Metodi Matematici per l'Ingegneria

Angelo Alvino

A.A.2016-17

Indice

Capitolo 1

Funzioni olomorfe

1.1 La funzione exp in campo complesso

Indichiamo con $\mathbb{C}$ il campo dei numeri complessi. Un numero complesso viene solitamente rappresentato in forma algebrica nel modo seguente

$$z = x + i\,y = \Re(z) + i\,\Im(z)\,.$$

Daremo per note le principali proprietà di $\mathbb{C}$; limitiamoci qui a ricordare che per "modulo" di z si intende la quantità

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

e che valgono le seguenti disuguaglianze triangolari

$$|z + z'| \leq |z| + |z'|\,, \qquad |\,|z| - |z'|\,| \leq |z - z'|\,. \tag{1.1}$$

Definizione 1.1.1. - *Si dice che una successione $\{z_n\}$ di numeri complessi converge a z, in simboli*

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z\,,$$

se

$$\lim_{n\to\infty} |z_n - z| = 0\,.$$

Si puó facilmente verificare che la successione di termine generale

$$z_n = x_n + i\,y_n$$

converge a $z = x + i\,y$ se e solo se la successione $\{(x_n, y_n)\}$ converge in $\mathbb{R}^2$ a (x, y). Ció equivale a dire che $\mathbb{C}$ puó essere identificato dal punto di vista topologico con $\mathbb{R}^2$.
Consideriamo la serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}\,. \tag{1.2}$$

Si puó dimostrare che la successione delle somme parziali della (1.2) converge per ogni z. Poiché la sua somma è $\exp x$ se $x \in \mathbb{R}$ è allora ragionevole porre

$$\exp z = e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}\,, \quad z \in \mathbb{C}\,. \tag{1.3}$$

Dimostriamo la seguente proprietà

$$e^{z+w} = e^z e^w \tag{1.4}$$

ben nota in campo reale. A tal fine richiamiamo il seguente risultato relativo alle successioni medie aritmetiche.

Proposizione 1.1.1. - *Sia $\{a_n\}$ una successione e a il suo limite; allora*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} = a\,.$$

Come conseguenza della prop. 1.1.1 si ha il seguente risultato.

Proposizione 1.1.2. - *Siano a, b i limiti delle successioni $\{a_n\}$, $\{b_n\}$; si ha*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 b_n + \cdots + a_n b_1}{n} = a\,b\,. \tag{1.5}$$

Dimostrazione. Abbiamo

$$\frac{a_1 b_n + \cdots + a_n b_1}{n} = \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}\, b + \frac{a_1(b_n - b) + \cdots + a_n(b_1 - b)}{n}\,. \tag{1.6}$$

Per la prop. 1.1.1 il primo termine a secondo membro nella (1.6) ha per limite $a\,b$. Per la proprietà triangolare (1.1) risulta inoltre

$$\left| \frac{a_n(b_1 - b) + \cdots + a_1(b_n - b)}{n} \right| \le \left(\sup_n |a_n| \right) \frac{|b_1 - b| + \cdots + |b_n - b|}{n}\,.$$

Sempre per la prop. 1.1.1 l'ultimo termine in (1.6) è infinitesimo. Si è ottenuto in tal modo la (1.5). □

Definizione 1.1.2. - *Per serie prodotto secondo Cauchy di due serie di termini generali a_k e b_k si intende la serie il cui termine n-mo è*

$$c_n = a_1 b_n + \cdots + a_n b_1 = \sum_{k=1}^{n} a_k b_{n-k+1}\,. \tag{1.7}$$

Proposizione 1.1.3. - *Se le serie di termini generali a_k e b_k sono assolutamente convergenti tale è anche la serie prodotto secondo Cauchy e si ha*

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k = \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k \right) \left(\sum_{k=1}^{\infty} b_k \right)\,. \tag{1.8}$$

Dimostrazione. L'assoluta convergenza della serie prodotto secondo Cauchy discende dalla disuguaglianza di semplice verifica

$$\sum_{k=1}^{n} |c_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k| \right) \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k| \right) .$$

Siano A_n, B_n, C_n e A, B, C le somme parziali e le somme delle serie di termini generali a_k, b_k, c_k. Essendo

$$C_n = a_1 B_n + \cdots + a_n B_1$$

risulta

$$\frac{C_1 + \cdots + C_n}{n} = \frac{A_n B_1 + \cdots + A_1 B_n}{n} .$$

Basta allora utilizzare le prop. 1.1.1 e 1.1.2 per ottenere la (1.8). □

Osservazione 1.1.1. - *La* (1.8) *sussiste anche se si assume che una sola delle due serie sia assolutamente convergente. Il risultato non vale se entrambe le serie sono solo convergenti. A tale proposito basta considerare il caso*

$$a_k = b_k = (-1)^{k-1} \frac{1}{\sqrt{k}} .$$

Procediamo ora alla verifica della (1.4). Si ha

$$\begin{aligned}
e^z\, e^w &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{w^k}{k!} \right) \\
&\quad \text{(per la (1.8))} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{z^k w^{n-k}}{k!(n-k)!} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k w^{n-k} \right) \\
&\quad \text{(per la formula del binomio di Newton)} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+w)^n}{n!} = e^{z+w} .
\end{aligned}$$

