5. Concetto di funzione. Dominio e codominio.

Intro (concetto intuitivo)

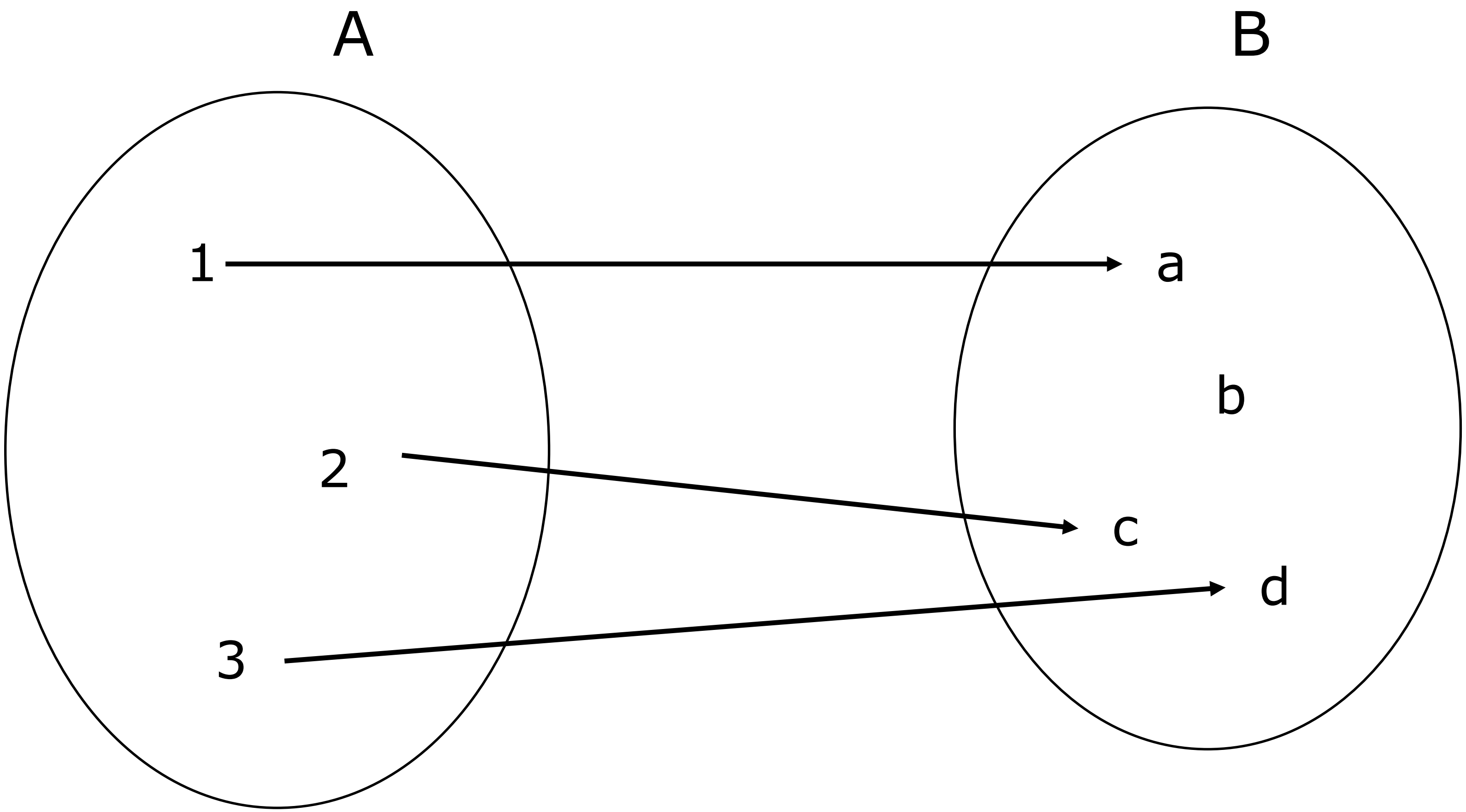
Che cosa e' una funzione?

Esempi di funzioni?

Concetto di funzione

Il concetto di funzione è legato all’esistenza di una <u>relazione</u> tra due insiemi di elementi in cui gli elementi del secondo insieme dipendono da quelli del primo insieme

Concetto di funzione (insiemi)



Le funzioni reali

Studieremo funzioni tra insiemi di numeri reali e cioè i cui elementi sono numeri reali

