Moto del Punto Materiale 2

Moti Notevoli

- Moto rettilineo uniforme
- Moto uniformemente accelerato
- Moto misto
- Moto periodico
- Moto circolare uniforme
- Moto armonico

Moto rettilineo uniforme

Si consideri un moto con velocità istantanea $\vec{v}$

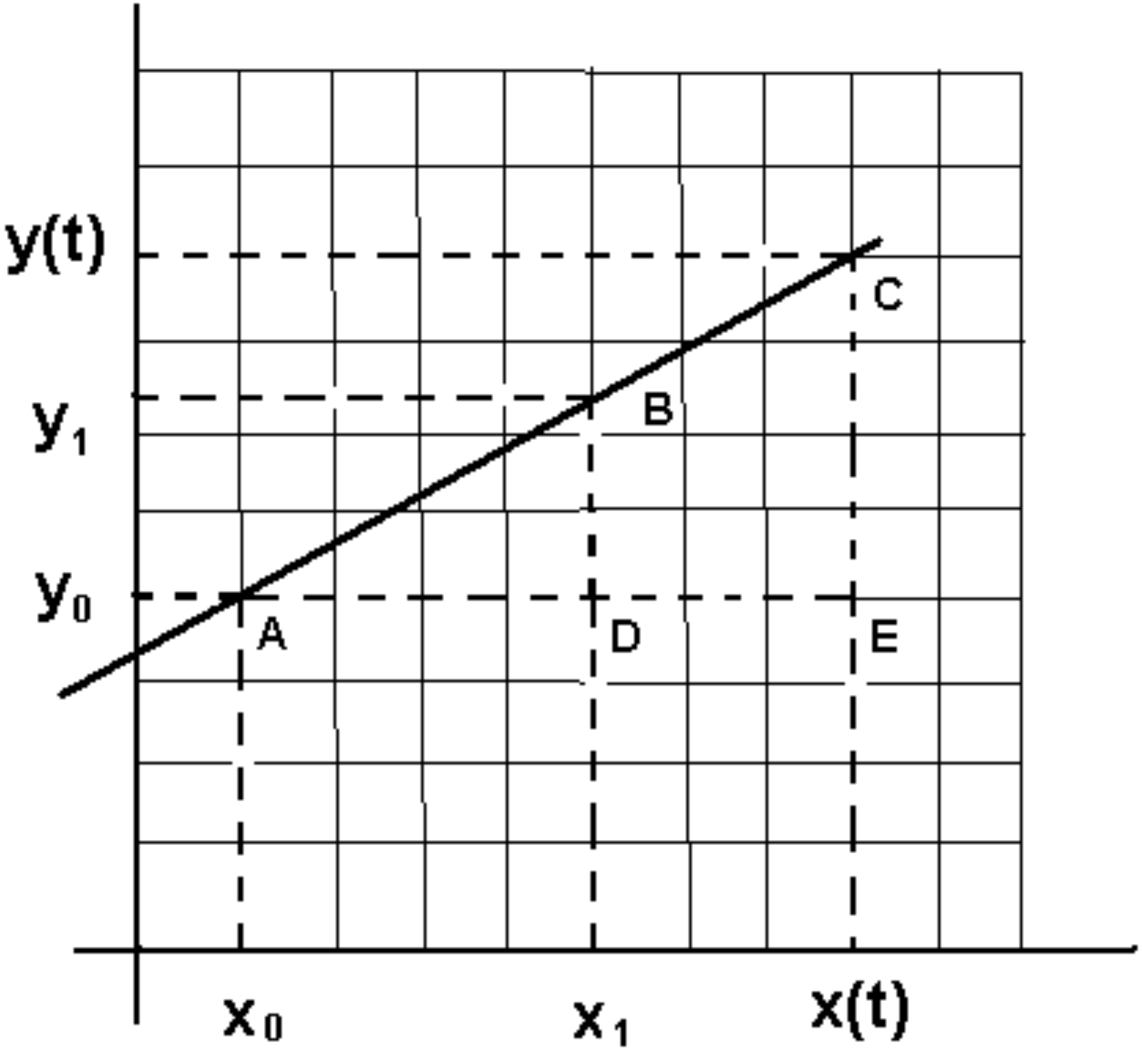
Se la **velocità è costante** (o uniforme), ovvero sono costanti il suo modulo e la sua direzione nel tempo, allora possiamo scrivere la legge oraria