La serie (1.3) è assolutamente convergente; quindi è possibile riordinare i suoi termini senza alterarne la somma. Si ottiene pertanto la seguente relazione

$$\begin{aligned}
e^{iy} &= 1 + iy - \frac{y^2}{2} - i\frac{y^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} + \cdots \\
&= \left(1 - \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{4!} + \cdots \right) + i \left(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \cdots \right) \\
&= \cos y + i \sin y
\end{aligned}$$

da cui, per la (1.4),

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y)\,.$$

Si ottengono in tal modo le note formule di Eulero

$$\sin y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i}\,, \quad \cos y = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2} \tag{1.9}$$

che suggeriscono le seguenti estensioni a $\mathbb{C}$ delle funzioni trigonometriche seno e coseno

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\,, \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \tag{1.10}$$

ovvero

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}\,, \qquad \cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}\,.$$

1.2 Derivabilità in campo complesso

Se $z = x + iy$ sia

$$f(z) = f(x, y) = u(x, y) + i\, v(x, y) \tag{1.11}$$

una funzione definita in un aperto A del piano complesso.
Si puó introdurre in modo del tutto naturale la nozione di convergenza e di continuità. Occupiamoci di estendere quella di derivata.

Definizione 1.2.1. - *Si dice che f è derivabile in z se il rapporto incrementale*

$$\frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

è convergente, al tendere di Δz a zero, ad un complesso che prende il nome di derivata di f in z e si denota con uno dei simboli

$$f'(z)\,, \quad \frac{df}{dz}(z)\,.$$

Se f è derivabile in ogni punto di A si dice che f è "olomorfa" in A.

È appena il caso di osservare che continuano a sussistere le regole di derivazione valide per la derivata in campo reale relative alla derivata della somma, del prodotto e del quoziente di due funzioni, alla derivata di una funzione composta e a quella dell'inversa.

Teorema 1.2.1. - *Se f è olomorfa in A allora u e v sono differenziabili. Valgono inoltre le seguenti identità* (*equazioni di Cauchy-Riemann*)

$$u_x = v_y\,, \quad u_y = -v_x\,. \tag{1.12}$$

Dimostrazione. Si incrementi o solo la parte reale o solo la parte immaginaria di z. Si ha allora

$$f'(z) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h} = \lim_{k\to 0} \frac{f(x,y+k) - f(x,y)}{ik}$$

da cui

$$f' = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y} \tag{1.13}$$

ovvero

$$f' = u_x + i\, v_x = v_y - i\, u_y\,. \tag{1.14}$$

Abbiamo in tal modo ottenuto le (1.12).
Resta da verificare la differenziabilità di u, v ovvero dell'applicazione del piano in sé

$$F\,:\,(x,y) \longrightarrow (u(x,y), v(x,y))\,. \tag{1.15}$$

Ricordiamo che F è differenziabile se esiste un funzionale lineare J di $\mathbb{R}^2$ in sé tale che

$$\lim_{(h.k)\to(0,0)} \frac{\|F(x+h,y+k) - F(x,y) - J(h,k)\|}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0 \tag{1.16}$$

dove $\|\cdot\|$ indica la norma euclidea in $\mathbb{R}^2$. È noto che J si rappresenta mediante la matrice jacobiana

$$\begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}.$$

Per le (1.12) si ha allora

$$\begin{aligned} J(h,k) &= \begin{pmatrix} u_x & -v_x \\ v_x & u_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = (u_x h - v_x k, v_x h + u_x k) \\ &= (u_x + i v_x)(h + ik) \end{aligned}$$

da cui, per la (1.14), posto $\Delta z = h + ik$,

$$J(h,k) = f'(z)\Delta z\,.$$

Pertanto il numeratore in (1.16) diventa

$$|f(z+\Delta z) - f(z) - f'(z)\Delta z|\,.$$

La (1.16) discende dall'olomorfia di f. □

Osservazione 1.2.1. - *Dalle* (1.12) *si ha*

$$\begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = |f'|^2 \,. \tag{1.17}$$

Il determinante a primo membro è lo jacobiano della trasformazione (1.15)*.*

Ulteriori semplici conseguenze delle condizioni di Cauchy-Riemann (1.12) sono elencate nella seguente

Proposizione 1.2.1. - *Sia f olomorfa in un aperto A connesso.*

- *Se f' è identicamente nulla in A allora f è costante;*
- *se la parte reale o quella immaginaria di f è costante allora f è costante;*
- *se il modulo di f è costante allora anche f è costante.*

Esempio 1.2.1. - *La funzione*

$$z \longrightarrow \bar{z} = x - iy$$

non è olomorfa in quanto non risultano soddisfatte le (1.12)*.*
Piú in generale, se f è olomorfa tale non puó essere $\overline{f}$ a meno che f non sia costante.

Esempio 1.2.2. - *Poiché*

$$(z+\Delta z)^n - z^n = \Delta z[(z+\Delta z)^{n-1} + z(z+\Delta z)^{n-2} + \cdots + z^{n-1}] \tag{1.18}$$

si ha

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{(z+\Delta z)^n - z^n}{\Delta z} = n\, z^{n-1} \,.$$

Quindi, come nel caso reale, la derivata di z^n è nz^{n-1}.

In realtà le condizioni di Cauchy-Riemann caratterizzano le funzioni olomorfe. Sussiste infatti il seguente risultato.