$\Downarrow$

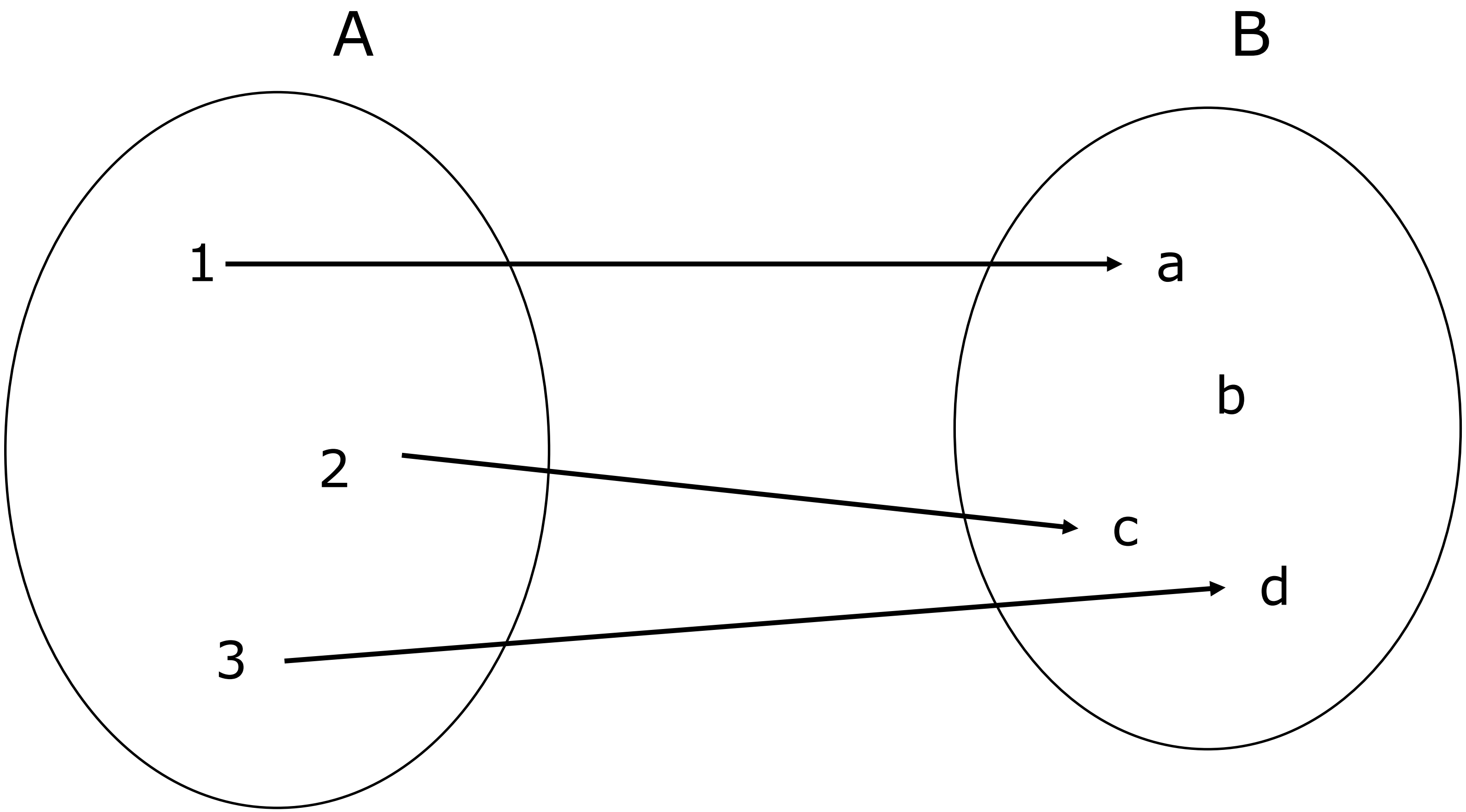
studieremo le funzioni reali

Definizione di funzione reale

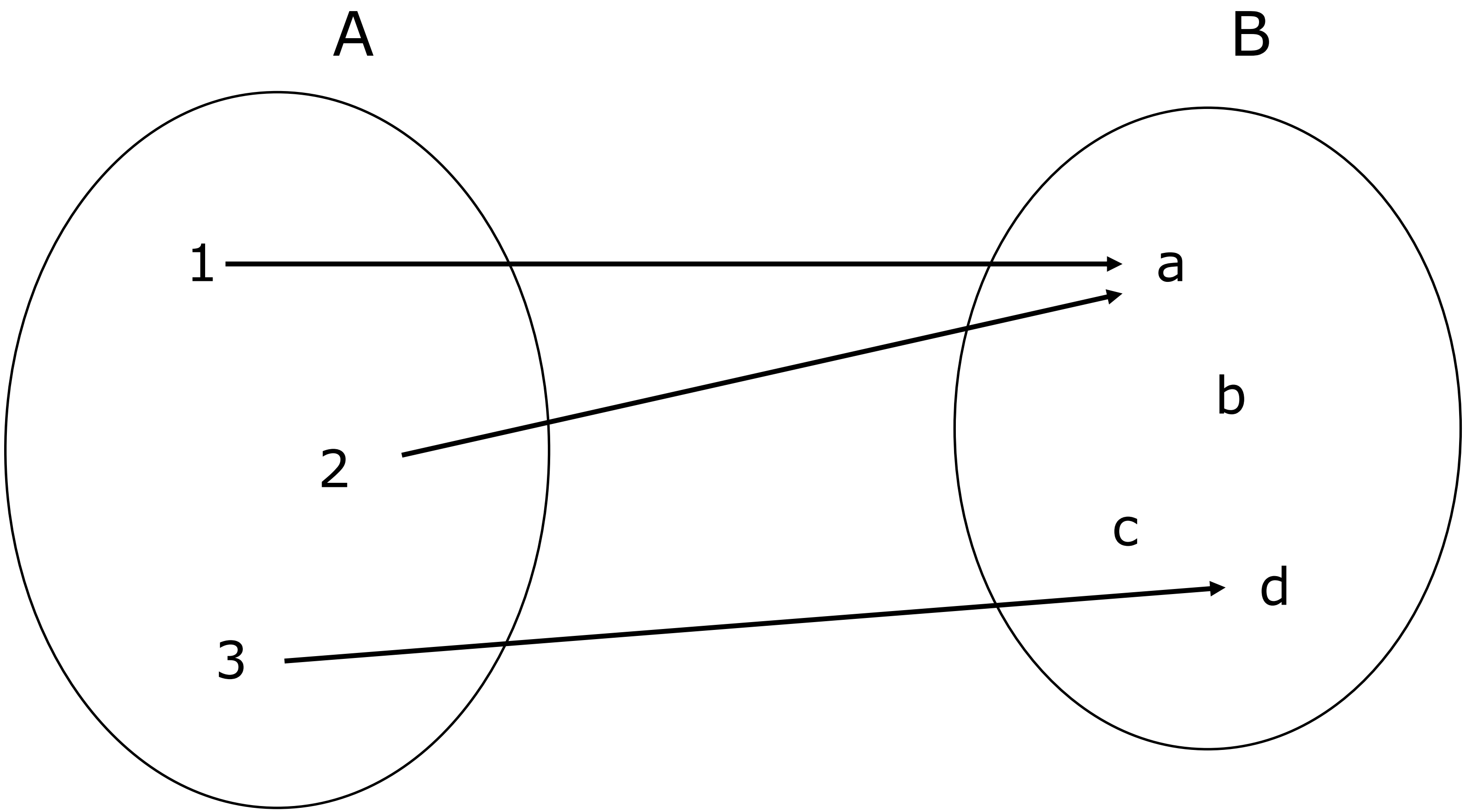
Def. Siano $A, B \subseteq R$, $A, B \neq \varnothing$. Si definisce funzione reale f da A a B di variabile reale una corrispondenza che ad ogni elemento $x \in A$ associa uno ed un solo elemento $y \in B$ e si indica col simbolo:

$$f\colon \mathrm{A} \longrightarrow \mathrm{B}$$

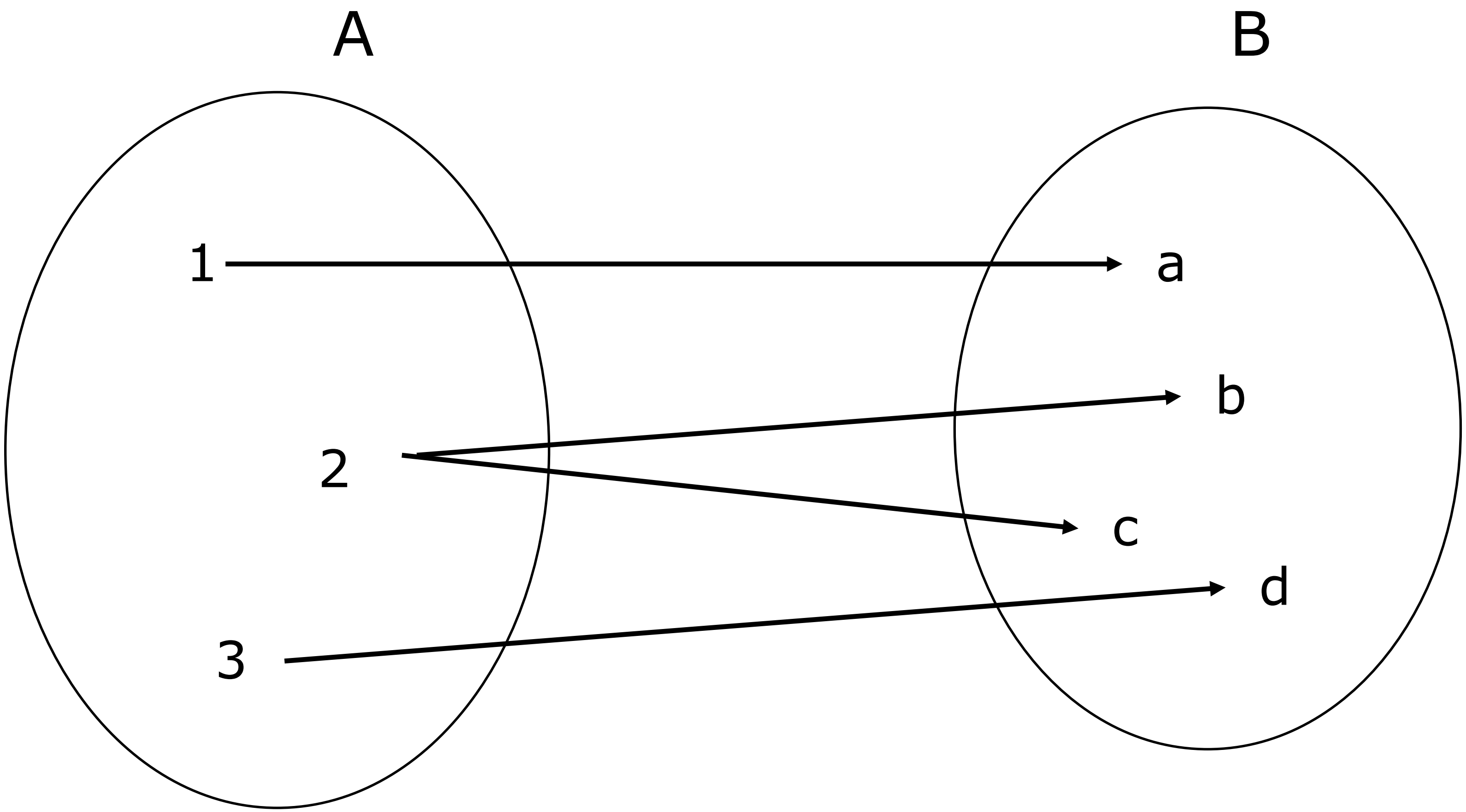
ad ogni elemento x associa uno ed un solo elemento y



ad ogni elemento x associa <u>uno ed un solo</u> elemento y



ad ogni elemento x associa uno ed un solo elemento y



Definizione di funzione reale

Si può pensare ad una funzione come ad una scatola che ad ogni ingresso x associa un'unica uscita y

$$x \longrightarrow \boxed{f} \longrightarrow y = f(x)$$

Il simbolo $f(\,)$ indica il complesso di operazioni che si effettuano x sulla per ottenere la y corrispondente

Def: variabile indipendente/dipendente, dominio

La x rappresenta il generico valore in ingresso e viene detta variabile indipendente

La y rappresenta l'unico valore corrispondente al generico x in entrata e viene detta variabile dipendente

L'insieme A dei valori che può assumere la x (cioè l'insieme dei valori in entrata) è detto dominio di f o insieme di definizione di f

L'insieme B che contiene i valori y in uscita è detto insieme di arrivo

Def: codominio

Il valore in uscita y corrispondente ad un fissato valore x di A si indica con $f\,(x)$ ed è detto

immagine di x mediante f

L'insieme di tutti gli elementi di B che sono immagine mediante f di almeno un elemento x del dominio A viene detto

Immagine di f o Codominio

$$\operatorname{Im} f = f(A) = \left\{ y \in B : \exists x \in A : y = f(x) \right\}$$

