Sommario degli argomenti svolti nel corso
Analisi Matematica II

Giuliano Lazzaroni

20 luglio 2018

Testi consigliati:

- N. Fusco, P. Marcellini, C. Sbordone: Analisi Matematica due. Liguori
- N. Fusco, P. Marcellini, C. Sbordone: Elementi di Analisi Matematica due. Liguori
- P. Marcellini, C. Sbordone: Esercitazioni di Analisi Matematica Due (due parti). Zanichelli
- M. Bramanti, C.D. Pagani, S. Salsa: Analisi matematica 2. Zanichelli
- S. Salsa, A. Squellati: Esercizi di Analisi matematica 2. Zanichelli

Lezione 1: Serie di potenze. Definizione di raggio di convergenza. Teorema sulla convergenza assoluta nell'intervallo di convergenza. Criteri di convergenza: Teorema di d'Alembert, Teorema di Cauchy.
Esempi ed esercizi svolti: Determinare la convergenza (anche negli estremi dell'intervallo di convergenza) delle seguenti serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n\,, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\,, \quad \sum_{n=0}^{\infty} n!\,x^n\,, \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1}\,\frac{x^n}{n}\,, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}\,, \quad \sum_{n=0}^{\infty} 2^n \sin^n x\,.$$

Lezione 2: Successioni di funzioni. Convergenza puntuale e uniforme. Teorema sulla continuità del limite uniforme di funzioni continue.
Esempi ed esercizi svolti: Studiare la convergenza delle seguenti successioni di funzioni:

$$[0,1] \ni x \mapsto x^n\,, \quad \mathbb{R} \ni x \mapsto \frac{nx}{1+n|x|}\,, \quad \mathbb{R} \ni x \mapsto \sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}\,,$$

$$[-a,a] \ni x \mapsto \frac{n}{n+x} \quad (n > a > 0)\,, \quad \mathbb{R} \ni x \mapsto \chi_{(n,n+1)}(x)\,.$$

Lezione 3: Serie di funzioni. Convergenza puntuale, uniforme e totale. Teorema: la convergenza totale implica quella uniforme. Le serie di potenze convergono totalmente negli intervalli strettamente contenuti nell'intervallo di convergenza.
Esempi ed esercizi svolti: Studiare la convergenza delle seguenti serie di funzioni:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}\,, \quad \sum_{n=0}^{\infty} x^n\,, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+x^2}\,.$$

Lezione 4: Integrazione e derivazione di serie di funzioni. Teoremi di passaggio al limite sotto il segno di integrale e derivata per successioni di funzioni e conseguenze sulle serie. Serie di Taylor.
Esempi ed esercizi svolti:

- Verificare se sussiste il passaggio al limite sotto il segno di integrale per le seguenti funzioni:

$$\mathbb{R} \ni x \mapsto \tfrac{1}{n} f_1\big(\tfrac{x}{n}\big)\,, \quad f_1(x) = x+1 \text{ se } x \in (-1,0]\,,\ 1-x \text{ se } x \in (0,1)\,,\ 0 \text{ altrimenti;}$$

$$[0,1] \ni x \mapsto \frac{nx}{1+n^2x^2}\,;$$

$$[0,1] \ni x \mapsto 2^n f_0(2^n x)\,, \quad f_0(x) = 4x \text{ se } x \in [0,\tfrac{1}{2}]\,,\ 4(1-x) \text{ se } x \in (\tfrac{1}{2},1]\,,\ 0 \text{ altrimenti.}$$

- Verificare se sussiste il passaggio al limite sotto il segno di derivata per $x \mapsto \frac{\sin nx}{n}$.
- Calcolare $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$ per $x \in [-a,a]$, $0 < a < 1$.
- Verificare la sviluppabilità di e^x, $\sin x$, $\cos x$, e^{-2x} attorno a 0 e di $\frac{1}{x}$ attorno a 1.