$$\vec{x}(t) = \vec{x}_0 + \vec{v}\,(t - t_0) \Rightarrow \begin{cases} x(t) = x_0 + v_x (t - t_0) \\ y(t) = y_0 + v_y (t - t_0) \end{cases}$$

che si può anche scrivere

$$x(t) - x_0 = v_x (t - t_0)$$
$$y(t) - y_0 = v_y (t - t_0)$$

$$\Rightarrow \frac{y(t) - y_0}{x(t) - x_0} = \frac{v_y}{v_x}$$



In un moto rettilineo i triangoli ABD e ACE sono simili, quindi

$$\frac{\overline{C}\,\overline{E}}{\overline{A}\,\overline{E}} = \frac{\overline{B}\,\overline{D}}{\overline{A}\,\overline{D}}$$

il che significa

$$\frac{y(t) - y_0}{x(t) - x_0} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \text{cost}$$

relazione identica a quella ottenuta dalla legge oraria!

Moto uniformemente accelerato

Si consideri un moto con accelerazione istantanea $\vec{a}$ costante. Per semplicità sia il moto unidimensionale.

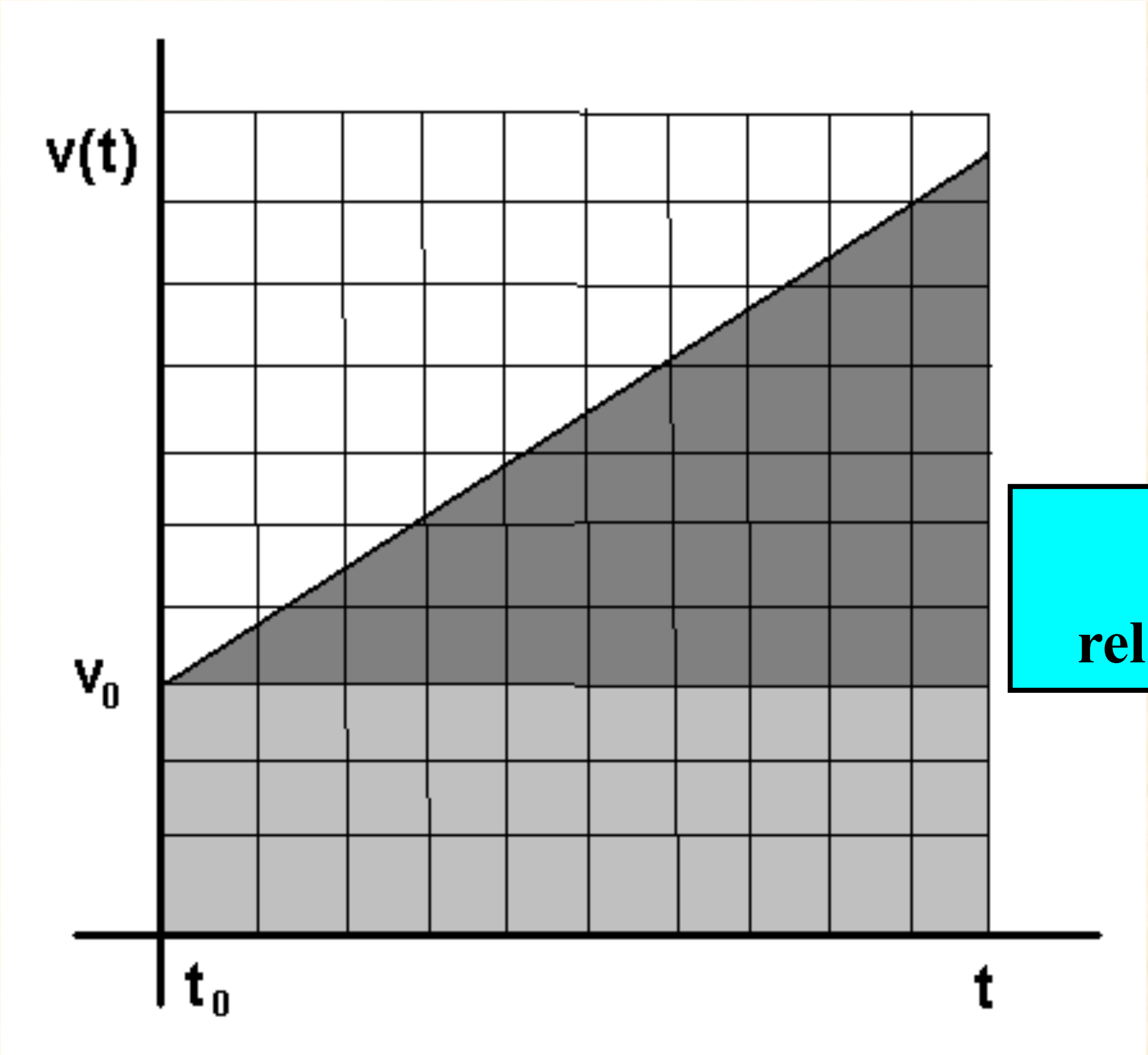
Dalla definizione di accelerazione istantanea si ha