Definizione di funzione reale

Una funzione viene assegnata fornendo la sua espressione analitica e, cioè, fornendo un insieme di operazioni matematiche ben definite che, applicate in un certo ordine, permettono di trovare, per ogni assegnato valore di $\boldsymbol{x}$, il corrispondente valore $\boldsymbol{y = f(x)}$

Esempi:

$$y = x + 1 \Rightarrow \text{se } x = 1, y = 2; \text{se } x = 2, y = 3; \ldots$$

$$y = x^3 + x^2 \Rightarrow \text{se } x = 1, y = 2; \text{se } x = 2, y = 12; \ldots$$

$\ldots$

Esempi di funzioni

Esempio. Sia data la legge:

$$f : x \in R \to x \in R$$

$$f(x) = x$$

x	$f(x)$
-1	-1
0	0
1/2	1/2
1	1
2	2
…	…

Si tratta di una funzione

Esempi di funzioni

Esempio. Sia data la legge:

$$f : x \in R \rightarrow (2x+1) \in R$$

$$f(x) = 2x + 1$$

x	*f(x)*
-1	-1
0	1
1/2	2
1	3
2	5
…	…

Si tratta di una funzione

Esempi di funzioni

Esempio. Sia data la legge:

$$f : x \in R \to 3 \in R$$

$$f(x) = 3$$

x	$f(x)$
-1	3
0	3
1/2	3
1	3
2	3
…	…

Si tratta di una funzione costante

Esempi di funzioni

Esempio. Sia data la legge:

$$f : x \in R \to x^2 \in R$$

$$f(x) = x^2$$

x	***f(x)***
-1	1
0	0
1/2	1/4
1	1
2	4
…	…

Si tratta di una funzione

Esempi di funzioni

Esempio. Sia data la legge:

$$f : x \in R \rightarrow \begin{cases} 1 & \text{se} \quad x \geq 0 \\ -1 & \text{se} \quad x < 0 \end{cases}$$

x	$f(x)$
-2	-1
-1	-1
0	1
1/2	1
1	1
…	…

Si tratta di una funzione definita a tratti definita da funzioni differenti su intervalli differenti

Definizione di funzione reale

Def. Siano $A, B \subseteq R,\ A, B \neq \varnothing$. Si definisce funzione reale f da A (dominio) a B (codominio) di variabile reale una corrispondenza che ad ogni elemento x (variabile indipendente) associa uno ed un solo elemento y (variabile dipendente) e si indica col simbolo:

$$f : A \to B$$

$$f : x \in A \to y \in B$$

$$\to \quad \Leftrightarrow \quad \text{"associa"}$$

Grafico di funzioni

In particolare, assegnata una funzione

$$f\colon D \longrightarrow R, \text{ con } \quad D \subseteq R$$

è possibile visualizzare anche

<u>graficamente</u>

la dipendenza di $f(x)$ dal generico x di D

Grafico di funzioni

Il grafico di una funzione $f : D \rightarrow R$

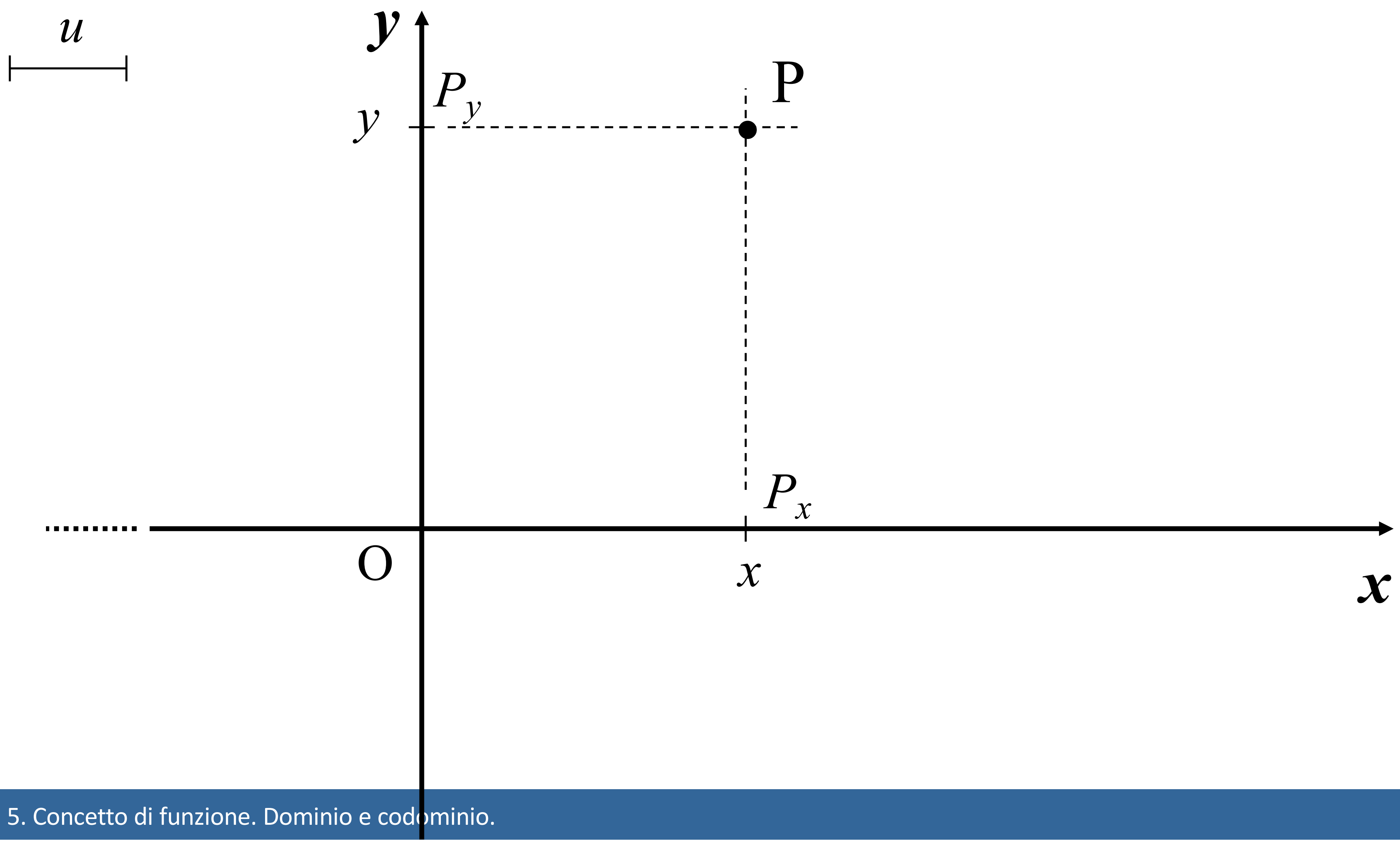
non è altro che l'insieme dei punti del piano cartesiano O$\boldsymbol{xy}$ di coordinate (x,y) che hanno per ascissa il generico elemento $\boldsymbol{x}$ del dominio *D* e per ordinata il corrispondente valore $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$