Lezione 5: Equazioni differenziali a variabili separabili. Equazioni autonome, tempo di esistenza. Teorema di esistenza e unicità per equazioni a variabili separabili con condizioni iniziali (senza la dimostrazione dell'unicità).
Esempi ed esercizi svolti: Trovare le soluzioni (specificando gli intervalli di definizione) di:

$$y' = ky\,, \quad y' = f(t)\,, \quad y' = y^2 \text{ con } y(0) = y_0\,, \quad y' = \sqrt{y} \text{ con } y(0) = 0\,, \quad y' = ay(1-by)\,.$$

Lezione 6: Equazioni lineari del primo ordine. Integrale generale delle equazioni non omogenee e delle omogenee associate. Metodo di variazione della costante. Esistenza e unicità per il problema di Cauchy. Esempio: equazione lineare a coefficienti costanti.

Lezione 7: Esercizi.

- Risolvere le seguenti equazioni differenziali con le sostituzioni suggerite, discutendo gli intervalli di esistenza:

$$y\,y' = y^2 - t \text{ (porre } v = y^2\text{)}; \quad y' = (x+y)^2 \text{ (porre } z = x+y\text{)}; \quad y' = \frac{x^2+y^2}{xy} \text{ (porre } y = xz\text{)}.$$

- Risolvere $y' = xy$, $y(0) = 1$ con il metodo di integrazione per serie.

Lezione 8: Funzioni di più variabili. Nozioni basilari di topologia in $\mathbb{R}^n$. Limiti e continuità per funzioni scalari o vettoriali definite su $\mathbb{R}^n$.
Esempi ed esercizi svolti: Studiare l'esistenza del limite in $(0,0)$ delle seguenti funzioni:

$$\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\,, \quad \frac{x^2}{x^2+y^2}\,, \quad xy\,, \quad \frac{xy}{x^2+y^2}\,, \quad \frac{x^2y}{x^4+y^2}\,, \quad \frac{\sin(x-2y)}{x-y}\,, \quad \frac{\sin(x-y)}{x-y}\,.$$

Lezione 9: Derivazione in $\mathbb{R}^n$. Derivate parziali e direzionali per funzioni scalari di $\mathbb{R}^n$.
Esempi ed esercizi svolti: Calcolare derivate parziali e direzionali delle seguenti funzioni:

$$x^2+y^2\,, \quad \frac{xy}{x^2+y^2}\,, \quad \frac{x^2y}{x^4+y^2}\,.$$

Lezione 10: Differenziabilità. Approssimazione lineare. Differenziabilità. Differenziale come applicazione lineare. La differenziabilità implica la continuità. Relazione tra differenziale e derivate direzionali. Teorema del Differenziale (senza dimostrazione).
Esercizio svolto: Discutere la differenziabilità di $f(x,y) = |xy|^\alpha$ su $\mathbb{R}^2$, al variare di $\alpha > 0$. (La soluzione dettagliata è stata anche pubblicata sulla pagina docente).

Lezione 11: Matrice jacobiana. Differenziabilità di funzioni vettoriali. Matrice jacobiana. Gradienti delle funzioni composte (senza dimostrazione).
Esercizi svolti: Discutere la differenziabilità delle seguenti funzioni, estese a 0 in $(0,0)$:

$$\frac{x^3}{x^2+y^2}\,, \quad \frac{x^3 y}{x^4+y^2}\,.$$

Lezione 12: Derivate seconde. Derivate parziali seconde (solo per funzioni scalari). Teorema di Schwarz (senza dimostrazione). Matrice hessiana. Calcolo della derivata seconda lungo una direzione assegnata. Formula di Taylor al secondo ordine con resto nella forma di Peano (senza dimostrazione).
Esercizi di riepilogo (pubblicati sulla pagina docente).

