases} f(x, y, z) = 0 \\ g(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

Si può passare dalla forma parametrica (5) alla forma cartesiana (6) "eliminando" il parametro t dalle equazioni di (5), ma occorrono le stesse cautele già avanzate relativamente alle curve piane [Osserv. 13.1.4].

Esempio 13.3.1. Sia Γ la curva:

$$(7) \quad \begin{cases} x = t^3 \\ y = t^2 \\ z = t \end{cases}$$

Si può eliminare in vario modo t , da due delle equazioni (7), e si ottengono così superfici contenenti Γ ; ad esempio:

$$F: \quad x - z^3 = 0$$

$$G: \quad y - z^2 = 0$$

$$H: \quad x^2 - y^3 = 0$$

$$K: \quad x - yz = 0$$

$$L: \quad xy - z^5 = 0$$

Si vede facilmente che $F \cap G = \Gamma$, mentre $G \cap L$ contiene, oltre a Γ , anche l'asse x e dunque Γ non può rappresentarsi nella forma

$$\begin{cases} y - z^2 = 0 \\ xy - z^5 = 0 \end{cases}$$

perché vi è una componente in eccesso.

Una curva Γ dello spazio cartesiano si dice *piana* se tutti i punti di Γ appartengono ad un piano $\pi: ax + by + cz + d = 0$. Quindi una curva data dal sistema di equazioni

$$\begin{cases} f(x, y, z) = 0 \\ ax + by + cz + d = 0 \end{cases}$$

(dove $f(x, y, z) = 0$ è una superficie) è piana.

Le intersezioni di una curva del tipo (5) col piano $\pi: ax + by + cz + d = 0$ si trovano determinando i valori di t che soddisfano l'equazione

$$ax(t) + by(t) + cz(t) + d = 0.$$

Se il primo membro è nullo per ogni valore di t , la curva appartiene a π e la curva è *piana*.

Esempio 13.3.2. La curva algebrica

$$\begin{cases} x = t^3 \\ y = t^2, \\ z = t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

non è piana. Infatti se fosse contenuta in un piano $ax + by + cz + d = 0$, l'equazione $at^3 + bt^2 + ct + d = 0$ sarebbe verificata per ogni $t \in \mathbb{R}$, ma un polinomio di terzo grado ha al più tre radici. Ciò implica che $a = b = c = d = 0$.

Esempio 13.3.3. La curva

$$\begin{cases} x = t^2 \\ y = t - 2t^2 \\ z = t + t^2 \end{cases}$$

è piana e si può determinare il piano che la contiene. Infatti se $ax + by + cz + d = 0$ è un piano che la contiene, si ha $at^2 + b(t - 2t^2) + c(t + t^2) + d = 0$ cioè $(a - 2b + c)t^2 + (b + c)t + d = 0$ onde

$$\begin{cases} a - 2b + c = 0 \\ b + c = 0 \\ d = 0 \end{cases}$$

Tale sistema ha soluzioni $a = 3b$, $c = -b$, $d = 0$ e, posto $b = 1$, si ha il piano $3x + y - z = 0$ che contiene Γ .

Esempio 13.3.4. La curva

$$\begin{cases} x = t - t^2 \\ y = 2t + t^3 \\ z = t^2 - t^3 + 1 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

non è piana. Infatti se $ax + by + cz + d = 0$ fosse un piano che la contiene, si avrebbe $a(t - t^2) + b(2t + t^3) + c(t^2 - t^3 + 1) + d = 0$, cioè $(b - c)t^3 + (c - a)t^2 + (a + 2b)t + c + d = 0$, per ogni $t \in \mathbb{R}$, onde

$$\begin{cases} b - c = 0 \\ c - a = 0 \\ a + 2b = 0 \\ c + d = 0 \end{cases}$$

che, come si verifica facilmente, è un sistema omogeneo di Cramer nelle 4 variabili a, b, c, d onde $a = b = c = d = 0$.

Più generalmente, le intersezioni di una curva del tipo (5) con una superficie del tipo (3) si ottengono in corrispondenza ai valori di t che sono soluzioni dell'equazione

$$f(x(t), y(t), z(t)) = 0.$$

La curva sta sulla superficie se il primo membro è nullo per ogni valore di t .