$$G_f = \{(x, y): x \in D, y = f(x)\}$$

Per le funzioni più comuni, il grafico è una curva

Rappresentazione grafica (dal piano a **R**)

Viceversa, preso un punto P del piano cartesiano, conduciamo per esso la parallela PP_x all'asse x e la parallela PP_y all'asse y. Allora al punto P_x dell'asse delle ascisse corrisponderà il numero reale x ed al punto P_y dell'asse delle orinate corrisponderà un altro numero reale y



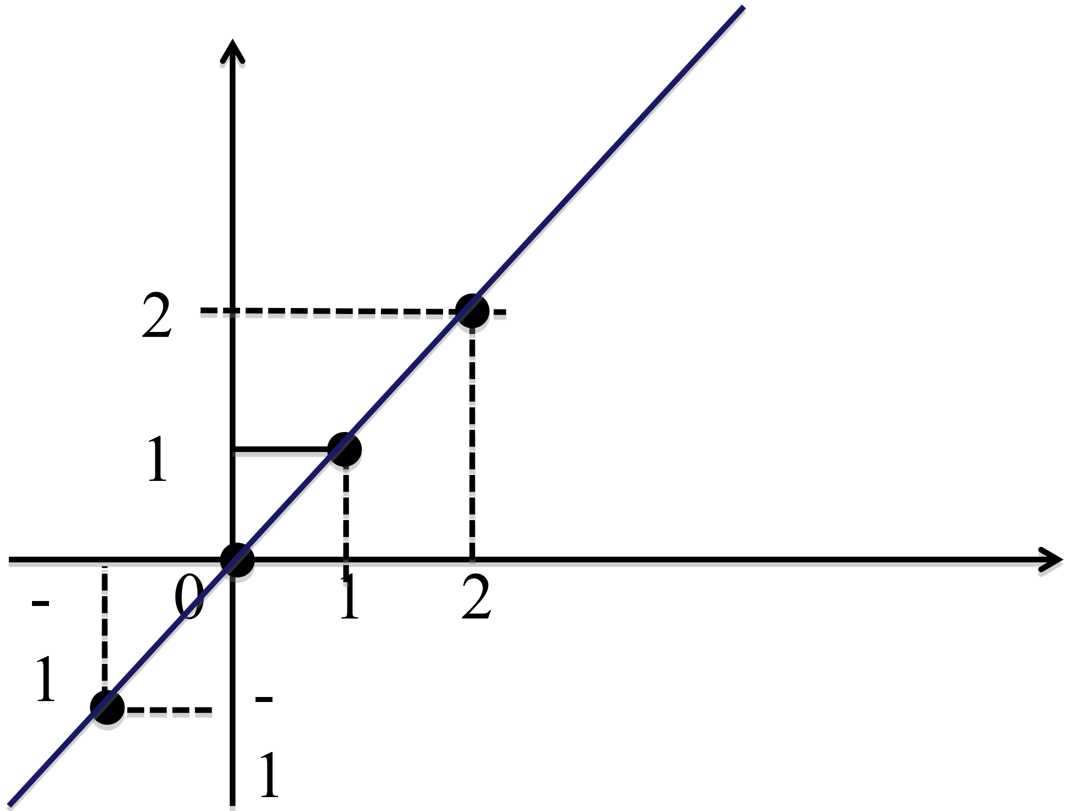
Esempi di funzioni

Esempio 6. Sia data la funzione:

$$f : x \in R \rightarrow x \in R$$

$$f(x) = x$$

x	$f(x)$
-1	-1
0	0
1/2	1/2
1	1
2	2
…	…



Il grafico è la retta passante per i punti individuati

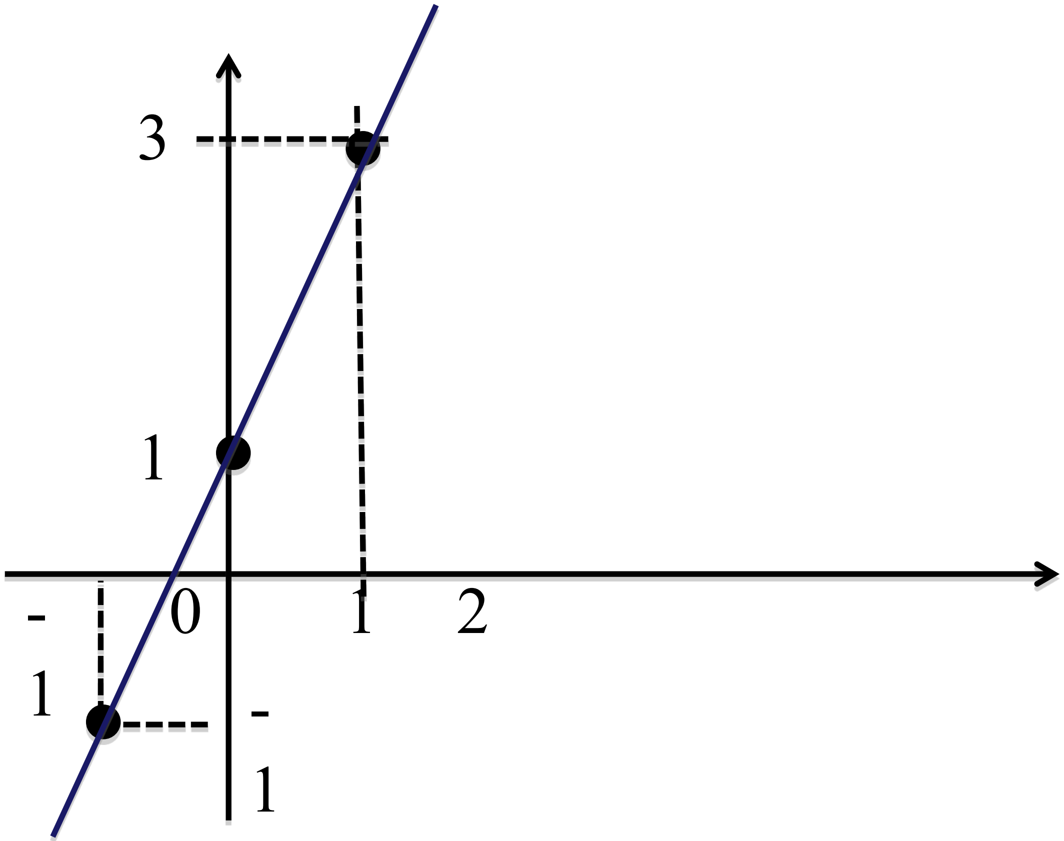
Esempi di funzioni

Esempio 7. Sia data la funzione:

$$f : x \in R \rightarrow (2x+1) \in R$$

$$f(x) = 2x + 1$$

x	*f(x)*
-1	-1
0	1
1/2	2
1	3
2	5
…	…



Il grafico è la retta passante per i punti individuati

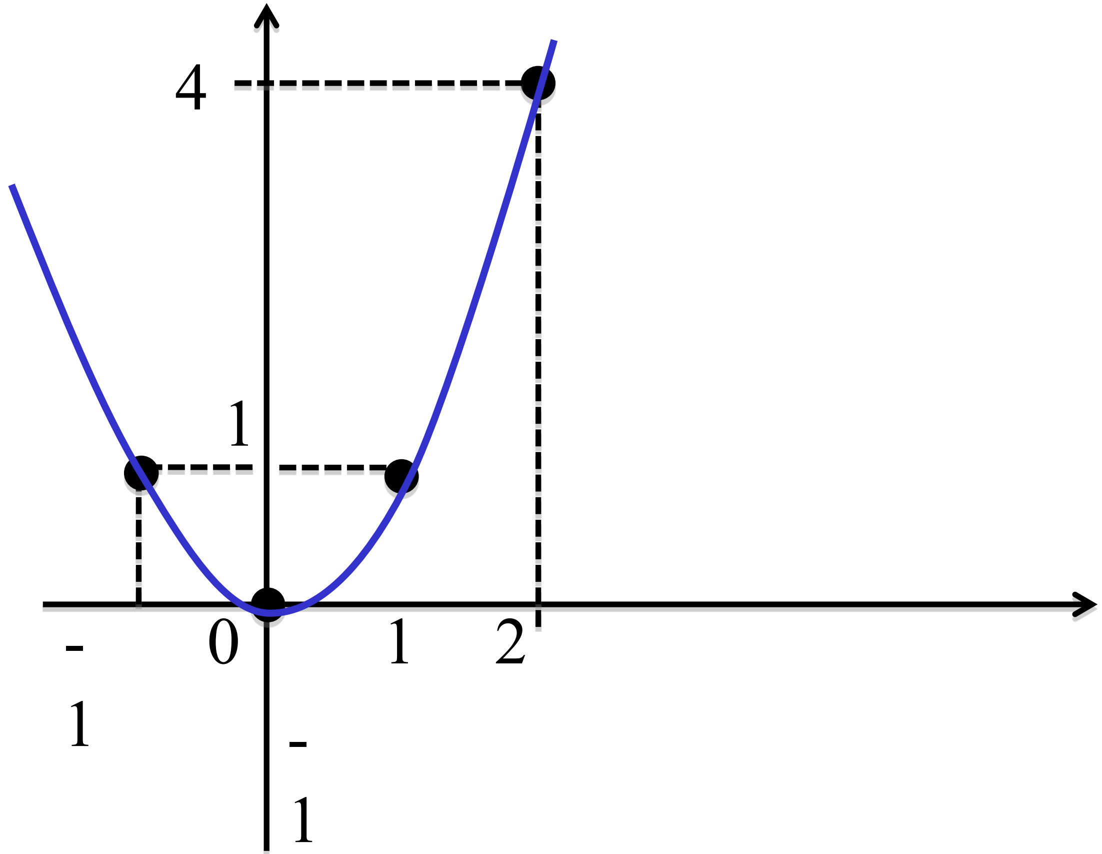
Esempi di funzioni

Esempio 9. Sia data la funzione:

$$f : x \in R \rightarrow x^2 \in R$$

$$f(x) = x^2$$

x	$f(x)$
-1	1
0	0
1/2	1/4
1	1
2	4
…	…



Il grafico è la curva passante per i punti individuati

Esempi di funzioni

Esempio 10. Sia data la funzione definita a tratti:

$$f : x \in R \to \begin{cases} -1 & \text{se} \quad x \geq 0 \\ +1 & \text{se} \quad x < 0 \end{cases}$$

