

Analisi matematica I

Esempi di domande per l'orale

1. Assioma di completezza: enunciato. In quali punti del corso è stato utilizzato?
2. Disuguaglianza triangolare: enunciato e dimostrazione. Disuguaglianza per il modulo della differenza dei moduli: enunciato e dimostrazione.
3. Massimo e minimo di un insieme di numeri reali: definizione, dimostrazione dell'unicità. Definizione di maggiorante, minorante, insieme limitato, limitato superiormente, limitato inferiormente.
4. Che relazione c'è tra i sottoinsiemi di \mathbb{R} che sono limitati e quelli che sono contenuti in un qualche intervallo $[-M, M]$? Enunciare la proposizione e dimostrarla.
5. Teorema di esistenza del sup e dell'inf: enunciato e dimostrazione.
6. Caratterizzazione del sup e dell'inf: enunciato e dimostrazione.
7. Che relazione c'è tra il minimo e l'inf di un insieme? Enunciare la proposizione e dimostrarla.
8. È vero o falso che $|ab| \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$ per ogni $a, b \in \mathbb{R}$? Se è vero, darne una dimostrazione; se è falso, esibire una coppia (a, b) che ne mostri la falsità. Stessa domanda per la disuguaglianza $|ab| \leq \frac{1}{3}(a^2 + b^2)$.
9. Proprietà di Archimede: enunciato e dimostrazione. Corollario: \mathbb{N} è illimitato superiormente: dimostrazione.
10. Densità di \mathbb{Q} in \mathbb{R} : enunciato e dimostrazione.
11. Proposizione: non esiste alcun numero razionale $c \in \mathbb{Q}$ tale che $c^2 = 2$. Dimostrazione.
12. In \mathbb{Q} non vale l'assioma di completezza: dimostrazione.
13. Principio di induzione: enunciato e dimostrazione.
14. Disuguaglianza di Bernoulli: enunciato e dimostrazione.
15. Definizione di funzione crescente, decrescente, strettamente crescente, strettamente decrescente, monotona, strettamente monotona, costante, pari, dispari, periodica.
16. Definizione e grafico delle funzioni segno, parte intera, parte frazionaria.
17. Definizione di funzione iniettiva, suriettiva, biiettiva. Definizione di immagine e anti-immagine di un punto e di un insieme.
18. Definizione e proprietà elementari delle funzioni seno iperbolico e coseno iperbolico.
19. Definizione e proprietà del coniugio e del modulo dei numeri complessi (con dimostrazione di almeno una proprietà). Formula dell'inverso di un numero complesso, con dimostrazione.
20. Rappresentazione polare dei numeri complessi, definizione dell'esponenziale complesso, formule dell'inverso e del coniugato in coordinate polari.
21. Usando la rappresentazione polare, costruire le 8 radici complesse dell'equazione $z^8 = 1$.
22. Definizione di successione convergente ad un numero reale, divergente a $+\infty$, divergente a $-\infty$. Dare un esempio di successione che non ha limite, con dimostrazione della non esistenza del limite.