13.4 RETTA TANGENTE A UNA CURVA Γ E PIANO TANGENTE A UNA SUPERFICIE F IN UN PUNTO P_0

Sia

$$\Gamma : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

una curva in forma parametrica e $P_0(x_0, y_0, z_0)$, $P_1(x_1, y_1, z_1)$ due punti di Γ corrispondenti ai valori del parametro $t = t_0, t = t_1$ cioè

$$\begin{cases} x_0 = x(t_0) \\ y_0 = y(t_0) \\ z_0 = z(t_0) \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = x(t_1) \\ y_1 = y(t_1) \\ z_1 = z(t_1) \end{cases}$$

Si supponga inoltre che il punto P_0 corrisponda al solo valore t_0 del parametro t , cioè che, se $x(t_0) = x(t'_0)$, $y(t_0) = y(t'_0)$, $z(t_0) = z(t'_0)$, allora $t_0 = t'_0$.

Si supponga infine che $(x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)) \neq (0, 0, 0)$ cioè la curva sia *regolare* in P_0 .

La *tangente* a Γ in P_0 si definisce come posizione limite della retta che congiunge P_0 con P_1 quando P_1 muovendosi su Γ tende a P_0 [Figura 13.1].

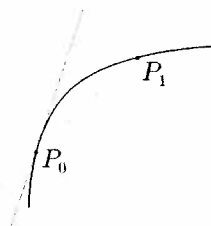


Figura 13.1

La retta P_0P_1 ha equazioni [Coroll. 3.3.7 e Osserv. 3.3.6]

$$(8) \quad \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}$$

Ponendo allora $x_1 - x_0 = \Delta x$, $y_1 - y_0 = \Delta y$, $z_1 - z_0 = \Delta z$, $t_1 - t_0 = \Delta t$, le (8) possono scriversi

$$(9) \quad \frac{x - x_0}{\Delta x / \Delta t} = \frac{y - y_0}{\Delta y / \Delta t} = \frac{z - z_0}{\Delta z / \Delta t}$$

e passando al limite per $\Delta t \rightarrow 0$ (cioè $t_1 \rightarrow t_0$, cui corrisponde $P_1 \rightarrow P_0$) si ottiene

$$\frac{x - x_0}{x'(t_0)} = \frac{y - y_0}{y'(t_0)} = \frac{z - z_0}{z'(t_0)}$$

Queste sono le equazioni della tangente alla curva Γ in P_0 .

Nel piano se

$$\Gamma : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

è una curva e $P_0(x_0, y_0) \in \Gamma$, $x_0 = x(t_0)$, $y_0 = y(t_0)$, si ha, analogamente, che

$$\frac{x - x_0}{x'(t_0)} = \frac{y - y_0}{y'(t_0)}$$

sono le equazioni della tangente a Γ in P_0 . Se invece la curva piana è descritta dall'equazione cartesiana $f(x, y) = 0$, si dimostra facilmente che l'equazione cartesiana della retta tangente alla curva in un suo punto P_0 è

$$(10) \quad \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{P_0} (x - x_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_{P_0} (y - y_0) = 0$$

La formula precedente si estende al piano tangente a una superficie nello spazio.

Sia F una superficie. Si può provare che le tangenti in $P_0(x_0, y_0, z_0) \in F$ alle curve Γ contenute in F , passanti per P e dotate di retta tangente, appartengono ad un piano che si dice *piano tangente* ad F in P_0 . Se F è dato nella forma cartesiana $f(x, y, z) = 0$, l'equazione del piano tangente in $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in F$ è espressa da:

$$(11) \quad \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{P_0} (x - x_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_{P_0} (y - y_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)_{P_0} (z - z_0) = 0$$

Se invece F è dato nella forma parametrica

$$\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{cases}$$

e non sono tutti uguali a zero i minori di ordine 2 della *matrice jacobiana*

$$\begin{pmatrix} x_u(u_0, v_0) & y_u(u_0, v_0) & z_u(u_0, v_0) \\ x_v(u_0, v_0) & y_v(u_0, v_0) & z_v(u_0, v_0) \end{pmatrix}$$

avendo posto: $x_u = \frac{\partial x}{\partial u}$, $x_v = \frac{\partial x}{\partial v}$, $y_u = \frac{\partial y}{\partial u}$, ecc., si può dimostrare che il piano tangente nel punto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ alla superficie, dove $x_0 = x(u_0, v_0)$, $y_0 = y(u_0, v_0)$, $z_0 = z(u_0, v_0)$, ha equazione:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_u(u_0, v_0) & y_u(u_0, v_0) & z_u(u_0, v_0) \\ x_v(u_0, v_0) & y_v(u_0, v_0) & z_v(u_0, v_0) \end{vmatrix} = 0$$

