

CALCOLO DELLE PROBABILITA'

- Esperimento o prova** ▶ una qualsiasi operazione il cui risultato non può essere previsto con certezza
- Evento** ▶ ogni risultato possibile di un esperimento
- Spazio Campionario (Ω)** ▶ insieme di tutti i possibili risultati dell'esperimento
- Probabilità** ▶ un numero reale compreso tra 0 e 1 associato al manifestarsi dell'evento

“LA PROVA GENERA L'EVENTO CON UNA CERTA PROBABILITÀ”

E_1	E_2	E_n
↓	↓	↓
p_1	p_2	p_n

$$0 \leq p_i \leq 1 \quad \sum_{i=1}^n p_i = 1$$

- Modello probabilistico** ▶ l'insieme costituito dallo spazio campionario di un esperimento e dalle probabilità associate agli eventi

DEFINIZIONI DI PROBABILITÀ

Scuola classica: la probabilità è il rapporto tra il numero di risultati favorevoli ed il numero totale dei risultati di una prova

n.b.

si conoscono il numero di successi e il numero dei possibili risultati

Scuola frequentista: la probabilità è il limite a cui tende la frequenza relativa quando cresce il numero delle prove

n.b.

non è sempre possibile ripetere un esperimento nelle stesse identiche condizioni;
empiricamente non si può riprodurre un numero infinito di prove per cui la probabilità frequentista è solo un'approssimazione del valore limite

Scuola soggettivista: la probabilità è una misura del grado di fiducia che una persona ripone nel verificarsi di un dato fenomeno.

n.b.

interpretazione della probabilità svincolata dalle osservazioni empiriche del fenomeno

L'Algebra degli Eventi

A) EVENTO CERTO: $\Rightarrow I$

B) EVENTO IMPOSSIBILE: $\Rightarrow \emptyset$

C) EVENTO UNIONE O SOMMA LOGICA fra due eventi A e B è quell'evento C che si verifica quando si verifica A oppure B oppure A e B contemporaneamente:

$$C = A \cup B$$

es. estrazione di una carta da un mazzo

A \rightarrow esce asso B \rightarrow esce carta di cuori

C = estrazione di un asso o di una carta di cuori o di un asso di cuori

D) EVENTO INTERSEZIONE O PRODOTTO LOGICO fra due eventi A e B è quell'evento D che si verifica quando si verificano sia A che B contemporaneamente:

$$D = A \cap B$$

es. estrazione di una carta da un mazzo

A \rightarrow esce asso B \rightarrow esce carta di cuori

D = estrazione di un asso di cuori

E) **NEGAZIONE** di un evento A è quell'evento che si verifica allorquando A non si verifica: \bar{A}

es. estrazione di una carta da un mazzo

$A \rightarrow$ esce carta di cuori $\bar{A} \rightarrow$ non esce carta di cuori

F) **EVENTI INCOMPATIBILI:**

$$A \cap B = \emptyset$$

es. lancio di un dado $A \rightarrow$ esce 2 $B \rightarrow$ esce 4

invece **EVENTI COMPATIBILI**

es. lancio di un dado $A \rightarrow$ esce un numero pari $B \rightarrow$ esce 4

G) **EVENTI NECESSARI:** $A \cup B = I$

es. lancio di una moneta $A \rightarrow$ esce testa $B \rightarrow$ esce croce

Probabilità degli Eventi

1) $P(I) = 1$ **postulato delle probabilità**

2) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ **per eventi incompatibili**

per eventi compatibili: TEOREMA DELLE PROBABILITÀ TOTALI

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

es. estrazione di una carta da un mazzo

eventi incompatibili

A → esce asso B → esce re di cuori

$$P(C) = P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

$$P(C) = 4/52 + 1/52$$

eventi compatibili

A → esce asso B → esce carta di cuori

$$P(C) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(C) = 4/52 + 13/52 - 1/52$$

3) $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ **per eventi indipendenti**

**per eventi dipendenti: TEOREMA DELLE PROBABILITÀ
COMPOSTE**

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$$

eventi indipendenti

*es. estrazione con reimmissione di due palline bianche da un
urna contenente 20 palline di cui 10 bianche*

A → esce pallina bianca B → esce pallina bianca

$$P(C) = P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

$$P(C) = 10/20 \cdot 10/20$$

eventi dipendenti

*es. estrazione senza reimmissione di due palline bianche da un
urna contenente 20 palline di cui 10 bianche*

A → esce pallina bianca B → esce pallina bianca

$$P(C) = P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$$

$$P(C) = 10/20 \cdot 9/19$$

N.B. INDIPENDENZA STOCASTICA

Due eventi A e B sono **stocasticamente indipendenti** se

$$P(A|B) = P(A)$$

4) Probabilità Condizionata

La probabilità dell'evento B, dato che si è verificato l'evento A, è il rapporto fra la probabilità del contemporaneo verificarsi di A e B e la probabilità di A, se questa è diversa da zero:

$$P(B / A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad \text{dove } P(A) \neq 0$$

TEOREMA DI BAYES

$$P(E / F) = \frac{P(E) \cdot P(F / E)}{P(E)P(F / E) + P(\bar{E})P(F / \bar{E})}$$

esempio

Il tasso di diffusione di una patologia è pari all'1%. Un test di laboratorio impiegato per la rilevazione precoce della malattia fornisce esito positivo nel 99% dei soggetti malati e nel 3% dei soggetti sani. Supponiamo che il test dia risultato positivo su un individuo scelto a caso, qual è la probabilità che l'individuo sia affetto dalla patologia?

E → l'individuo è affetto da patologia

F → il test fornisce risultato positivo

$$P(E) = 0,01 \quad P(F/E) = 0,99 \quad P(F/\bar{E}) = 0,03$$

$$P(E / F) = \frac{0,01 \cdot 0,99}{(0,01 \cdot 0,99) + ((1 - 0,01) \cdot 0,03)}$$

P(E/F) = PROBABILITÀ A POSTERIORI