Lezioni 13 e 15: Massimi e minimi. Condizioni necessarie e sufficienti, del primo e secondo ordine, per punti di estremo relativo. Punti di sella. Matrici (semi)-definite e indefinite. Criterio di Sylvester per la definitezza di una matrice (con i minori principali). Massimi e minimi assoluti.
Esercizi svolti: Trovare i punti di estremo relativo delle seguenti funzioni:

$$x^4+y^3-4x^2-3y^2 \text{ su } \mathbb{R}^2\,, \quad -x^2+y^2+z^2 \text{ su } \mathbb{R}^3\,, \quad x^4+y^4-2(x-y)^2+2 \text{ su } \mathbb{R}^2\,.$$

Trovare i punti di estremo assoluto di $(x,y) \mapsto x^2+y^2-2x^3$ in $\{(x,y)\colon x^2+y^2 \le 1\}$.

Lezione 14: Prova intercorso. *Testi e soluzioni sulla pagina docente.*

Lezione 16: Integrali doppi. Domini normali. Integrale di una funzione continua di due variabili su un dominio decomponibile in domini normali, definito tramite le formule di riduzione. Baricentro, Teorema di Guldino (senza dimostrazione).
Esercizi svolti:

- Calcolare $\iint_D xy\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, dove $D = [0,1]^2 \cap \{(x,y)\colon x \ge y\}$.
- Calcolare il baricentro di $\{(x,y)\colon x^2+y^2 \le 1\,,\ x,y \ge 0\}$ e il volume della sfera in $\mathbb{R}^3$.

Lezione 17: Cambio delle variabili di integrazione. Determinante jacobiano di una trasformazione di coordinate. Teorema di cambiamento di variabili negli integrali doppi (senza dimostrazione). Coordinate polari.
Esempi ed esercizi svolti:

- Posto $(x,y) = \Phi(u,v) = (au+bv, cu+dv)$, calcolare l'area di $\Phi(Q)$, dove $Q = [0,1]^2$.
- Calcolare $\iint_D xy\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, dove $D = \{(x,y)\colon x^2+y^2 \le 1\,,\ x,y \ge 0\}$.
- Calcolare il baricentro di $\{(x,y)\colon x^2+y^2 \le 1\,,\ x,y \ge 0\}$ usando le coordinate polari.

Lezione 18: Ancora sugli integrali multipli. Integrali impropri (cenno). Integrali tripli (cenno). Coordinate sferiche e cilindriche.
Esempi ed esercizi svolti:

- Determinare i valori del parametro $\alpha > 0$ per cui $(x, y) \mapsto \frac{1}{|(x,y)|^\alpha}$ è integrabile in $B_1 = \{(x, y) \colon x^2 + y^2 \leq 1\}$ o in $\mathbb{R}^2 \setminus B_1$.
- Calcolare volume e baricentro del tetraedro di vertici $(0, 0, 0)$, $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$, $(0, 0, c)$.
- Calcolare il volume della regione sferica di raggio 1 compresa tra i meridiani 0 e α.
- Calcolare il volume della regione del cilindro di raggio 1 e altezza 1, con base un settore circolare di angolo α.
- Calcolare $\iint_D (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, dove D è il cerchio di raggio 1 centrato in $(1, 0)$.
- Calcolare $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, dove D è il cerchio di raggio 1 centrato in $(1, 0)$.
- Calcolare l'area di $\{(x, y) \colon x^2 \leq y \leq 2x^2\} \cap \{(x, y) \colon 1 \leq xy \leq 2\}$.