Teorema 1.2.2. - *Se u, v sono differenziabili in A e se valgono le* (1.12) *allora la funzione $f = u + i\,v$ è olomorfa in A.*

Dimostrazione. Essendo u, v differenziabili si ha

$$\begin{aligned} u(x+h, y+k) - u(x,y) &= u_x(x,y)h + u_y(x,y)k + o\left(\sqrt{h^2+k^2}\right) \\ v(x+h, y+k) - v(x,y) &= v_x(x,y)h + v_y(x,y)k + o\left(\sqrt{h^2+k^2}\right) \,. \end{aligned}$$

Se $z = x + i\,y$ e $\Delta z = h + i\,k$ per le (1.12) risulta

$$f(z+\Delta z) - f(z) = [u_x(x,y) + i\,v_x(x,y)]\,\Delta z + o(|\Delta z|)$$

da cui l'olomorfia di f. □

Denotiamo con il simbolo $\arg z$ (si legge "argomento" di z) la funzione a piú valori che associa ad ogni z non nullo le determinazioni dell'angolo che il segmento orientato, i cui estremi sono l'origine e z, forma con il semiasse reale positivo. Con $\operatorname{Arg} z \in]-\pi, \pi]$ si denota la determinazione principale della funzione $\arg z$. Un numero complesso z si puó allora rappresentare ricorrendo alle coordinate polari

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}\,, \qquad \theta = \arg z\,.$$

Scriviamo la (1.11) come funzione di tali coordinate polari

$$f(z) = f(\rho\, e^{i\theta}) = f(\rho, \theta)\,.$$

Poiché

$$\frac{\partial f}{\partial \rho} = f'(z)\, e^{i\theta}\,, \quad \frac{\partial f}{\partial \theta} = f'(z)\, i\, \rho\, e^{i\theta} \tag{1.19}$$

si ha

$$\frac{\partial f}{\partial \rho} = \frac{1}{i\,\rho}\frac{\partial f}{\partial \theta}\,. \tag{1.20}$$

La (1.20) va letta come una ulteriore formulazione delle condizioni di Cauchy-Riemann.

1.3 Serie di potenze

Si consideri la serie di potenze di punto iniziale $z_0 \in \mathbb{C}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n\,. \tag{1.21}$$

Si puó caratterizzare l'insieme di convergenza facendo ricorso al seguente risultato per la cui dimostrazione rimandiamo a [6].

Proposizione 1.3.1. - *Se la serie* (1.21) *converge in un punto* w *allora essa converge totalmente in ogni cerchio di centro* z_0 *e raggio minore di* $|w - z_0|$.

Dalla prop. 1.3.1 si deduce che si puó verificare uno dei seguenti tre casi.

(i) La serie (1.21) converge per ogni z.

(ii) La serie (1.21) converge in un cerchio aperto di centro z_0 e raggio $r > 0$; essa non converge in alcun punto esterno a tale cerchio.

(iii) La serie (1.21) converge solo nel punto iniziale.

Nel caso (ii) il valore r prende il nome di "raggio di convergenza" della serie; tale termine viene usato anche negli altri due casi: nel primo si pone $r = +\infty$, nel terzo $r = 0$.
Il cerchio aperto di centro z_0 e raggio $r > 0$, ovvero tutto $\mathbb{C}$ se $r = +\infty$, è detto cerchio di convergenza della serie (1.21). La convergenza è uniforme in ogni compatto contenuto nel cerchio di convergenza.

Per il calcolo del raggio di convergenza si puó ricorrere al seguente risultato (cfr. per esempio [6]).

Teorema 1.3.1. (Teorema di Cauchy-Hadamard) - *Sia*

$$\frac{1}{r} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \tag{1.22}$$

con ovvio significato del simbolo se $r = 0$ oppure $r = +\infty$. Allora r è il raggio di convergenza della serie (1.21).
In particolare se la successione $\{\sqrt[n]{|a_n|}\}$ è regolare si ha

$$\frac{1}{r} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}\,.$$

Come nel caso reale è possibile dimostrare che una serie di potenze è derivabile termine a termine.

Teorema 1.3.2. - *La somma f della serie di potenze* (1.21) *è olomorfa; si ha inoltre*

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n (z - z_0)^{n-1}\,. \tag{1.23}$$

Dimostrazione. Possiamo ovviamente sempre ricondurci al caso $z_0 = 0$.
Ricorrendo alla (1.22) si puó dimostrare che la serie a secondo membro nella (1.23) ha lo stesso raggio di convergenza r della serie (1.21). Per la prop. 1.3.1 essa converge assolutamente nel cerchio di convergenza; si ha quindi

$$\sum_{n=1}^{\infty} n|a_n|\, h^{n-1} < +\infty \tag{1.24}$$

per ogni $h \in [0, r[$.
Fissato $h < r$, se z un punto del cerchio di convergenza, scegliamo δ in modo tale che $|z + \Delta z| \le h$ se $|\Delta z| \le \delta$.
Si ha

$$\Delta f = f(z + \Delta z) - f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n[(z + \Delta z)^n - z^n]$$

da cui, per la (1.18),

$$\frac{\Delta f}{\Delta z} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n[(z + \Delta z)^{n-1} + z(z + \Delta z)^{n-2} + \cdots + z^{n-1}]\,. \tag{1.25}$$