Infine, se Γ è una curva dello spazio intersezione di due superfici $F_1: f(x, y, z) = 0$, $F_2: g(x, y, z) = 0$

$$\Gamma: \begin{cases} F_1: f(x, y, z) = 0 \\ F_2: g(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

e i piani (11) tangenti in $P_0 \in \Gamma$ a F_1 e F_2 non sono paralleli, la tangente a Γ in P_0 ha equazione

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{P_0} (x - x_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_{P_0} (y - y_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)_{P_0} (z - z_0) = 0 \\ \left(\frac{\partial g}{\partial x} \right)_{P_0} (x - x_0) + \left(\frac{\partial g}{\partial y} \right)_{P_0} (y - y_0) + \left(\frac{\partial g}{\partial z} \right)_{P_0} (z - z_0) = 0 \end{cases}$$

13.5 CONI. CILINDRI. PROIEZIONI PIANE DI UNA CURVA. SUPERFICI RIGATE

Un cono di vertice V è una superficie descritta da rette passanti per V , dette *generatrici* del cono.

Una curva Γ giacente sul cono e che incontra tutte le generatrici si dice *direttrice del cono*.

Un cono di vertice V può anche essere definito nel modo seguente: la superficie F è un cono di vertice V se insieme ad ogni suo punto P_0 essa contiene ogni punto P della retta VP_0 .

Esempio 13.5.1. Se l'equazione $f(x, y, z) = 0$ è tale che, quando $f(x_0, y_0, z_0) = 0$, anche $f(tx_0, ty_0, tz_0) = 0$ per ogni $t \in \mathbb{R}$, allora $F: f(x, y, z) = 0$ è un cono di vertice l'origine $O(0, 0, 0)$. Infatti se $P_0(x_0, y_0, z_0) \in \Gamma$, la retta OP_0 ha equazione

$$\begin{cases} x = x_0 t \\ y = y_0 t \\ z = z_0 t \end{cases}$$

e $f(x_0 t, y_0 t, z_0 t) = 0$ e quindi la retta OP_0 giace su F . In particolare una equazione $f(x, y, z) = 0$ con $f(x, y, z)$ funzione omogenea di

grado n ($n \in \mathbb{R}$) cioè tale che $f(tx, ty, tz) = t^n f(x, y, z)$, per ogni t , rappresenta un cono. Le più semplici funzioni omogenee $f(x, y, z)$ di grado n sono i *polinomi omogenei* di grado n (cioè i cui monomi hanno tutti grado n).

Se $V(x_0, y_0, z_0)$ è il vertice del cono e la direttrice Γ è una curva data mediante equazioni parametriche del tipo (5) che conviene scrivere nella forma:

$$(12) \quad x = \xi(t), \quad y = \eta(t), \quad z = \zeta(t)$$

la retta VP passante per V e $P(\xi(t), \eta(t), \zeta(t))$ ha equazione parametrica

$$(13) \quad \begin{cases} x = x_0 + (\xi(t) - x_0)u \\ y = y_0 + (\eta(t) - y_0)u \\ z = z_0 + (\zeta(t) - z_0)u \end{cases}$$

che quindi sono le *equazioni parametriche del cono F di vertice $V = (x_0, y_0, z_0)$ e contenente Γ* . L'intersezione Γ' del cono F col piano

$$(14) \quad \pi: \quad ax + by + cz + d = 0$$

si chiama *proiezione di Γ da V su π* .

Sostituendo le (13) in (14) si ricava u in funzione di t :

$$u = -\frac{ax_0 + by_0 + cz_0 + d}{a(\xi(t) - x_0) + b(\eta(t) - y_0) + c(\zeta(t) - z_0)}$$

e allora, sostituendo in (13) l'ultima espressione trovata per u si ottiene una *rappresentazione parametrica* di Γ' .