23. Unicità del limite di una successione: dimostrazione. Definizione di successione costante, definitivamente costante. Limite di una successione definitivamente costante: con dimostrazione.
24. Definizione di successione limitata. Una successione limitata può non avere limite? Una successione che ha limite può essere non limitata? Una successione convergente è necessariamente limitata? Giustificare le risposte (cioè dimostrazione).
25. Proposizione (“3 scritture equivalenti”): $a_n \rightarrow c$ se e solo se $(a_n - c) \rightarrow 0$ se e solo se $|a_n - c| \rightarrow 0$. Dimostrazione. Proposizione (“limite dominato”): se $|a_n - c| \leq b_n$ definitivamente, e $b_n \rightarrow 0$, allora $a_n \rightarrow c$. Dimostrazione.
26. Limiti e moduli: se $a_n \rightarrow c$, allora $|a_n| \rightarrow |c|$? E viceversa? E se $c = 0$ cambia qualcosa? Scrivere con ordine le varie implicazioni e dimostrarle. Scrivere quali implicazioni sono false, e mostrarne la falsità tramite esempi.
27. Definizione di successione infinitesima. Limite del prodotto di una successione infinitesima per una limitata: enunciato e dimostrazione. Teorema della permanenza del segno per le successioni: enunciato e dimostrazione.
28. Cosa succede alle disuguaglianze quando si passa al limite di successione? Corollari del teorema della permanenza del segno per successioni: enunciato e dimostrazione.
29. Teorema dei carabinieri (per le successioni): enunciato e dimostrazione.
30. Teorema di confronto (per le successioni): enunciato e dimostrazione.
31. Limiti notevoli per il fattoriale: limite dei rapporti di $n^n, n!$ e a^n (per $a > 0$ fissato): enunciato e dimostrazione.
32. Definizione di successione crescente, strettamente crescente, decrescente, strettamente decrescente, monotona, strettamente monotona. Teorema sulle successioni monotone: enunciato e dimostrazione.
33. La successione che definisce il numero e : definizione, dimostrazione della convergenza.
34. Dato un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$, esiste una successione di suoi elementi che tende a $\sup(A)$, e un'altra che tende a $\inf(A)$: dimostrazione.
35. Definizione di punto di accumulazione di un insieme, di accumulazione da destra, da sinistra, definizione di punto isolato di un insieme. Teorema di caratterizzazione dei punti di accumulazione: enunciato e dimostrazione.
36. Limite di funzione: definizione tramite successioni, definizione “con ε, δ ”, e Teorema “ponte”: enunciato e dimostrazione (nel caso $\lim_{(x \rightarrow p)} f(x) = v$ con $p, v \in \mathbb{R}$).
37. Teorema della permanenza del segno (per limiti di funzione): enunciato e dimostrazione (nel caso $p \in \mathbb{R}, v \in (0, \infty)$). Dimostrare che non esiste il limite di $\sin(x)$ per $x \rightarrow +\infty$.
38. Teorema di Bolzano-Weierstrass: enunciato e dimostrazione.
39. Definizione di funzione continua in un punto, definizione di funzione continua in un insieme. La funzione $f(x) = \frac{1}{x}$ è continua nel suo dominio? E la funzione $f(x) = |x|$? Giustificare le risposte.
40. Teorema di Weierstrass: enunciato e dimostrazione. Definizione di punto di minimo/massimo e di valore minimo/massimo di una funzione su un insieme.
41. Teorema di esistenza degli zeri: enunciato e dimostrazione.
42. Teorema di esistenza dei valori intermedi: enunciato e dimostrazione.
43. Definizione di funzione uniformemente continua. Teorema di Cantor di uniforme continuità: enunciato e dimostrazione.