$$a = \frac{v(t) - v_0}{t - t_0}$$

e quindi

$$v(t) - v_0 = a(t - t_0)$$

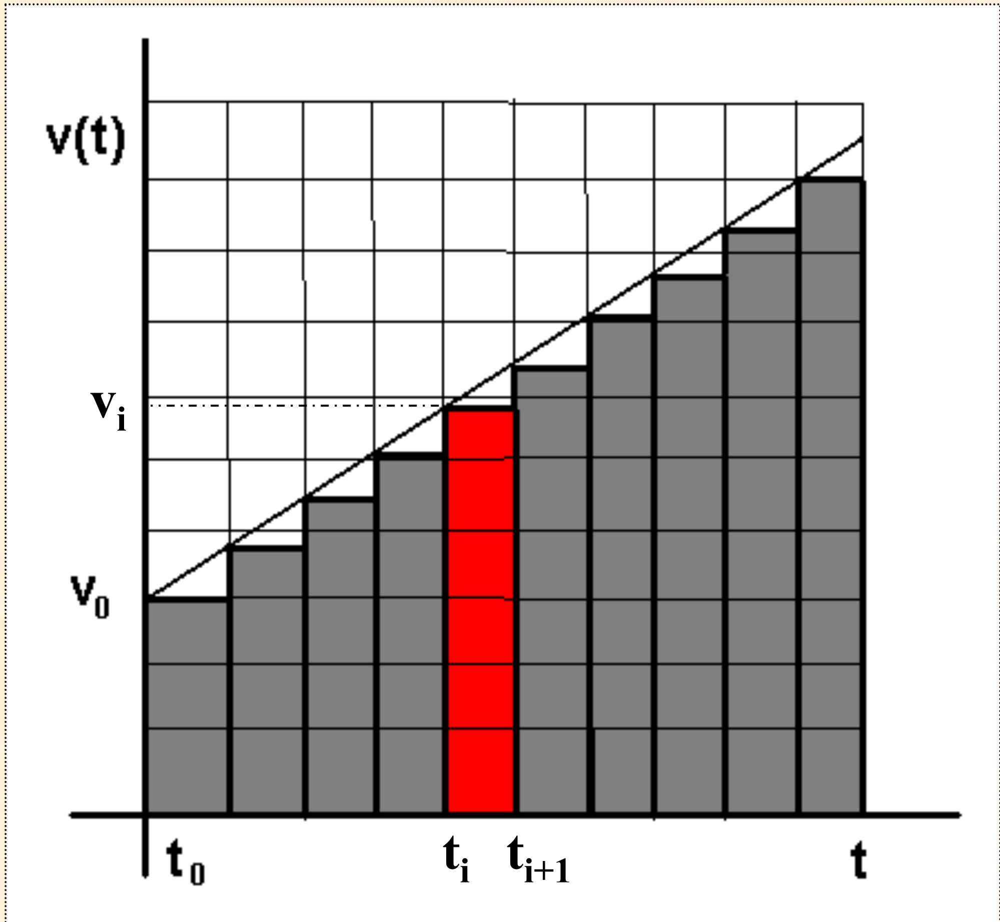
$$v(t) = v_0 + a(t - t_0)$$



y=a x+b

relazione di linearità

$$v(t) = v_0 + a\left(t - t_0\right)$$



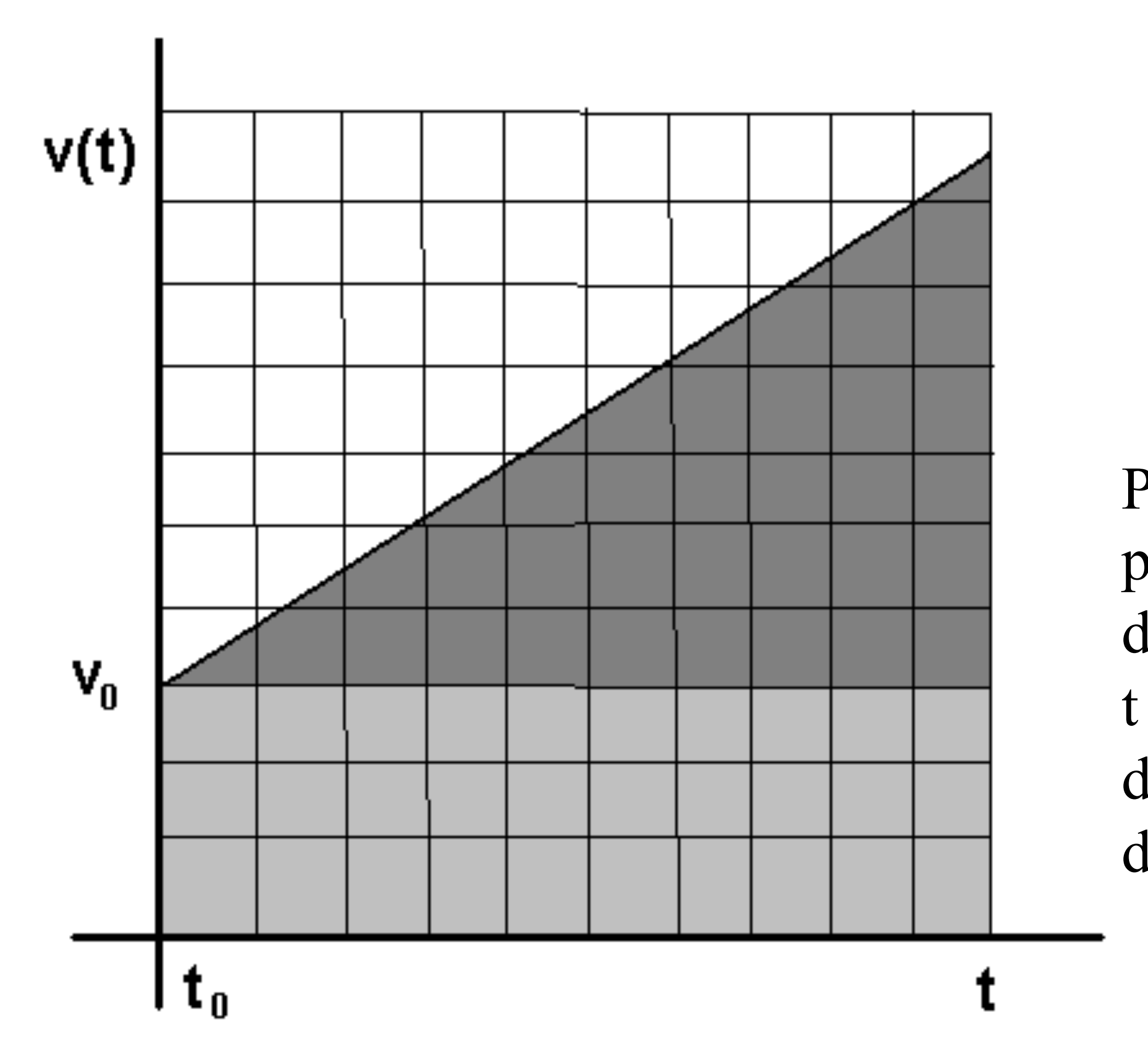
area del rettangolo rosso

$$\Delta x_i \cong \overbrace{v_i \left(t_{i+1} - t_i\right)}$$

$$\Delta x \cong \sum_i v_i \left(t_{i+1} - t_i\right)$$

$$x(t) - x_0 \cong \sum_i v_i \left(t_{i+1} - t_i\right)$$

<u>La sommatoria al secondo membro rappresenta l'area totale dei rettangoli sotto la traiettoria.</u>



Passando al limite per $t_{i+1} \rightarrow t_i$, il valore della sommatoria tende a quello dell'area sottesa dalla curva.

<u>L'area sottesa dalla curva, ovvero la somma delle regioni in grigio rappresenta lo spazio percorso nell'intervallo di tempo **$t - t_0$**</u>