Se la direttrice Γ , di un cono F di vertice $V(x_0, y_0, z_0)$, è data in forma cartesiana

$$\Gamma: \begin{cases} f(x, y, z) = 0 \\ g(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

l'equazione cartesiana di F si può anche ricavare nel seguente modo.

Se $A(\lambda, \mu, \nu)$ è un punto generico di Γ , la retta VA , giacente sul cono, ha equazioni:

$$(15) \quad \frac{x - x_0}{\lambda - x_0} = \frac{y - y_0}{\mu - y_0} = \frac{z - z_0}{\nu - z_0}$$

Per ottenere l'equazione cartesiana di F si possono *eliminare* (non sempre è facile) λ, μ, ν dalle (15) e dalle due equazioni

$$\begin{cases} f(\lambda, \mu, \nu) = 0 \\ g(\lambda, \mu, \nu) = 0 \end{cases}$$

che impongono che A appartenga a Γ .

Esempio 13.5.2. Se la curva piana

$$\Gamma: \begin{cases} f(x, y, z) = 0 \\ ax + by + cz + d = 0 \end{cases}$$

è una direttrice del cono F di vertice $V(x_0, y_0, z_0)$ (dove V non appartiene al piano $\pi: ax + by + cz + d = 0$), l'equazione cartesiana di F si ottiene nel seguente modo. Il sistema

$$\begin{cases} \frac{x - x_0}{\lambda - x_0} = \frac{y - y_0}{\mu - y_0} = \frac{z - z_0}{\nu - z_0} \\ a\lambda + b\mu + c\nu + d = 0 \end{cases}$$

è un sistema di tre equazioni in tre incognite λ, μ, ν . Tale sistema è di Cramer (come si verifica facilmente) e quindi si possono ricavare λ, μ, ν in funzione di x, y, z che sostituite in $f(\lambda, \mu, \nu) = 0$ danno l'equazione cartesiana del cono.

Si dice *cilindro* una superficie descritta da rette, dette *generatrici*, parallele a un dato vettore $\mathbf{v} = (l, m, n)$. Una *direttrice* del cilindro è una curva Γ che incontra tutte le generatrici del cilindro.

Un cilindro può anche essere definito come segue:

una superficie F è un cilindro con le generatrici parallele al vettore $\mathbf{v} = (l, m, n)$ se, insieme ad ogni suo punto P_0 , essa contiene ogni punto P della retta per P_0 e parallela a $\mathbf{v}$.

Se Γ è una curva data mediante le equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = \xi(t) \\ y = \eta(t) \\ z = \zeta(t) \end{cases}$$

le equazioni della retta parallela a (l, m, n) e passante per $P(\xi(t), \eta(t), \zeta(t))$ sono

$$\begin{cases} x = \xi(t) + lu \\ y = \eta(t) + mu \\ z = \zeta(t) + nu \end{cases}$$

che quindi sono anche le equazioni parametriche del cilindro passante per Γ e avente le generatrici parallele a (l, m, n) .

L'intersezione Γ' del piano π di equazione $ax + by + cz + d = 0$ col cilindro F passante per Γ e avente le generatrici perpendicolari a π si chiama *proiezione ortogonale di Γ su π* .

Le equazioni parametriche di tale cilindro F sono

$$(16) \quad \begin{cases} x = \xi(t) + au \\ y = \eta(t) + bu \\ z = \zeta(t) + cu \end{cases}$$

e quindi i punti di Γ' soddisfano alla condizione

$$a(\xi(t) + au) + b(\eta(t) + bu) + c(\zeta(t) + cu) = 0$$

da cui si ricava: $u = -\frac{a\xi(t) + b\eta(t) + c\zeta(t)}{a^2 + b^2 + c^2}$.

Sostituendo in (16) tale espressione di u in funzione di t si ottiene una *rappresentazione parametrica di Γ'* .

