

SPAZI AFFINI

1. DEFINIZIONI

Dato uno spazio vettoriale V su un campo K . Diamo la seguente:

Definizione 1.1. Uno spazio affine sul campo K è una coppia $(\mathbb{A}; f)$; ove \mathbb{A} è un insieme, V uno spazio vettoriale su K e $f : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A} \times V$ verifica le seguenti proprietà:
(AF1) per ogni punto P di \mathbb{A} e per ogni vettore $v \in V$ esiste un unico punto Q di \mathbb{A} tale che $f(P; Q) = v$;
(AF2) per ogni terna $(P; Q; S)$ di punti di \mathbb{A} si ha:

$$f(P; Q) + f(Q; S) = f(P; S)$$

Se V ha dimensione finita n si dice che lo spazio affine ha dimensione n

Notazione 1. Lo spazio affine si indicherà semplicemente con \mathbb{A} o \mathbb{A}^n se ha dimensione n

I vettori $f(P, Q)$ si denoteranno con $Q - P$.

A lezione abbiamo dato la definizione di spazio affine con origine fissata P . In virtù della (AF1), fissato $P \in \mathbb{A}$ possiamo definire infatti un' applicazione: $g_P : \mathbb{A} \times V \rightarrow \mathbb{A}$ nel modo seguente: data una coppia $(Q; v) \in \mathbb{A} \times V$, l'immagine $g(Q; v)$ è l'unico punto $Q \in \mathbb{A}$ tale che $Q - P = v$.

Notazione 2. Si denota $Q = P + v$.

Approfondimento facoltativo 1. Fissato $O \in \mathbb{A}$ si ha che $g_O : v \in V \rightarrow O + v \in \mathbb{A}$ è una biezione che induce su \mathbb{A} una struttura di K -spazio vettoriale isomorfo a V . Si noti che la struttura indotta dipende da O , infatti il suo vettore nullo è O stesso.

Lo spazio vettoriale V viene chiamato lo spazio vettoriale dei vettori liberi di \mathbb{A} . Gli spazi affini di dimensione 1 (risp. 2) si dicono rette (risp. piani) affini.

Esempio 1.2. Lo spazio ane numerico su un campo Sia $\mathbb{A} = K^n$. Tale spazio ane si dice spazio ane numerico di dimensione n sul campo K e si denota col simbolo $\mathbb{A}^n(K)$ o semplicemente col simbolo \mathbb{A}^n se non vi è equivoco nella considerazione del campo K . Gli elementi di \mathbb{A}^n , che si dicono vettori numerici di dimensione n su K , verranno pensati come vettori riga ovvero come vettori colonna. Vedremo che a meno di affinità (Definizione ??) gli spazi ani numerici forniscono un modello per tutti gli spazi ani.

1.1. Prime proprietà.

Proposition 1.3. Sia \mathbb{A} uno spazio ane sul campo K . Si ha:

- (1) per ogni punto $P \in \mathbb{A}$ si ha $P - P = \mathbf{0}$;
- (2) per ogni coppia $(P; Q)$ di punti di \mathbb{A} si ha $Q - P = -(P - Q)$.
- (3) per ogni $P \in \mathbb{A}$ si ha $P + \mathbf{0} = P$;

2. RIFERIMENTI

Consideriamo uno spazio affine \mathbb{A} di dimensione (finita) n , un suo punto fissato $O \in \mathbb{A}$ e

Definizione 2.1. Una coppia $\mathcal{R} = (O; \mathcal{B})$, ove $O \in \mathbb{A}$ e $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ è una base ordinata di V si dice un riferimento (cartesiano) ane di \mathbb{A} . Il punto O si dice origine del riferimento.

Per ogni punto $P \in \mathbb{A}$ l' n -pla $(x_1; \dots; x_n) \in K^n$ delle componenti di $P - O$ rispetto alla base \mathcal{B} si dice la n -pla delle coordinate (cartesiane) di P nel riferimento \mathcal{R} .

Esercizio 1. Se P e Q sono punti di \mathbb{A} aventi in \mathcal{R} coordinate p e q , allora il vettore $P - Q$ ha in \mathcal{B} componenti $p - q$.

L'introduzione di un riferimento cartesiano nello spazio (risp., nel piano, nella retta) della geometria euclidea coincide con l'introduzione di un sistema di coordinate cartesiane usuale.

Esempio 2.2. In \mathbb{A}^n il riferimento $\mathcal{R} = (O; (e_1; \dots; e_n))$ si dice riferimento naturale. Un punto $x = (x_1; \dots; x_n)$ ha, in tale riferimento, proprio il vettore x come n -pla delle coordinate.

3. SOTTOSPAZI AFFINI

Sia \mathbb{A} uno spazio affine sul campo K .

Definizione 3.1. Un sottospazio (affine) di \mathbb{A} è un sottoinsieme S di \mathbb{A} tale che esistono un punto $P \in S$ e un sottospazio vettoriale W di V tali che

$$S = P + v \in \mathbb{A} | v \in W.$$

Il sottospazio S si denota anche col simbolo $P + W$.

Se V ha dimensione finita e $\dim W = m$ si dice che $P + W$ ha dimensione m .

Se \mathbb{A} ha dimensione finita e S è un suo sottospazio lintero $\text{codim} S = \dim \mathbb{A} - \dim S$ si dice codimensione di S in \mathbb{A} . I sottospazi di codimensione 1 si dicono iperpiani di \mathbb{A} .

I sottospazi di dimensione 1 (risp. 2) si dicono rette (risp. piani) di \mathbb{A} .

Diciamo che S passa per P e che il sottospazio W di V è la giacitura di S . Denotiamo la giacitura di S anche con il simbolo $V(S)$.