Sommando l'area delle due regioni grigie otteniamo

$$x(t) - x_0 = v_0(t - t_0) + \frac{(v(t) - v_0)(t - t_0)}{2}$$

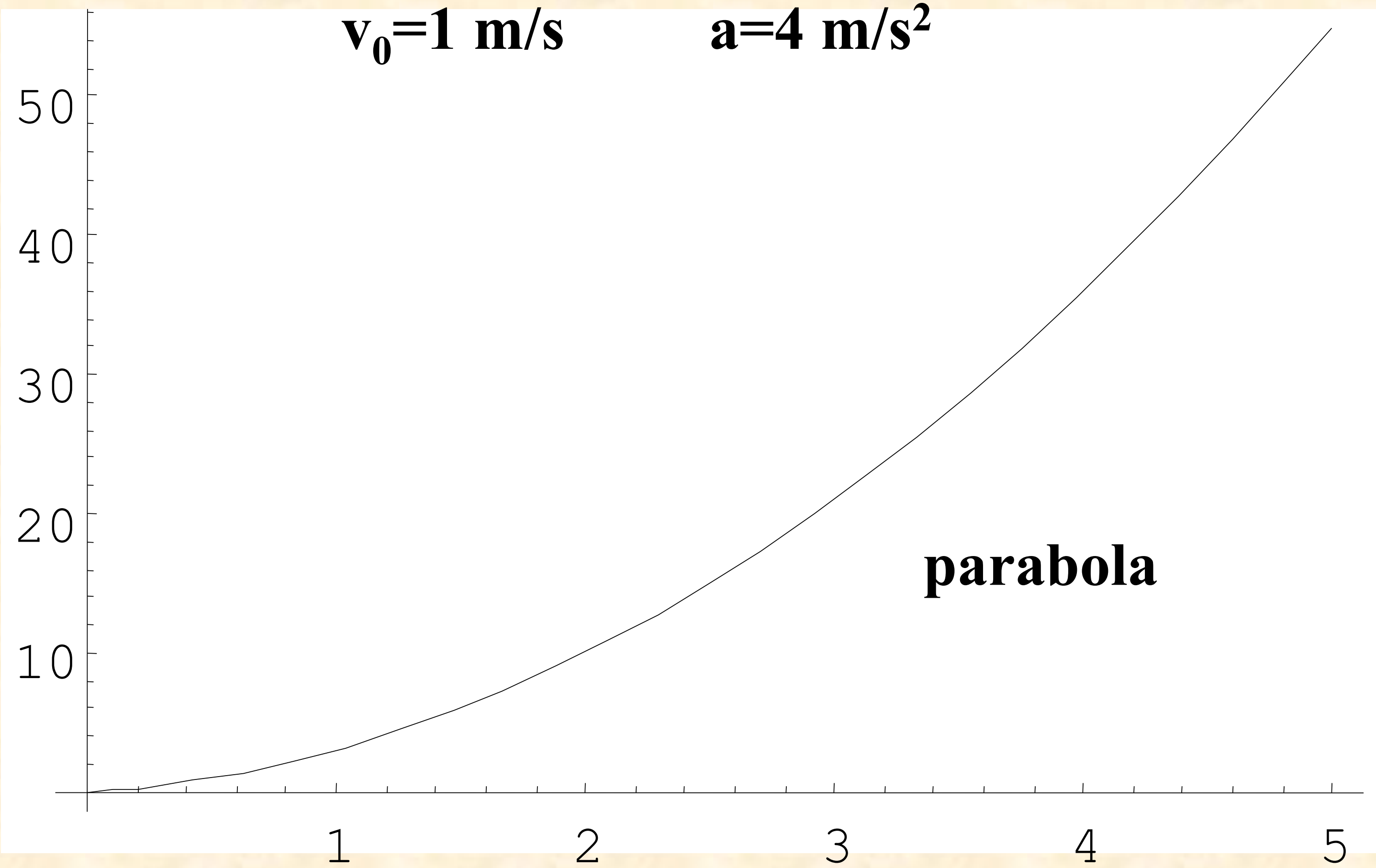
$$= v_0(t - t_0) + \frac{a(t - t_0)^2}{2}$$

che è la legge oraria per il moto uniformemente accelerato

$$x(t) = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{a}{2}(t - t_0)^2$$

$$x(t) - x_0 = v_0(t - t_0) + \frac{a(t - t_0)^2}{2}$$

$x(t) - x_0$



$t - t_0$

Moto misto

Consideriamo un moto uniformemente accelerato nel piano, ma con accelerazione diretta solo lungo l'asse ***y*** in verso negativo. In questo caso la legge oraria è

$$(t - t_0) = \frac{x(t) - x_0}{v_{x0}}$$

$$x(t) = x_0 + v_{x0}(t - t_0)$$

$$y(t) = y_0 + v_{y0}(t - t_0) - \frac{a}{2}(t - t_0)^2$$

Questo è un moto misto, perchè è la composizione di un moto a velocità costante lungo ***x*** e accelerato uniforme lungo ***y***.