Lezione 19: Integrazione su curve. Curve nel piano: parametrizzazioni, sostegno, equazioni cartesiane implicite ed esplicite. Curve semplici, curve chiuse. Vettore tangente. Curve regolari. Calcolo della lunghezza di una poligonale. Lunghezza di una curva. Integrali di funzioni continue estesi a curve regolari.
Esempi ed esercizi svolti:

- Date le seguenti parametrizzazioni della circonferenza, scrivere i corrispondenti elementi di lunghezza e dire quando gli integrali estesi alle diverse curve danno lo stesso risultato:

$$(\cos t, \sin t)\,,\ t\in[0, 2\pi]\,, \quad (\cos 2t, \sin 2t)\,,\ t\in[0, \pi]\,, \quad (\cos t, \sin t)\,,\ t\in[0, 4\pi]\,, \quad (\cos t, -\sin t)\,,\ t\in[0, 2\pi]\,.$$

- Trovare equazioni implicite per le seguenti curve e disegnarne i supporti:

$$[0, 2\pi] \ni t \mapsto (\cos^2 t, \sin^2 t)\,, \quad [0, 2\pi] \ni t \mapsto (\cos^3 t, \sin^3 t)\,.$$

- Trovare lunghezza e baricentro dell'arco di asteroide $[0, \frac{\pi}{2}] \ni t \mapsto (\cos^3 t, \sin^3 t)$.
- Calcolare $\int_\gamma y\,\mathrm{d}s$, dove γ parametrizza il grafico di $f(x) = \sqrt{x}$ per $x \in [1, 2]$.

Lezione 20: Integrazione di forme differenziali. Forme differenziali lineari del primo ordine nel piano. Integrazione di forme su curve regolari orientate. Differenziale di una funzione del piano definito come forma; relazione con la regola di derivazione delle funzioni composte. Differenziale delle proiezioni. Forme esatte, primitive, insiemi connessi. Teorema di integrazione delle forme esatte. Cenno al Teorema di caratterizzazione delle forme esatte (senza dimostrazione). Forme chiuse. Le forme esatte sono chiuse. Aperti semplicemente connessi. Teorema sulle forme differenziali negli aperti semplicemente connessi del piano (senza dimostrazione).
Esempi ed esercizi svolti:

- Sia γ la curva chiusa costituita dal segmento $[-1, 1]$ e dalla semicirconferenza di raggio 1 nel piano delle ordinate positive, orientata in senso antiorario. Calcolare $\int_\gamma (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}x - y^2\,\mathrm{d}y$ e $\int_\gamma (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}x - x^2\,\mathrm{d}y$.

- Sia γ l'arco di circonferenza di raggio 1, centro l'origine e angolo tra 0 e $\frac{\pi}{2}$. Calcolare $\int_\gamma (x+y)\,\mathrm{d}x + 2xy\,\mathrm{d}y + \int_{-\gamma}(x-y)\,\mathrm{d}x + xy\,\mathrm{d}y$.
- Vedere che la forma $x^2\,\mathrm{d}x + xy\,\mathrm{d}y$ non ha primitiva. Calcolarne l'integrale sulla circonferenza di raggio 1 e centro l'origine e sul bordo del quadrato $[0,1]^2$.
- Data $-\frac{y}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x + \frac{x}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}y$, vedere che è chiusa e trovare una primitiva su $\{(x,y)\colon x > 0\}$. Calcolare la circuitazione sulla circonferenza di raggio 1 e centro l'origine. Senza fare altri calcoli, vedere che l'integrale di questa forma conta il numero di volte in cui un circuito si avvolge attorno all'origine.

Lezione 21: Esercizi.

- Trovare primitive delle seguenti forme differenziali:

$$(4xy\sqrt{y}+1)\,\mathrm{d}x + 3x^2\sqrt{y}\,\mathrm{d}y \quad \text{su } \{(x,y)\colon y>0\}\,,$$

$$-\frac{xy}{\sqrt{y-x^2}}\,\mathrm{d}x + \left(\frac{3y-2x^2}{2\sqrt{y-x^2}}+1\right)\mathrm{d}y \quad \text{su } \{(x,y)\colon y>x^2\}\,.$$

- Calcolare $\iint_D \frac{y}{(1+x)(1+y^2)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, dove $D=[0,1]^2\cap\{(x,y)\colon y^2\geq x\}$.
- Calcolare $\iint_C \frac{y}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, dove $C=\{(x,y)\colon 1\leq x^2+y^2\leq 2\}$, sia con le formule di riduzione in coordinate cartesiane, sia con le coordinate polari.
- Calcolare $\iint_D xy\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, dove $D=[0,1]^2\cap\{(x,y)\colon x\geq y\}$, utilizzando le coordinate polari.
- Calcolare $\iint_D \frac{x}{y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, dove $D=\{(x,y)\colon y\geq x\,,\ y\leq 2x\,,\ y\geq \frac{1-x}{2}\,,\ y\leq 1-x\}$.