I vettori di $V(S)$ vengono chiamati i vettori liberi paralleli a S . In altri termini

$$P + W = \{Q \in \mathbb{A} | Q - P \in W\}.$$

Esempio 3.2. In particolare ogni punto P di \mathbb{A} è un sottospazio di dimensione 0, poiche coincide con $P + \{0\}$;

Astesso è un sottospazio poiche coincide con $P + V$ con P punto qualunque di \mathbb{A} . Ogni sottospazio di \mathbb{A} diverso da \mathbb{A} si dice un sottospazio proprio.

Definizione 3.3. Due sottospazi S ed S' si dicono paralleli se la giacitura dell'uno contiene quella dell'altro o viceversa.

In particolare ci'occorre che S contiene S' (o viceversa); in tal caso S e S' si dicono impropriamente paralleli, mentre si dicono propriamente paralleli se sono paralleli ma non accade che uno dei due contenga laltro.

3.1. Approfondimento facoltativo: sistemi lineari e sottospazi affini. Sia dato un sistema lineare *compatibile* di p equazioni in n incognite, scritto in forma vettoriale come $Ax = b$ con $A \in M_{p,n}(K)$, x vettore colonna di indeterminate e b vettore colonna dei termini noti. L'insieme $Sol(A|b) = \{x \in K^n \mid Ax = b\}$ delle sue soluzioni è un sottospazio affine di \mathbb{A}^n , la cui giacitura è il sottospazio vettoriale $Sol(A)$ di K^n del sistema omogeneo associato. Ci' segue dal fatto che $Sol(A|b) = \xi_0 + Sol(A)$ se ξ_0 è una soluzione di $Ax = b$. Se $r = rg(A)$, allora la dimensione del sottospazio affine vale $n - r$.

In particolare, possiamo considerare l'insieme dei punti le cui coordinate sono soluzione di una singola equazione non nulla $a_1x_1 + \dots + a_nx_n + b = 0$ con $(a_1, \dots, a_n) \neq 0$. Tale sottospazio affine ha dimensione $n - 1$ e viene detto iperpiano.

3.2. intersezione e congiungente. L'intersezione di due sottospazi affini puo' essere vuota.

Se non e' vuota e' ancora un sottospazio:

Proposition 3.4. *Se $S = P + W$ ed $S' = P' + W'$ sono sottospazi affini tali che $S \cap S' \neq \emptyset$, allora $S \cap S'$ è il sottospazio affine $P + U$ dove P è un qualsiasi punto di $S \cap S'$ e $U = W \cap W'$ è l'intersezione delle giaciture.*

Proof. Se $P \in S \cap S'$, possiamo scrivere $S = P + W$ e $S' = P + W'$. Si ha

$$Q \in S \cap S' \Leftrightarrow Q - P \in W \cap W' \Leftrightarrow Q \in P + W \cap W'$$

□

Definizione 3.5. Dati due sottospazi affini S ed S' si dice spazio congiungente e si indica $S \vee S'$ il piu' piccolo (rispetto all'inclusione) sottospazio affine conenente S ed S' ovvero l'intersezione di tutti i sottospazi che li contengono.

Si dimostra che

Proposition 3.6. *Siano S, S' due sottospazi affini.*

- (1) *Se $S \cap S' \neq \emptyset$, il sottospazio $S \vee S'$ è il sottospazio passante per un punto $P \in S \cap S'$ e avente per giacitura lo spazio vettoriale somma delle giaciture di S e S' .*
- (2) *Siano $P \in S$ e $Q \in S'$. Il sottospazio $S \vee S'$ è il sottospazio passante per P e avente per giacitura lo spazio vettoriale somma delle giaciture di S e S' e del sottospazio generato da $Q - P$.*

Theorem 3.7. Regola di Grassmann

- (1) $\dim S \vee S' \leq \dim S + \dim S' + 1$
- (2) *Se $S \cap S' \neq \emptyset$, allora $\dim S \vee S' = \dim S + \dim S' - \dim S \cap S'$.*

Definizione 3.8. Due sottospazi S e S' non paralleli si dicono sghembi se $S \cap S' = \emptyset$, mentre si dicono incidenti (lungo $S \cap S'$) se $S \cap S' \neq \emptyset$.

3.3. Rette di uno spazio affine. Sia \mathbb{A} uno spazio affine di dimensione n . Una retta r di \mathbb{A} è della forma $P + W$ per un punto $P \in \mathbb{A}$ e un sottospazio W di dimensione 1 di V . La retta r è allora individuata da un suo punto P_0 ed un suo vettore direttore, ovvero da un qualsiasi generatore (non nullo) w di W . Infatti ogni altro punto P di r è della forma $P = P_0 + tw$ per un opportuno t in K . Se (x_1^0, \dots, x_n^0) sono le coordinate di P_0 in un fissato riferimento affine e (l_1, \dots, l_n)

le componenti di w nella base associata al medesimo riferimento, le coordinate (x_1, \dots, x_n) di un generico punto $P \in r$ saranno

$$\begin{cases} x_1 = x_1^0 + tl_1 \\ x_2 = x_2^0 + tl_2 \\ \dots \\ x_n = x_n^0 + tl_n \end{cases}$$

al variare di t in K . Chiaramente P_0 si riottiene dando il valore 0 al parametro t . Supponiamo assegnati un riferimento \mathcal{R} e una retta r . Si dicono numeri direttori di r in \mathcal{R} le componenti di un qualunque vettore che genera la giacitura di r . I numeri direttori di una retta non sono univocamente determinati, ma differiscono tra loro per un fattore di proporzionalità non nulla. Se $P(p)$ e $Q(q)$ sono punti distinti di r , una n -pla di numeri direttori di r è data dalle componenti di $q - p$.