Ricavando $t - t_0$ dalla prima e sostituendo nella seconda otteniamo

$$y - y_0 = \frac{v_{y0}}{v_{x0}}(x - x_0) - \frac{a}{2(v_{x0})^2}(x - x_0)^2$$

Se grafichiamo $y - y_0$ in funzione di $x - x_0$ otteniamo il grafico di una parabola.

Consideriamo, ad esempio, un cannone posto nell'origine degli assi, inclinato di 45° rispetto all'orizzontale, che spari un proiettile che esca dalla canna con velocità di **100 m/s**.

Il moto del proiettile è misto. Infatti ogni corpo è sottoposto alla forza gravitazionale che gli imprime una accelerazione costante verticale $g = 9.81\ m/s^2$ (indipendente dalla massa del corpo), diretta verso il centro della Terra.

In questo caso, quindi, l'accelerazione nella legge oraria è uguale all'accelerazione di gravità

$$\boldsymbol{a = g = 9.81\ m/s^2}$$

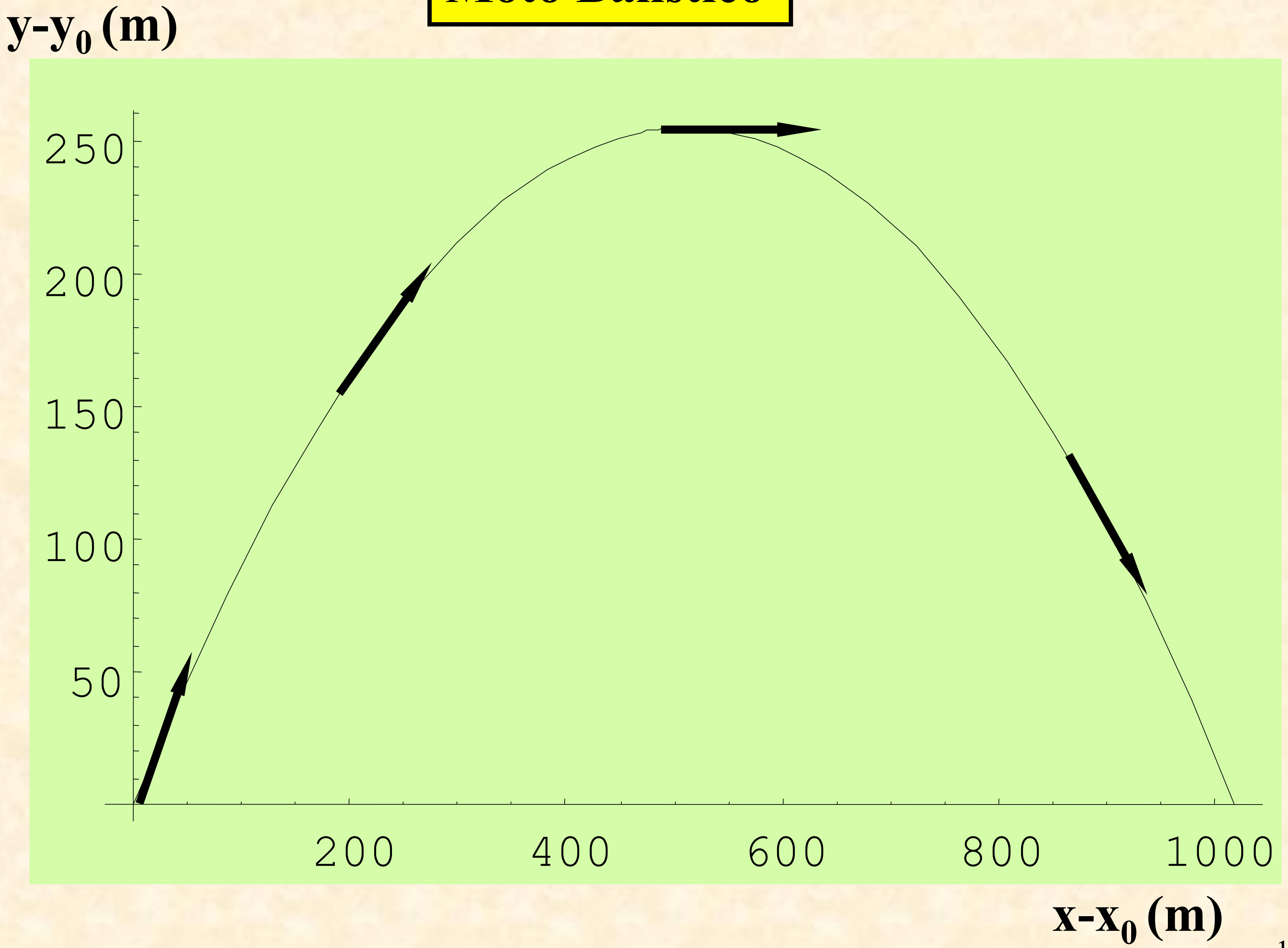
$\boldsymbol{y_0}$ e $\boldsymbol{x_0}$ sono nulli perchè per semplicità il cannone è posto nell'origine degli assi. $\boldsymbol{V_{x0}}$ e $\boldsymbol{V_{y0}}$ sono le componenti della velocità iniziale il cui modulo è fissato a 100 m/s con angolo di 45^0 ($\pi/4$) rispetto alla verticale. Ne consegue

