Esercizi di Analisi Matematica - Successioni

1. Costruire una successione di numeri reali che sia limitata e dotata di minimo e massimo.

2. Costruire una successione di numeri reali che sia limitata e che non sia dotata né di minimo né di massimo.

3. Dire se le seguenti successioni sono limitate:
$$\frac{\cos n}{n}; \quad (-1)^n n; \quad \frac{n!}{n^n}; \quad -2^{\sqrt{n}}$$

4. Per ciascuna delle seguenti successioni:
$$(-1)^n; \quad \frac{1}{n}; \quad \frac{(-1)^n}{n^2}; \quad \frac{n-1}{n}; \quad 2^n$$
si dica quali di queste proprietà sono verificate definitivamente:
   a) i termini sono positivi;
   b) i termini sono minori di un dato $\varepsilon > 0$;
   c) i termini sono in valore assoluto minori di un dato $\varepsilon > 0$;
   d) i termini sono maggiori di un dato $\varepsilon > 0$.

5. Utilizzando le definizioni di limite provare che:
$$a)\ \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n+3} = 0; \qquad b)\ \lim_{n\to\infty} (n^2-3) = +\infty; \qquad c)\ \lim_{n\to\infty} \frac{2n+3}{2n} = 1;$$
$$d)\ \lim_{n\to\infty} (2-2^{-n}) = 2; \qquad e)\ \lim_{n\to\infty} (1-n^3) = -\infty.$$
$$f)\ \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{3n^2+1} = \frac{1}{3}; \qquad g)\ \lim_{n\to\infty} (n^2-2n) = +\infty.$$
Verificare inoltre che le seguenti successioni non sono regolari:
$$h)\ \{(-1)^n\}; \qquad i)\ \left\{\sin n\frac{\pi}{2}\right\}; \qquad l)\ \{(-1)^n \cdot n\}.$$

6. Si verifichi, usando la definizione di limite, che
$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1, \quad \text{con } a_n = \begin{cases} 1 & \text{se } n \text{ è pari,} \\ 1-\dfrac{1}{n} & \text{se } n \text{ è dispari.} \end{cases}$$

7. Si verifichi, usando la definizione di limite, che
$$\lim_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} +\infty & \text{se } a > 1 \\ 1 & \text{se } a = 1 \\ 0 & \text{se } 0 \le a < 1. \end{cases} \qquad \lim_{n\to\infty} \log_a n = \begin{cases} +\infty & \text{se } a > 1 \\ -\infty & \text{se } 0 < a < 1. \end{cases}$$

8. Fornire un esempio di due successioni regolari a_n, b_n per cui $a_n b_n$ non ammette limite.

9. Fornire un esempio di successioni a_n e b_n divergenti positivamente per cui:

   a) $a_n - b_n \to 0$;

   b) $a_n - b_n \to +\infty$;

   c) $a_n - b_n \to -\infty$;

   d) $a_n - b_n$ non ammette limite;

   e) $\dfrac{a_n}{b_n} \to 0$;

   f) $\dfrac{a_n}{b_n} \to -5$;

   g) $\dfrac{a_n}{b_n} \to +\infty$;

   h) $\dfrac{a_n}{b_n}$ non ammette limite.

10. Verificare che:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_0 n^h + a_1 n^{h-1} + \ldots + a_h}{b_0 n^k + b_1 n^{k-1} + \ldots + b_k} = \begin{cases} (+\infty) \cdot \left(\dfrac{a_0}{b_0}\right) & \text{se } h > k \\ \dfrac{a_0}{b_0} & \text{se } h = k \\ 0 & \text{se } h < k \end{cases}$$

dove h, k sono due naturali e $a_0 \neq 0, a_1, \ldots, a_n, b_0 (\neq 0), b_1, \ldots, b_k$ sono numeri reali.

11. Dimostrare che:

   a) se $a_n \to +\infty$ e b_n è limitata inferiormente, allora $a_n + b_n \to +\infty$;

   b) se $a_n \to -\infty$ e b_n è limitata superiormente, allora $a_n + b_n \to -\infty$;

   c) se $a_n \to +\infty$ e $b_n \to b > 0$, allora $a_n \cdot b_n \to +\infty$;

   d) se $a_n \to +\infty$ e $b_n \to b < 0$, allora $a_n \cdot b_n \to -\infty$;

   e) se $a_n \to +\infty$, allora $\dfrac{1}{a_n} \to 0$;

   f) se $a_n \to 0$, con $a_n \neq 0$, allora $\left|\dfrac{1}{a_n}\right| \to +\infty$.