Poiché

$$\Big| a_n[(z+\Delta z)^{n-1} + z(z+\Delta z)^{n-2} + \cdots + z^{n-1}] \Big| \leq n|a_n|\, h^{n-1}$$

la serie a secondo membro di (1.25), se $|\Delta z| \leq \delta$, si maggiora con una serie numerica che è convergente per la (1.24). Essa allora converge totalmente e, quindi, uniformemente. Passando quindi al limite sotto il segno di serie nella (1.25) si ottiene la (1.23). □

Osservazione 1.3.1. - *Il teo.* 1.3.2 *implica che la somma di una serie di potenze di punto iniziale z_0 ha derivate di ordine m per ogni $m \in \mathbb{N}$. Queste si ottengono derivando m volte la* (1.21) *sotto il segno di serie. Si ha inoltre*

$$a_m = \frac{f^{(m)}(z_0)}{m!}\,. \tag{1.26}$$

1.4 Il teorema di Cauchy

Per il resto del capitolo con A indichiamo un aperto connesso del piano complesso.
Sia

$$\gamma \,:\, t \in [a,b] \longrightarrow \gamma(t) = x(t) + i\,y(t) \tag{1.27}$$

una curva generalmente regolare il cui sostegno sia contenuto in A. Per semplicità assumiamo che l'orientamento positivo sia quello delle t crescenti. Indichiamo con $+\gamma$ la curva (1.27) in tal modo orientata.
Se f è continua sul sostegno di γ il simbolo

$$\int_{+\gamma} f(z)\,dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt \tag{1.28}$$

denota l'integrale di f esteso a $+\gamma$.

Lemma 1.4.1. - *Si ha*

$$\left|\int_{+\gamma} f(z)\,dz\right| \leq \int_{\gamma} |f(z)|\,ds\,. \tag{1.29}$$

Dimostrazione. Sia g una funzione continua a valori complessi definita in un intervallo $[c,d]$. Se

$$\int_c^d g(t)\,dt \neq 0$$

risulta

$$\int_c^d g(t)\,dt = \left|\int_c^d g(t)\,dt\right| e^{i\,\theta}$$

per un opportuno $\theta \in [0, 2\pi[$. Abbiamo quindi

$$\left| \int_c^d g(t)\, dt \right| = \Re \left(\int_c^d e^{-i\theta}\, g(t)\, dt \right) = \int_c^d \Re \left(e^{-i\theta}\, g(t) \right)\, dt \leq \int_c^d |g(t)|\, dt\,.$$

Si ha pertanto

$$\left| \int_{+\gamma} f(z)\, dz \right| = \left| \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\, dt \right| \leq \int_a^b |f(\gamma(t))|\, |\gamma'(t)|\, dt = \int_\gamma |f(z)|\, ds$$

cioè la (1.29). □

Riscriviamo per esteso l'integrale (1.28)

$$\begin{aligned}
\int_{+\gamma} f(z)\, dz &= \int_a^b [u(x(t), y(t)) + i\, v(x(t), y(t))]\, [x'(t) + i\, y'(t)]\, dt \\
&= \int_a^b [u(x(t), y(t))\, x'(t) - v(x(t), y(t))\, y'(t)]\, dt \\
&+ i \int_a^b [u(x(t), y(t))\, y'(t) + v(x(t), y(t))\, x'(t)]\, dt \\
&= \int_{+\gamma} u\, dx - v\, dy \, + \, i \int_{+\gamma} v\, dx + u\, dy\,.
\end{aligned}$$

Quindi l'integrale (1.28) si esprime mediante gli integrali curvilinei delle due forme differenziali

$$u\, dx - v\, dy\,, \qquad v\, dx + u\, dy\,. \tag{1.30}$$

Se f è olomorfa tali forme differenziali risultano chiuse per le condizioni di Cauchy-Riemann. Esse quindi sono esatte se si assume che le funzioni u, v sono di classe C^1, ovvero se f' è continua e se A ha una opportuna proprietà topologica come indicato nel seguente risultato.

Lemma 1.4.2. (**Lemma di Poincaré**) - *Una forma differenziale a coefficienti di classe $C^1(A)$, chiusa in A, aperto convesso rispetto ad un punto, è esatta.*

Di conseguenza si ha:

Lemma 1.4.3. - *Sia f' continua in A aperto convesso rispetto ad un suo punto e sia γ una curva chiusa e generalmente regolare contenuta in A. Allora*

$$\int_{+\gamma} f(z)\, dz = 0\,. \tag{1.31}$$

Se la definizione di olomorfia viene opportunamente modificata con l'aggiunta della condizione di continuità di f' (cfr. per esempio [1]) allora vale la (1.31). D'altra parte questa puó essere ottenuta prescindendo da tale ulteriore condizione. Per pervenire a tale risultato premettiamo alcune nozioni di natura topologica.