$$\boldsymbol{V_{x0} = 100\ m/s\ \ \cos(\pi/4) = 70.71\ m/s}$$

$$\boldsymbol{V_{y0} = 100\ m/s\ \ \sin(\pi/4) = 70.71\ m/s}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Moto Balistico



Moto periodico

Un moto si dice periodico quando si ripete identico (ovvero assume stesse posizioni, velocità, accelerazioni, etc.) al trascorrere di intervalli fissi di tempo. L'intervallo di tempo minore che bisogna attendere per ritornare alla situazione iniziale è detto periodo e si indica con **T**.

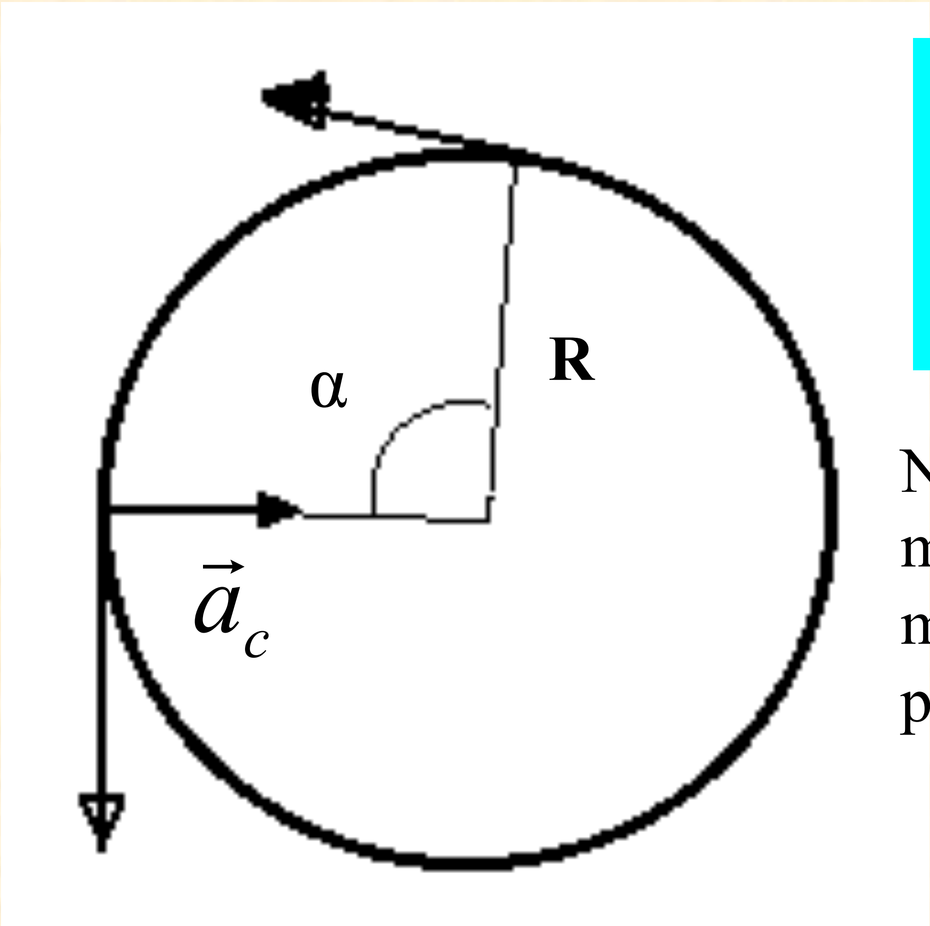
L'inverso del periodo è la frequenza

$$f = 1/T \quad [s^{-1}] \qquad\qquad [s^{-1}]=Hz$$

Essa rappresenta il numero di volte che si ripete il ciclo in un secondo.