12. Provare che se $a_n \to a > 0$ e $b_n \to b > 0$, allora

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{(a_n)^n + (b_n)^n} = \max\{a, b\}.$$

13. Date due successioni a_n, b_n tali che $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 1$, è vero che

$$\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = 0 \ ?$$

14. Date due successioni a_n, b_n tali che $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n - b_n) = 0$, è vero che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1 \ ?$$

15. Al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, calcolare il seguente limite:

$$\lim_{n\to\infty} n^2 \sin \frac{\alpha}{n^2+1};$$

16. Calcolare

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^2+1} + \frac{1}{n^2+2} + \ldots + \frac{1}{n^2+n} \right).$$

17. Calcolare

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^3+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^3+4}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^3+n^2}} \right).$$

18. a) Verificare che la successione $\sqrt[n]{n}$ è monotona decrescente;

    b) calcolare

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{n} \sqrt[n+1]{n+1} \cdot \ldots \cdot \sqrt[2n]{2n} \right).$$

19. Si calcolino i limiti delle seguenti successioni per $n \to \infty$:

(a) $\sqrt[n]{n^4+1}$

(b) $n(\sqrt{n^2+n} - n)$

(c) $\dfrac{\log(1+n+n^3) - 3\log n}{\sin \frac{1}{n^2}}$

(d) $\left(1 + \dfrac{1}{n!}\right)^n$

(e) $\dfrac{n^2+5n}{3^n}$

(f) $\dfrac{2^{n+1}-n}{7^n+n}$

(g) $\dfrac{\sqrt[n^2]{156}}{n}$

(h) $\dfrac{n^{10}+n^5}{7^n}$

(i) $\dfrac{n^2-\sqrt{n}}{3^{-n}}$

(j) $\dfrac{\sqrt{n} - \sqrt[2n]{9}}{n}$

(k) $\dfrac{4^n+9^n}{5^n}$

(l) $\dfrac{\sqrt[n]{n^2}+6^n}{n^n}$

(m) $\dfrac{2^n+n^n}{n!}$

(n) $\dfrac{\frac{1}{n}}{\sin\frac{1}{n}}$

(o) $\dfrac{\frac{1}{n}}{\sin\frac{1}{n^2}}$

(p) $\dfrac{\sin n}{n}$

(q) $\left(1+\dfrac{7}{n}\right)^{2n}$

(r) $\left(1+\dfrac{3}{n^2+n^4}\right)^n$

(s) $\dfrac{n^2+n\sin n}{1+n+n^2}$

(t) $\dfrac{\log_2 n+1}{\log_5 n+1}$

(u) $\left(1-e^{1/n}\right)\log n$

(v) $n\left(\cos\dfrac{1}{n^3} - e^{\frac{-1}{n^3}}\right)$

(w) $\dfrac{\sqrt[4]{n}+n+\log n}{\log(2n)-2n}$

(x) $n^3\left(e^{\frac{1}{n^2}} - e^{-\frac{1}{n^2}}\right)$

20. Dire per quali valori del parametro reale α esiste finito il seguente limite:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{n^2+1}{n^\alpha}\right)^n.$$

21. Si calcolino i limiti delle seguenti successioni per $n\to\infty$:

(a) $n^2\left(\cos\frac{1}{n}\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}-1\right)$;

(b) $\sqrt[n]{\binom{2n}{n}}$;

(c) $\dfrac{2n+\sin n+\sqrt[3]{n}}{\log n+\sqrt{n^2+3n}}$;

(d) $\dfrac{5^n+2^n}{4^n-3^n}$;

(e) $\sqrt{n^2+2n}-n\sqrt{1+\sin\frac{1}{n}}$;

(f) $\dfrac{\sin n+\log n+\sqrt[n]{n!}}{3^n+n+(-1)^n}$;

(g) $\sqrt[n]{n}\log_3\sqrt[n]{n}+4$;

(h) $\dfrac{\log(n^3)}{\log(n^3+3n^2)}$;

(i) $\dfrac{n\sin n+\sqrt[n]{n}+3^{2n+1}}{2^n+n\log(1+n)+n!+\cos n\pi}$;

(j) $\left(\dfrac{2n^2-1}{2n^2+1}\right)^{\frac{2n^3-n}{n+3}}$;

(k) $\sqrt[n]{n!}\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)\cos^2 n$;

(l) $\dfrac{\log n!}{n\log n}$;

(m) $\dfrac{(3n)!}{(n!)^3}$;

(n) $\sqrt[n]{n\log n}$;

(o) $\dfrac{(n+1)^6-(n-1)^6}{(n+1)^5+(n-1)^5}$;

(p) $\left(\cos\frac{1}{n}\right)^{3n^2}$;

(q) $\sqrt{n^2+1}-\sqrt[4]{n^4+2n^2}$;

(r) $\left(\dfrac{n+3}{n+2}\right)^{\log\left(1+\sin\frac{1}{n}\right)}$;

(s) $\dfrac{n^{\sqrt{n}}+2^n n!+\sin(n^n)-1}{3^n+\sqrt{n^n}+3^{\sqrt{n}}}$;

(t) $\dfrac{1}{n}\left(1+\dfrac{2}{3}+\dfrac{3}{5}+\ldots+\dfrac{n}{2n-1}\right)$;

(u) $\dfrac{\sqrt[n]{n(n+1)\cdot\ldots\cdot(2n)}}{n}$.

22. Verificare il seguente limite:

$$\lim_{n\to+\infty}\sin\left(\pi\sqrt{4n^2+\sqrt{n}}\right)=0.$$

23. *(Formula di Viète)* Sia $x\neq 0$. Verificare il seguente limite:

$$\frac{\sin x}{x}=\lim_{n\to+\infty}\left[\cos\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{4}\right)\cdot\ldots\cdot\cos\left(\frac{x}{2^n}\right)\right]$$

(suggerimento: usare la formula $\sin(2x)=2\sin x\cos x$). Di conseguenza, verificare che

$$\frac{2}{\pi}=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}\cdot\ldots$$