Se la direttrice Γ di un cilindro F , di generatrici parallele a (l, m, n) , è data in forma cartesiana

$$\Gamma: \begin{cases} f(x, y, z) = 0 \\ g(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

l'equazione di F si ottiene nel seguente modo. Se $A(\lambda, \mu, \nu)$ è un punto generico di Γ , la generatrice di F passante per A e parallela a (l, m, n) è la retta

$$(17) \quad \frac{x - \lambda}{l} = \frac{y - \mu}{m} = \frac{z - \nu}{n}$$

eliminando λ, μ, ν dal sistema formato dalle (17) e dalle equazioni

$$\begin{cases} f(\lambda, \mu, \nu) = 0 \\ g(\lambda, \mu, \nu) = 0 \end{cases}$$

si ottiene l'equazione cartesiana del cilindro.

Esempio 13.5.3. Sia

$$\Gamma: \begin{cases} f(x, y, z) = 0 \\ ax + by + cz + d = 0 \end{cases}$$

una curva piana. L'equazione cartesiana del cilindro F , avente direttrice Γ e generatrici parallele a (l, m, n) (dove $al + bm + cn \neq 0$), si ottiene come segue. Il sistema

$$\begin{cases} a\lambda + b\mu + c\nu + d = 0 \\ \frac{x - \lambda}{l} = \frac{y - \mu}{m} = \frac{z - \nu}{n} \end{cases}$$

è un sistema di Cramer (come si verifica facilmente) di tre equazioni nelle tre incognite λ, μ, ν che quindi si possono ottenere in funzione di x, y, z . Sostituendo λ, μ, ν in $f(\lambda, \mu, \nu) = 0$, si ottiene l'equazione cartesiana di F .

La superficie F dello spazio data da un'equazione $f(x, y) = 0$ è un cilindro con le generatrici parallele all'asse z e direttrice la curva piana

$$\Gamma: \begin{cases} f(x, y) = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Infatti, se $P_0(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ è un punto di F , il punto $P(\bar{x}, \bar{y}, z)$ appartiene ad F per ogni $z \in \mathbb{R}$, onde appartiene alla retta

$$\begin{cases} x = \bar{x} \\ y = \bar{y} \end{cases}$$

per P_0 e parallela all'asse z .

Analogamente $f(x, z) = 0$ (risp. $f(y, z) = 0$) è un cilindro con le generatrici parallele all'asse y (risp. x).

Data ora la curva:

$$\Gamma: \begin{cases} f(x, y, z) = 0 \\ ax + by + cz + d = 0 \end{cases} \quad c \neq 0$$

eliminando z dalle equazioni di Γ , si ottiene l'equazione:

$$(18) \quad f\left(x, y, \frac{-d - ax - by}{c}\right) = 0$$

che è l'equazione del cilindro F passante per Γ e avente le generatrici parallele all'asse z ; si ha quindi che le equazioni:

$$f\left(x, y, \frac{-d - ax - by}{c}\right) = z = 0$$

rappresentano la *proiezione ortogonale* di Γ sul piano xy .

Analoghe considerazioni possono farsi eliminando x o y in luogo di z .

Si dice che una superficie F è *rigata* se è descritta da rette r_t dette generatrici di F , al variare del parametro $t \in \mathbb{R}$. I coni e i cilindri sono particolari superfici rigate. Una curva Γ di F dicesi una *direttrice* di F se per ogni punto di Γ passa una ed una sola generatrice.

Se la curva

$$\Gamma: \begin{cases} x = \xi(t) \\ y = \eta(t) \\ z = \zeta(t) \end{cases}$$

è una direttrice di F , fissato un valore di t e quindi un punto P di Γ , è allora individuata la generatrice di F passante per P , i cui numeri direttori l, m, n sono quindi funzioni di t . Dunque si può rappresentare F mediante le equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = \xi(t) + u \cdot l(t) \\ y = \eta(t) + u \cdot m(t) \\ z = \zeta(t) + u \cdot n(t) \end{cases}$$

Risulta da ciò che se una superficie F è data mediante le equazioni parametriche (4) e queste sono lineari in uno dei due parametri u, v , allora F è una rigata.

Se ξ, η e ζ sono costanti, la rigata è un cono; se invece l, m, n sono costanti, la rigata è un cilindro.

Non tutte le rigate sono però coni o cilindri.

Infatti l'*iperboloide ellittico* F :

$$(19) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

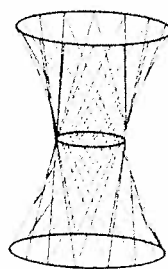


Figura 13.2

è una *superficie rigata* [Figura 13.2], come si ottiene dalle seguenti considerazioni.