x	*f(x)*
-2	-1
-1	-1
0	1
1/2	1
1	1
…	…

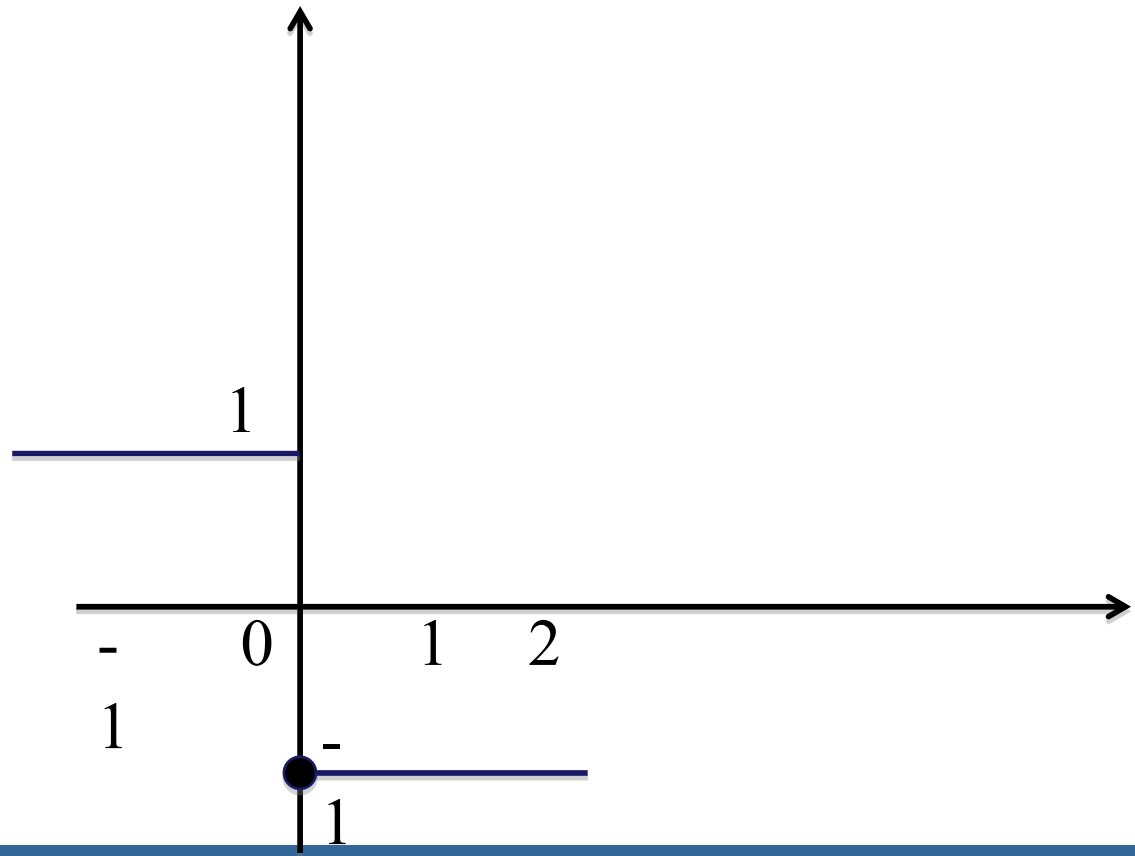


Grafico di funzioni

La proprietà fondamentale di una funzione secondo cui ad ogni ingresso x di D corrisponde uno ed un solo valore in uscita $f(x)$ ha un significato geometrico preciso:

ogni parallela all'asse delle ordinate che taglia l'asse delle ascisse in un punto x del dominio D, interseca il grafico di f in uno ed un solo punto

A partire dal grafico di una curva è possibile stabilire se si tratta del grafico di una funzione oppure no

Grafico di funzioni

Non è il grafico di una funzione!