44. Definizione di funzione derivabile in un punto, in un intervallo (a, b) , di derivata, derivata destra/sinistra, funzione derivabile in un intervallo $[a, b]$. Continuità e derivabilità delle funzioni “radice quadrata” e “modulo”: enunciato e dimostrazione.
45. Definizione di punto interno e punto di frontiera di un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$. Definizione di punto di minimo/massimo globale (o assoluto) e locale (o relativo) di una funzione.
46. Teorema di Fermat: enunciato e dimostrazione.
47. Teorema di Rolle: enunciato e dimostrazione.
48. Teorema di Lagrange: enunciato e dimostrazione.
49. Teorema di Cauchy: enunciato e dimostrazione.
50. Consideriamo la funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 \sin(1/x)$ per $x \neq 0$, e $f(0) = 0$. È derivabile in ogni punto $x \in \mathbb{R}$? È di classe $C^1(\mathbb{R})$? Giustificare le risposte.
51. Applicando il Teorema di Lagrange, dimostrare che $|\tan(x) - \tan(y)| \geq |x - y|$ per ogni $x, y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.
52. Funzioni costanti e derivata nulla: enunciato e dimostrazione.
53. Criterio di monotonia per f dal segno di f' : enunciato e dimostrazione.
54. Equazione della retta tangente al grafico di una funzione. Definizione di funzione convessa/concava in un intervallo, definizione di punto di flesso. Criterio di convessità per f dal segno di f'' : solo enunciato.
55. Condizioni necessarie e sufficienti del secondo ordine per punti di massimo/minimo di una funzione: enunciato e dimostrazione.
56. Definizione di asintoto orizzontale, obliquo, verticale per una funzione. Asintoti obliqui e orizzontali: formule per calcolarli e dimostrazione.
57. Teorema di de l'Hôpital: solo enunciato. Scrivere un caso in cui si applica e un caso in cui non si applica.
58. Definizione di polinomio di Taylor di ordine n e resto n -esimo. Teorema della formula di Taylor con resto in forma di Peano: enunciato e dimostrazione.
59. Calcolo dei polinomi di Taylor per le funzioni e^x , $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\log(1+x)$, $(1+x)^\alpha$ (in particolare $\sqrt{1+x}$ e $\frac{1}{1+x}$) centrate in $p = 0$ di ordine $n = 4$.
60. Definizione di o piccolo. Regole per le operazioni con gli o piccolo: enunciato e dimostrazione.
61. Definizione di funzione integrabile in $[a, b]$, definizione di integrale $\int_a^b f(x) dx$ (costruzione completa, a partire da partizioni, somme integrali inferiori e superiori, ecc.)
62. Integrabilità delle funzioni continue: enunciato e dimostrazione.
63. Integrabilità delle funzioni monotone: enunciato e dimostrazione.
64. Definizione di media integrale, suo significato geometrico. Primo teorema della media integrale (per funzioni limitate integrabili): enunciato e dimostrazione. Secondo teorema della media integrale (per funzioni continue): enunciato e dimostrazione.
65. Definizione di primitiva di una funzione. Le primitive di una funzione differiscono tutte per una costante: enunciato e dimostrazione.
66. Definizione di funzione integrale di punto iniziale a . Teorema fondamentale del calcolo integrale: enunciato e dimostrazione.

67. Se F è primitiva di f , allora $\int_a^b f = F(b) - F(a)$: dimostrazione.
68. Integrali generalizzati significativi: definizione e calcolo di $\int_0^1 x^\alpha dx$, $\int_1^\infty x^\beta dx$ al variare dei parametri reali α, β .
69. Definizione di termine generale di una serie, somma parziale n -esima di una serie, somma di una serie, serie convergente, divergente, indeterminata, carattere di una serie.
70. Condizione necessaria per la convergenza di una serie: enunciato e dimostrazione.
71. Possibile carattere delle serie a termine generale definitivamente ≥ 0 : enunciato e dimostrazione.
72. Dimostrare che, se $a_n \rightarrow c > 0$, allora la serie $\sum_{n=1}^\infty a_n$ diverge a $+\infty$.
73. La serie geometrica di ragione p : enunciato e dimostrazione.
74. La serie armonica: usare il confronto con l'integrale di $\frac{1}{x}$, ricavare le disuguaglianze per la somma parziale, dedurre il carattere della serie (tutto con dimostrazione).
75. La serie armonica generalizzata: definizione, carattere, dimostrazione.
76. Criterio di confronto tra serie e integrale generalizzato: enunciato e dimostrazione.
77. Criteri per le serie: del confronto, degli infinitesimi e confronto asintotico, del rapporto, della radice, di Leibniz (tutti senza dimostrazione).
78. Definizione di serie assolutamente convergente. Teorema: la convergenza assoluta implica la convergenza: dimostrazione. Esempio di serie che converge ma non converge assolutamente.
79. Teorema della formula di Taylor con resto in forma integrale: enunciato e dimostrazione. Teorema della formula di Taylor con resto in forma di Lagrange: enunciato.
80. Teorema: condizione sufficiente per la sviluppabilità in serie di Taylor: enunciato e dimostrazione. Formula della serie di Taylor di $\sin(x)$, $\cos(x)$, e^x .