Definizione 1.4.1. - *Siano γ_0 e γ_1 due curve regolari di estremi α e β, orientate da α a β e contenute in A. Conveniamo che per esse siano fissate rappresentazioni dipendenti da parametri che variano in $[0,1]$.*
Esse si dicono omotope in A se esiste un'applicazione regolare, per esempio di classe C^1,

$$(t,\tau) \in [0,1] \times [0,1] \longrightarrow \mathbf{H}(t,\tau) \in A \tag{1.32}$$

tale che, per ogni $t \in [0,1]$,

$$\begin{cases} \mathbf{H}(t,0) & = \gamma_0(t) \\ \\ \mathbf{H}(t,1) & = \gamma_1(t) \end{cases} \tag{1.33}$$

e, per ogni $\tau \in [0,1]$,

$$\mathbf{H}(0,\tau) = \alpha\,, \quad \mathbf{H}(1,\tau) = \beta\,. \tag{1.34}$$

Osservazione 1.4.1. - *Se si assume che il vettore $\mathbf{H}_t$ non sia mai nullo*

$$\gamma_\tau \,:\, t \in [0,1] \longrightarrow \mathbf{H}(t,\tau)$$

è per ogni τ una curva regolare. La (1.32) allora descrive, al variare di τ, il moto della curva γ_τ i cui estremi sono α e β per la (1.34); essa, per le (1.33), all'istante iniziale $\tau = 0$ coincide con γ_0 e all'istante finale $\tau = 1$ con γ_1. In sostanza la curva γ_0 subisce una deformazione che la trasforma con continuità in γ_1 senza che, durante tale processo, si esca dall'insieme A.

Definizione 1.4.2. - *Si dice che un aperto A è "semplicemente connesso" se curve di A con gli stessi estremi sono omotope. Una formulazione equivalente di tale proprietà asserisce che ogni curva regolare e chiusa contenuta in A è omotopa ad una curva a valori costanti, ad una curva cioè il cui sostegno si riduce ad un punto.*

Per riconoscere se un dominio è semplicemente connesso si puó ricorrere al seguente risultato per la cui dimostrazione rimandiamo a [8].

Teorema 1.4.1. (Teorema di Jordan) - *Sia γ una curva generalmente regolare, semplice e chiusa. Allora essa è la frontiera di un dominio limitato e semplicemente connesso.*

Diamo ora l'enunciato del teorema di Cauchy nella sua versione piú generale.

Teorema 1.4.2. (Teorema di Cauchy) - *Sia f una funzione olomorfa in A semplicemente connesso e sia γ una curva generalmente regolare, chiusa contenuta in A. Sussiste allora la* (1.31).

La dimostrazione prevede varie tappe.

Lemma 1.4.4. - *Sia f olomorfa in un cerchio C. Se T è un triangolo contenuto in C allora*

$$\int_{+\partial T} f(z)\,dz = 0 \tag{1.35}$$

dove l'orientamento positivo di ∂T è quello antiorario.

Dimostrazione. Indichiamo rispettivamente con d e p il diametro e il perimetro di T. Consideriamo i quattro triangoli T_1, T_2, T_3, T_4, tutti simili a T, ottenuti unendo mediante segmenti i punti medi dei lati di T. Si ha ovviamente

$$\int_{+\partial T} f\,dz = \sum_{i=1}^{4} \int_{+\partial T_i} f\,dz$$

e quindi

$$\left|\int_{+\partial T} f\,dz\right| \leq \sum_{i=1}^{4} \left|\int_{+\partial T_i} f\,dz\right| .$$

È possibile scegliere uno dei triangoli T_i, che denotiamo con $T^{(1)}$, tale che

$$\left|\int_{+\partial T} f\,dz\right| \leq 4 \left|\int_{+\partial T^{(1)}} f\,dz\right| .$$

Siano $d^{(1)}$ e $p^{(1)}$ rispettivamente il diametro e il perimetro di $T^{(1)}$; si ha ovviamente $d^{(1)} = 2^{-1}d$ e $p^{(1)} = 2^{-1}p$.
Ripetiamo la procedura con $T^{(1)}$ al posto di T. Si individua in tal modo un secondo triangolo $T^{(2)}$ simile a T per il quale si ha

$$\left|\int_{+\partial T^{(1)}} f\,dz\right| \leq 4 \left|\int_{+\partial T^{(2)}} f\,dz\right|$$

e quindi

$$\left|\int_{+\partial T} f\,dz\right| \leq 4^2 \left|\int_{+\partial T^{(2)}} f\,dz\right| .$$

Inoltre il diametro e il perimetro di $T^{(2)}$ sono la metà del diametro e del perimetro di T.
Cosí procedendo si determina una successione decrescente $\{T^{(n)}\}$ di triangoli simili. Se $d^{(n)}$ e $p^{(n)}$ denotano, rispettivamente, il diametro e il perimetro di $T^{(n)}$ si ha

$$d^{(n)} = 2^{-n}d \quad p^{(n)} = 2^{-n}p\,. \tag{1.36}$$

Inoltre per induzione si dimostra che

$$\left|\int_{+\partial T} f\,dz\right| \le 4^n \left|\int_{+\partial T^{(n)}} f\,dz\right| . \tag{1.37}$$

È noto che l'intersezione di una successione decrescente di compatti è non vuota. Tale è quindi l'intersezione dei triangoli $T^{(n)}$. Per la (1.36) la successione dei diametri di tali triangoli tende a zero; quindi l'intersezione dei triangoli si riduce ad un unico punto z_0 di A. Essendo f derivabile in z_0 si ha