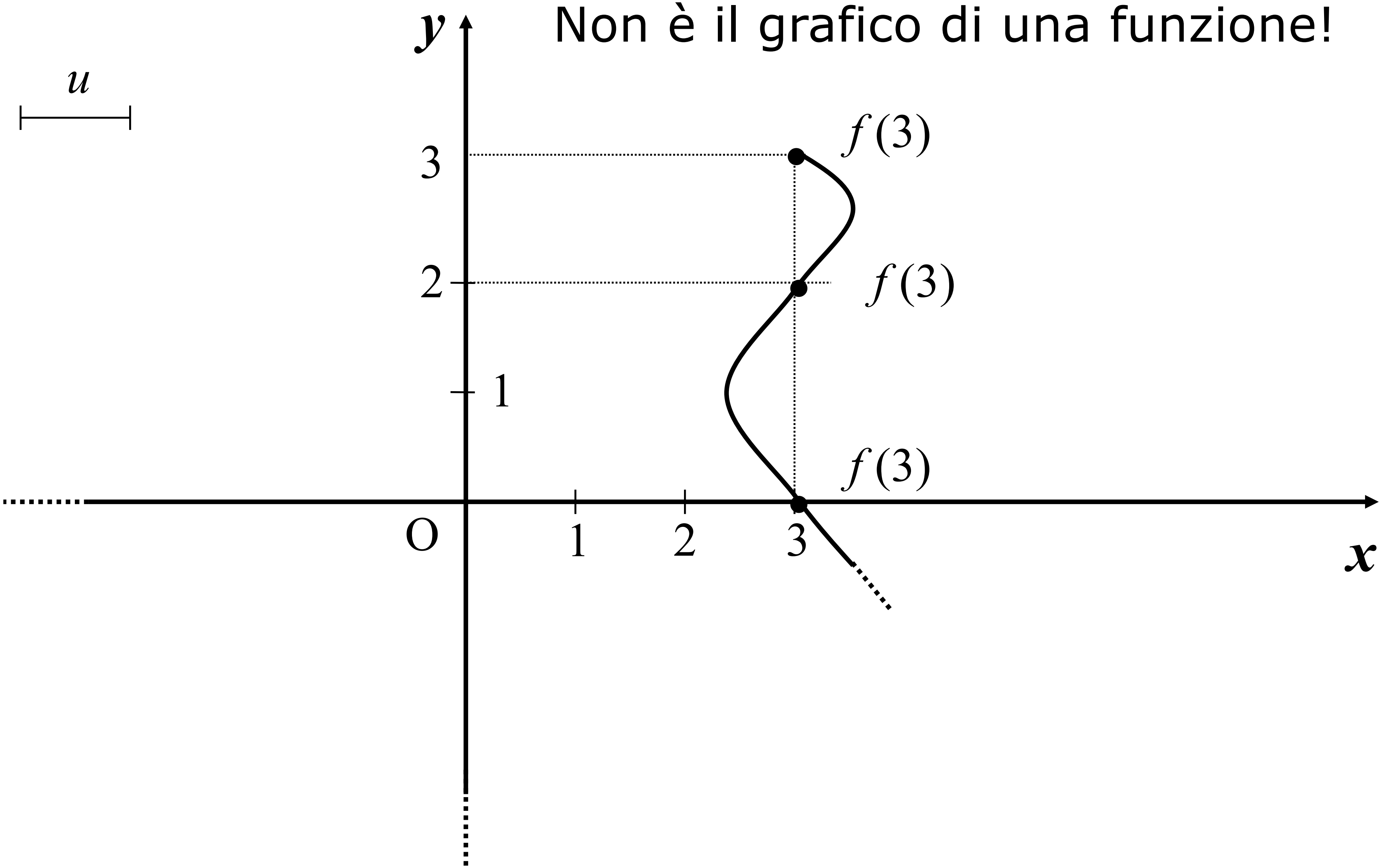
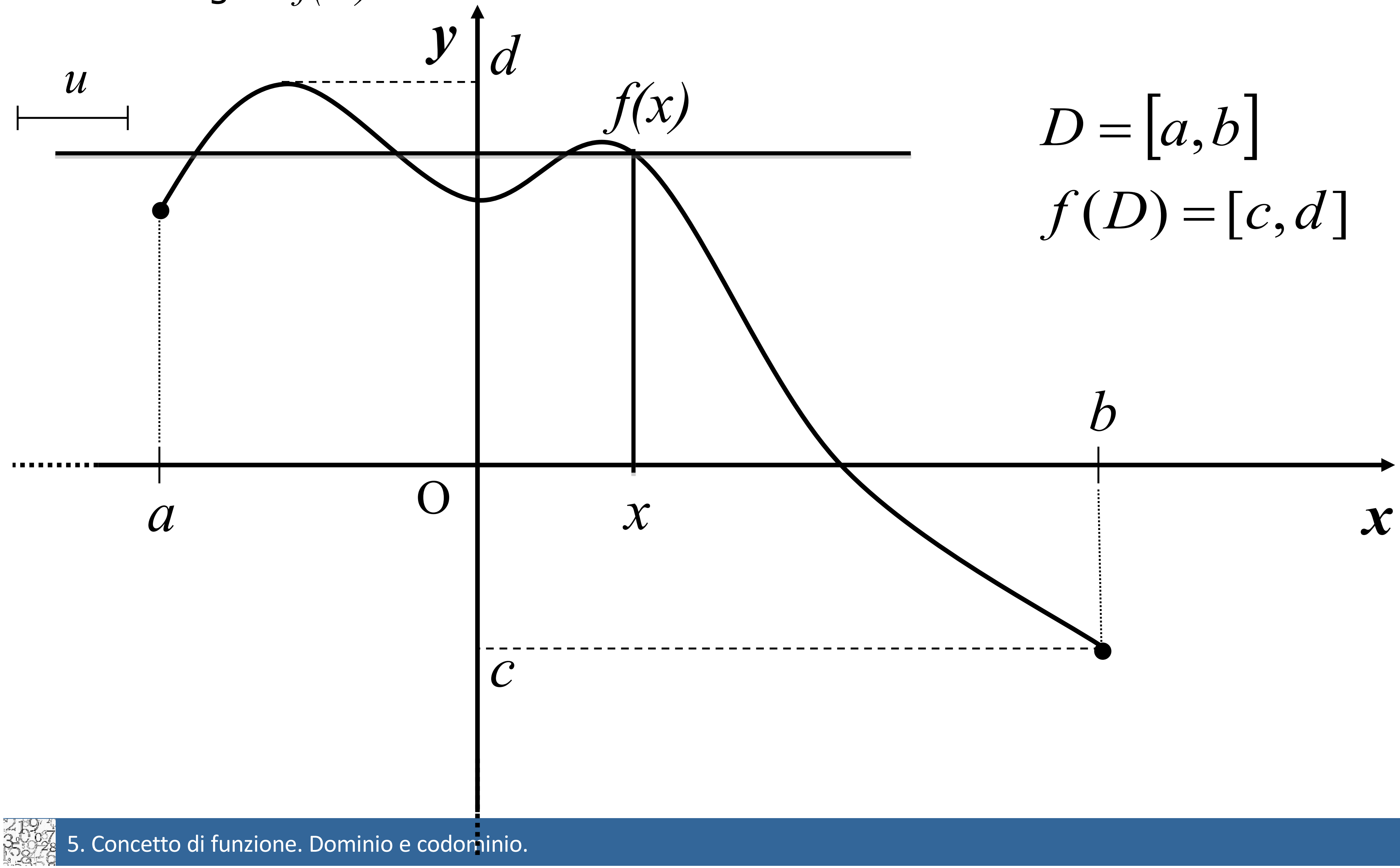


Grafico di funzioni

- il dominio di una funzione è un sottoinsieme dell' asse delle ascisse
- l' immagine *f(D)* è un sottoinsieme dell' asse delle ordinate



$$D = [a, b]$$

$$f(D) = [c, d]$$

Il grafico di funzione

- il dominio di una funzione è un sottoinsieme dell'asse delle ascisse
- l'immagine $f(A)$ è un sottoinsieme dell'asse delle ordinate

$$A = [a, b]$$

$$f(A) = [c, d]$$