Scritta la (19) nella forma

$$(20) \quad \left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) \left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) = \left(1 + \frac{y}{b}\right) \left(1 - \frac{y}{b}\right)$$

si vede subito che, per ogni coppia (λ, μ) di numeri reali non entrambi nulli le rette

$$(21) \quad \begin{cases} \lambda \left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = \mu \left(1 + \frac{y}{b}\right) \\ \mu \left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) = \lambda \left(1 - \frac{y}{b}\right) \end{cases}$$

$$(22) \quad \begin{cases} \lambda \left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = \mu \left(1 - \frac{y}{b}\right) \\ \mu \left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) = \lambda \left(1 + \frac{y}{b}\right) \end{cases}$$

appartengono ad F .

I due sistemi di rette (21) e (22), ottenuti al variare di λ, μ sono detti *schiere* di rette giacenti su F . Si vede facilmente che due rette della schiera (21) (risp. (22)) sono sghembe, mentre per ogni punto della quadrica passa una ed una sola retta della schiera (21).

In modo del tutto analogo si vede che anche il *paraboloido iperbolico*

$$(23) \quad \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) = 2z$$

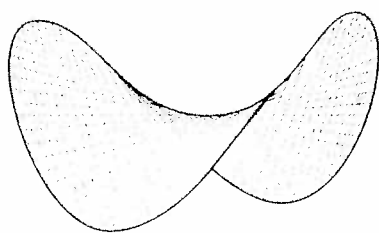


Figura 13.3

è una *superficie rigata* [Figura 13.3] con le stesse caratteristiche (due sistemi di rette, ecc.) dell'iperboloide ellittico.

13.6 SUPERFICI DI ROTAZIONE

La superficie F dello spazio ottenuta facendo ruotare una curva Γ attorno a una fissata retta r si dice una *superficie di rotazione*; la retta r si dice *asse di rotazione*.

Una superficie di rotazione F è unione di circonferenze, dette *meridiani* giacenti su piani ortogonali all'asse di rotazione. Le intersezioni di F con piani passanti per l'asse di rotazione si chiamano *paralleli*.

Fissato un punto $Q = (\alpha, \beta, \gamma)$ di Γ , come equazioni del meridiano passante per Q si può prendere l'equazione di una sfera avente centro in un punto $C = (a, b, c)$ di r con raggio $d(C, Q)$ e l'equazione del piano passante per Q e ortogonale a r . Se Γ è rappresentata nella forma cartesiana (6) e un vettore direzionale di r è (l, m, n) , l'equazione cartesiana della superficie di rotazione può quindi ottenersi eliminando α, β, γ dalle relazioni:

$l(x - \alpha) + m(y - \beta) + n(z - \gamma) = 0$, equazione del piano per $Q = (\alpha, \beta, \gamma)$ ortogonale a r ;

$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = (\alpha - a)^2 + (\beta - b)^2 + (\gamma - c)^2$, equazione della sfera per Q di centro C ;

$f(\alpha, \beta, \gamma) = 0, g(\alpha, \beta, \gamma) = 0$, vincoli di appartenenza di $Q = (\alpha, \beta, \gamma)$ alla curva Γ .

Se Γ è descritta dalle equazioni parametriche (5), il vincolo di appartenenza di Q a Γ è espresso dalle condizioni $\alpha = \xi(t)$, $\beta = \eta(t)$, $\gamma(t)$ e allora occorre eliminare α, β, γ, t dal complesso delle relazioni così ottenute.

Esempio 13.6.1. La superficie F ottenuta per rotazione della retta Γ di equazioni $x + z = y - 1 = 0$ attorno all'asse z si ottiene eliminando α, β, γ dalle tre relazioni:

$z - \gamma = 0$ (equazione del piano passante per $Q = (\alpha, \beta, \gamma)$ e ortogonale all'asse z);

$x^2 + y^2 + z^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$ (equazione della sfera di centro $O = (0, 0, 0)$ e raggio $d(O, Q)$);

$\alpha + \gamma = 0, \beta - 1 = 0$ (vincoli di appartenenza di $Q = (\alpha, \beta, \gamma)$ alla retta Γ).

Si ottiene per F l'equazione dell'iperboloide a una falda $x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 0$.