Lezione supplementare: Esercizi. Trovare i punti di estremo relativo delle seguenti funzioni:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+xyz \quad \text{su } \{(x,y,z)\colon xyz\neq 0\}\,,\quad \sin(x^2+y^2) \text{ su } \mathbb{R}^2\,,\quad (x+y)^2 \text{ su } \mathbb{R}^2\,.$$

Lezioni 22 e 23: I Teoremi della Divergenza e di Stokes. Versore tangente e normale di domini piani, frontiera orientata. Formule di Gauss-Green. Teoremi della divergenza e di Stokes nel piano (con dimostrazioni). Curve nello spazio, campi conservativi e irrotazionali (senza dimostrazioni). Cenni a superficie nello spazio, piano tangente e versore normale, elemento di superficie, Teoremi della divergenza e di Stokes nello spazio (senza dimostrazioni).

Lezione 23: Equazioni differenziali lineari del secondo ordine. Equazioni differenziali lineari del secondo ordine a coefficienti costanti, omogenee e non omogenee. Spazi vettoriali di funzioni, indipendenza lineare. Le soluzioni dell'equazione omogenea sono uno spazio vettoriale, le soluzioni dell'equazione non omogenea sono uno spazio affine. Calcolo di soluzioni indipendenti dell'equazione omogenea. Le soluzioni dell'equazione omogenea sono uno spazio vettoriale di dimensione due (esercizio di algebra lineare, pubblicato sulla pagina docente). Cenno ai metodi per individuare soluzioni particolari di equazioni non omogenee: il caso di termini noti polinomiali.
Esercizio svolto: Trovare tutte le soluzioni di $y''+2y'+y=t^2+4t-1$.

Lezione 24: Prova intercorso. *Testi e soluzioni sulla pagina docente.*

Discussione individuale delle prove: Giovedì 7 giugno, a partire dalle 12.30 nell'aula di lezione. Obbligatoria per chi ha passato la seconda prova, facoltativa per chi non l'ha superata. È possibile anche discutere la prima prova.

Riferimenti ai libri di testo. Il programma d'esame riportato sopra è contenuto nei seguenti paragrafi dei testi di Fusco-Marcellini-Sbordone, Analisi Matematica due (AM2) e Elementi di Analisi Matematica due (EAM2). Alcuni risultati, costruzioni e dimostrazioni sono stati solo accennati o omessi o semplificati: si faccia riferimento alle indicazioni date sopra.

- Successioni e serie di funzioni: AM2 Capitolo 1, par. 1–3, 5–7. EAM2 Capitolo 1, par. 1–6.
- Equazioni differenziali: EAM2 Capitolo 3, par. 21–25, 29. Oppure anche Analisi Matematica <u>uno</u>, Capitolo 12, par. 115–117, 119–124. Discussione generale su AM2, Capitoli 4–5.
- Continuità e differenziabilità in più variabili: AM2 Capitolo 3, par. 25–31, 35–38. EAM2 Capitolo 2, par. 8–15, 17–19.
- Integrazione in più variabili: AM2 Capitolo 8, par. 75–78; Capitolo 6, par. 60–63; Capitolo 7, tutto; Capitolo 10, senza il par. 95. EAM2 Capitolo 5, par. 43–47; Capitolo 4, par. 34–35, 37–40, 42; Capitolo 6, par. 48–51.