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \varepsilon(z)(z - z_0)$$

con $\varepsilon(z)$ funzione infinitesima per z che tende a z_0.
La funzione

$$f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0)$$

è olomorfa e, inoltre, la sua derivata è continua. Pertanto (cfr. lemma 1.4.3) per essa vale senz'altro la (1.31); si ha allora

$$\int_{+\partial T^{(n)}} [f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0)]\,dz = 0$$

e quindi

$$\int_{+\partial T^{(n)}} f(z)\,dz = \int_{+\partial T^{(n)}} \varepsilon(z)(z - z_0)\,dz\,. \tag{1.38}$$

Fissato σ si scelga δ in modo tale che risulti $|\varepsilon(z)| < \sigma$ se $|z - z_0| < \delta$; si fissi poi l'indice n in modo tale che sia $d^{(n)} < \delta$. Il triangolo $T^{(n)}$ è allora contenuto nel cerchio di centro z_0 e raggio δ. Dalla (1.38), ricordando le (1.36) e la (1.29), si ha

$$\left|\int_{+\partial T^{(n)}} f(z)\,dz\right| \le \sigma \int_{\partial T^{(n)}} |z - z_0|\,ds \le \sigma d^{(n)} p^{(n)} = 4^{-n}\sigma d\,p$$

e quindi, per la (1.37),

$$\left|\int_{+\partial T} f(z)\,dz\right| \le \sigma d\,p\,.$$

Per l'arbitrarietà di σ si ha la (1.35). □

Osservazione 1.4.2. - *La* (1.31) *vale se* γ *è una poligonale chiusa; infatti in tal caso l'integrale curvilineo si puó scrivere come somma di integrali estesi a frontiere di triangoli.*

Definizione 1.4.3. - *Si dice che* F *è una "primitiva" di* f *in* A *se*

$$F'(z) = f(z)$$

per ogni $z \in A$.

Di immediata verifica sono i seguenti risultati.

Proposizione 1.4.1. - *Se F è una sua primitiva di f allora*

$$\int_{+\gamma} f(z)\,dz = F(\beta) - F(\alpha) \tag{1.39}$$

dove $+\gamma$ è una curva regolare orientata i cui estremi, nell'ordine, sono α e β.

Proposizione 1.4.2. - *Se F_1 e F_2 sono due primitive di f in A allora esse differiscono per una costante.*

Un primo importante risultato è il seguente.

Lemma 1.4.5. - *Sia f olomorfa in un cerchio C; allora f ha una primitiva. Sussiste inoltre la* (1.31) *per ogni curva chiusa γ contenuta in C.*

Dimostrazione. La funzione candidata ad essere la primitiva si costruisce in modo standard: sia $F(z)$ il valore che assume l'integrale di f esteso ad una poligonale, che colleghi il centro di C e z, formata da due tratti rettilinei il primo parallelo all'asse reale, il secondo all'asse immaginario. Se $+\gamma$ è il segmento di estremi z e $z + \Delta z$, orientato dal primo al secondo punto, utilizzando in modo opportuno il lemma 1.4.4, si dimostra che

$$F(z+\Delta z) - F(z) = \int_{+\gamma} f(\zeta)\,d\zeta\,. \tag{1.40}$$

Si ha quindi

$$\begin{aligned}\left|\frac{F(z+\Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z)\right| &= \frac{1}{|\Delta z|}\left|\int_{+\gamma} [f(\zeta) - f(z)]\,d\zeta\right| \\ &\quad \text{(per la (1.29))} \\ &\leq \frac{1}{|\Delta z|}\int_{\gamma} |f(\zeta) - f(z)|\,ds\end{aligned}$$

da cui, essendo f continua, si ottiene $F'(z) = f(z)$.
Dalla (1.39) si ottiene che l'integrale di f esteso ad una curva chiusa è nullo. □

Lemma 1.4.6. - *Siano γ_0 e γ_1 due curve regolari orientate di estremi α e β. Se esse sono omotope in A risulta*

$$\int_{+\gamma_0} f(z)\,dz = \int_{+\gamma_1} f(z)\,dz\,. \tag{1.41}$$

Dimostrazione. L'applicazione (1.32) trasforma il quadrato $[0,1] \times [0,1]$ in un compatto contenuto in A; la sua distanza d dalla frontiera di A è positiva.

Per il teorema di Cantor, fissato $\varepsilon < d$, è possibile determinare δ in modo tale che

$$|\mathbf{H}(t,\tau') - \mathbf{H}(t,\tau'')| = |\gamma_{\tau'}(t) - \gamma_{\tau''}(t)| < \varepsilon \tag{1.42}$$

per ogni t e per ogni τ', τ'' con $|\tau' - \tau''| < \delta$. Fissato τ' ricopriamo la curva $\gamma_{\tau'}$ con la famiglia $\mathcal{F}$ dei cerchi aperti di raggio ε i cui centri sono i punti della curva. L'unione dei cerchi di $\mathcal{F}$ è un aperto; se $|\tau - \tau'| < \delta$ la curva γ_τ è contenuta in tale aperto per la (1.42). L'unione delle due curve, in quanto insieme compatto, è ricopribile con un numero finito $C_1, C_2, \cdots, C_n$ di cerchi della famiglia $\mathcal{F}$; si puó fare in modo che il primo contenga α, l'ultimo β, e che l'intersezione di due successivi cerchi C_i e C_{i+1} sia non vuota.
Siano F_1 e F_2 due primitive di f, la prima in C_1, la seconda in C_2 la cui esistenza è assicurata dal lemma 1.4.5. Per la prop. 1.4.2, a patto di aggiungere a F_2 una costante, possiamo fare in modo che F_1 coincida con F_2 nell'intersezione di C_1 e C_2. Resta in tal modo definita una primitiva di f nell'insieme unione dei primi due cerchi. Con la stessa procedura è possibile estendere la primitiva da C_1 all'unione dei cerchi C_i. Per la (1.39) si ha

$$\int_{+\gamma_\tau} f(z)\,dz = \int_{+\gamma_{\tau'}} f(z)\,dz \qquad |\tau - \tau'| < \delta\,. \tag{1.43}$$