Moto circolare uniforme

E' il moto che avviene lungo una circonferenza, nel quale vengono percorsi angoli (o archi) uguali in tempi uguali.



$$\frac{\alpha}{\Delta t} = \omega \left[\frac{rad}{s} \right]$$

Nel moto circolare uniforme il modulo della velocità è costante ma la direzione cambia istante per istante

$$V = \frac{R\alpha}{\Delta t} = \omega R$$

Dalla definizione di velocità angolare, di periodo e frequenza si ottiene

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

Nel moto circolare uniforme, variando la sola direzione della velocità istantanea, non c'è accelerazione tangenziale. Vi è solo accelerazione centripeta, $\vec{a}_c$

In modulo essa vale

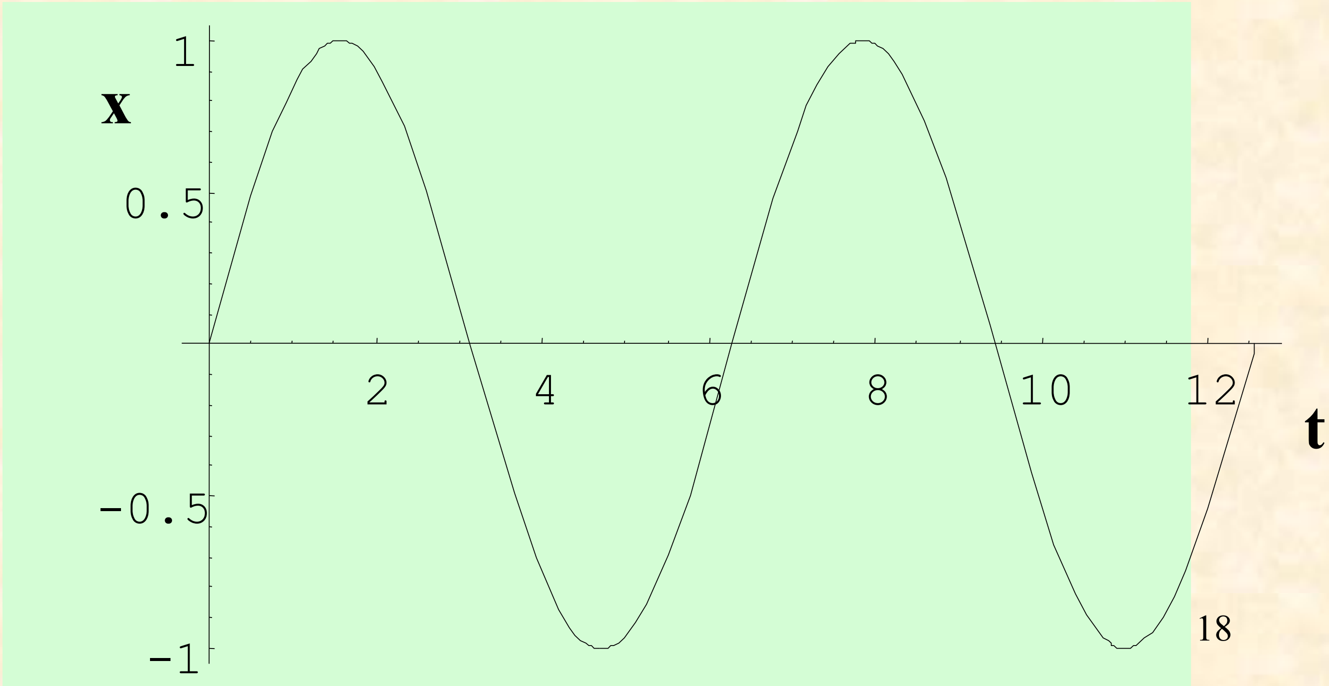
$$a_c = \frac{V^2}{R} = \omega^2 R$$

Moto armonico

Il moto armonico è un particolare caso di moto periodico. Esso si caratterizza per la relazione di diretta proporzionalità che c'è tra accelerazione e posizione:

$$a = - \omega^2 x$$

La legge oraria di un moto armonico è di tipo sinusoidale o cosinusoidale



Alcuni esempi di moto armonico:

• Nel moto circolare uniforme se si considerano le proiezioni del moto su uno degli assi, il punto proiezione si sposterà secondo un moto armonico.

• Un corpo sottoposto all'azione di una forza elastica si muove di moto armonico

• Tutti i moti periodici possono essere decomposti come sovrapposizione di moti armonici