Scegliamo ora una decomposizione

$$0 = \tau_0 < \tau_1 < \cdots < \tau_{n-1} < \tau_n = 1$$

di $[0,1]$ tale che ogni intervallo $[\tau_i, \tau_{i+1}]$ abbia ampiezza minore di δ. Per la (1.43) si ha

$$\int_{+\gamma_{\tau_i}} f(z)\,dz = \int_{+\gamma_{\tau_{i+1}}} f(z)\,dz$$

per ogni i. Ció implica la (1.41). □

Dimostrazione del teorema di Cauchy: Sia γ una curva chiusa contenuta in A aperto semplicemente connesso. Se $\alpha\,, \beta \in \gamma$ si considerino i due archi di γ di estremi α e β presi nell'ordine. Essendo tali curve omotope, per il lemma 1.4.6 si ha la (1.31).
Come ulteriore conseguenza del lemma 1.4.6 si ha il seguente risultato.

Teorema 1.4.3. - *Sia f olomorfa in A semplicemente connesso. Allora f è dotata di primitiva in A.*

Dimostrazione. Fissato z_0 in A si costruisca la funzione che attribuisce a un punto z di A il valore dell'integrale di f esteso ad una qualsiasi curva di estremi z_0 e z. La verifica che tale funzione è una primitiva di f è standard (cfr. dimostrazione del lemma 1.4.5). □

Le def. 1.4.1 e 1.4.2 di omotopia e di semplice connessione, proposte nel caso bidimensionale, possono essere ovviamente estese, la prima a curve di $\mathbb{R}^N$, la seconda ad aperti di $\mathbb{R}^N$.
Il teorema di Cauchy assicura che una funzione olomorfa ha una primitiva ovvero che le due forme differenziali (1.30) chiuse sono esatte nell'ipotesi che l'insieme in cui le funzioni sono definite sia semplicemente connesso. La dimostrazione puó essere facilmente adattata per ottenere un criterio di integrabilità per forme differenziali chiuse nel piú generale contesto degli spazi $\mathbb{R}^N$.
Ricordiamo che una forma differenziale

$$\sum_{i=1}^{N} X_i(x_1, \cdots, x_N)\, dx_i\,, \tag{1.44}$$

i cui coefficienti X_i sono di classe $C^1(A)$ con A aperto di $\mathbb{R}^N$, è chiusa se

$$\frac{\partial X_i}{\partial x_j} = \frac{\partial X_j}{\partial x_i}$$

per ogni coppia di indici i, j.

Sussiste il seguente risultato.

Teorema 1.4.4. - *Una forma differenziale chiusa, a coefficienti di classe C^1, definita in un aperto semplicemente connesso è esatta.*

1.5 Analiticità

L'obiettivo di tale paragrafo è invertire il risultato del teo. 1.3.2, far vedere cioè che una funzione olomorfa in un aperto A è sviluppabile in serie di potenze di punto iniziale a per ogni $a \in A$. una funzione siffatta dicesi "analitica".
Strumento essenziale è il seguente risultato.

Teorema 1.5.1. (Formula integrale di Cauchy) - *Sia f olomorfa in A e sia C un cerchio contenuto in A. Se z è interno a C si ha*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{+\partial C} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta\,. \tag{1.45}$$

Dimostrazione. La funzione sotto il segno di integrale in (1.45) è olomorfa nell'insieme non semplicemente connesso $A \backslash \{z\}$.
Per poter applicare il teorema di Cauchy procediamo nel modo seguente.
Sia ε tale che il cerchio C_ε di centro z e raggio ε sia interno a C. Fissato σ eliminiamo i punti di $C \backslash C_\varepsilon$, appartenenti al settore con vertice in z e apertura σ, della forma

$$z + \rho\, e^{i\theta}\,, \quad \theta \in]0, \sigma[\,.$$

La frontiera dell'insieme $C_{\varepsilon,\sigma}$ in tal modo ottenuto è una curva generalmente regolare, semplice e chiusa costituita dalle circonferenze ∂C e ∂C_ε, private degli archi intercettati dal settore, e da due segmenti appartenenti alle rette che delimitano il settore stesso. Essa puó essere vista come una curva chiusa contenuta in un insieme semplicemente connesso in cui la funzione sotto il segno di integrale in (1.45) è olomorfa. È possibile applicare il teo. 1.4.2; si ha quindi

$$\int_{+\partial C_{\varepsilon,\sigma}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = 0\,.$$

Facciamo tendere σ a zero; tenendo conto che i contributi relativi ai due segmenti che fanno parte di $\partial C_{\varepsilon,\sigma}$, per questioni di continuità, tendono a compensarsi l'uno con l'altro, si ha

$$\int_{+\partial C} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \int_{+\partial C_\varepsilon} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta\,. \tag{1.46}$$

Alla (1.46) si poteva pervenire piú semplicemente osservando che le curve chiuse ∂C e ∂C_ε sono omotope e applicando il lemma 1.4.6.
Risulta

$$\int_{+\partial C_\varepsilon} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = i\int_0^{2\pi} f(z + \varepsilon e^{i\theta})\, d\theta\,. \tag{1.47}$$

Per la continuità di f si ha

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{2\pi} f(z + \varepsilon e^{i\theta})\, d\theta = 2\pi f(z)\,. \tag{1.48}$$

Dalle (1.46), (1.47), (1.48) si ottiene la (1.45). □

Definizione 1.5.1. - *Se $z_0 \in A$ per distanza di z_0 dalla frontiera ∂A di A si intende la seguente quantità*

$$\operatorname{dist}(z_0, \partial A) = \inf_{z\in\partial A} |z - z_0|\,.$$

Teorema 1.5.2. - *Se f è olomorfa in A e $z_0 \in A$ allora f è somma di una serie di potenze di punto iniziale z_0. Il raggio di convergenza di tale serie è non minore della distanza di z_0 da ∂A.*

Dimostrazione. Sia γ_r la circonferenza di centro z_0 e raggio $r < \operatorname{dist}(z_0, \partial A)$. Per la (1.45) risulta

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{+\gamma_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \tag{1.49}$$

per ogni z interno a γ_r.
Essendo

$$\left|\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right| = \frac{|z - z_0|}{r} < 1\,, \qquad \zeta \in \gamma_r$$

si ha

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0} \frac{1}{1 - \dfrac{z - z_0}{\zeta - z_0}} = \frac{1}{\zeta - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^n$$

e quindi

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}} f(\zeta) \,. \tag{1.50}$$

Poiché f è limitata su γ_r la serie a secondo membro in (1.50) si maggiora con una serie geometrica convergente; quindi essa è totalmente convergente. La (1.49) diventa

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^n \int_{+\gamma_r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \, d\zeta$$

ovvero

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \tag{1.51}$$

con

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{+\gamma_r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \, d\zeta \,. \tag{1.52}$$

Per il modo in cui abbiamo scelto scelto r possiamo anche concludere che il raggio di convergenza della serie (1.51) è almeno pari alla distanza del punto iniziale dalla frontiera di A. $\square$

Osservazione 1.5.1. - *In quanto somma di una serie di potenze f è dotata di derivate di qualsiasi ordine. Per i coefficienti dello sviluppo* (1.51) *vale quindi la* (1.26)*.*

Proponiamo ora alcuni importanti risultati che discendono dal teo. 1.5.2.

Teorema 1.5.3. - *Sia f olomorfa in A. Se γ_r è la frontiera di un cerchio di centro z_0 e raggio $r < \operatorname{dist}(a, \partial A)$ allora vale la "proprietà di media"*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi r} \int_{\gamma_r} f \, ds \,. \tag{1.53}$$

Inoltre per ogni $m \in \mathbb{N}$ sussistono le "diseguaglianze di Cauchy"

$$|f^{(m)}(a)| \leq \frac{m!}{r^m} \sup_{\gamma_r} |f| \,. \tag{1.54}$$

Dimostrazione. Dalla (1.52) si ha

$$f(z_0) = a_0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{+\gamma_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \, d\zeta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) \, d\theta$$

ovvero la (1.53).
Dalla (1.52), ricordando la (1.26) nonché la (1.29), si ottiene inoltre facilmente la (1.54). □

Teorema 1.5.4. - *Sia f olomorfa in un aperto A e sia D un dominio contenuto in A con frontiera sufficientemente regolare. Allora*

$$\int_{+\partial D} f(z)\, dz = 0 \tag{1.55}$$

e

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{+\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \tag{1.56}$$

per ogni z interno a D.

Dimostrazione. Sia $f = u + i\, v$; le funzioni u, v sono di classe C^1. Per le formule di Gauss-Green si ha quindi

$$\begin{aligned}\int_{+\partial D} f(z)\, dz &= \int_{+\partial D} u\, dx - v\, dy \;+\; i\int_{+\partial D} v\, dx + u\, dy\\ &= -\int_D (u_y + v_x)\, dxdy + i\int_D (-v_y + u_x)\, dxdy\end{aligned}$$

e quindi, per le (1.12), si ottiene la (1.55).
Per dimostrare (1.56) basta applicare la (1.55) al dominio $D\backslash C$, dove C è un cerchio di centro z contenuto in D, e alla funzione olomorfa

$$\zeta \in D\backslash C \longrightarrow \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,.$$

Si ha allora

$$\int_{+\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \int_{+\partial C} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$$

da cui, per la (1.45), si ottiene la (1.56). □

Osservazione 1.5.2. - *Per la* (1.56) *i valori assunti da una funzione olomorfa all'interno di un dominio a frontiera sufficientemente regolare sono determinati in modo univoco dai valori che essa assume sul bordo. Tale proprietà marca una ulteriore significativa differenza tra le funzioni derivabili nel campo reale e le funzioni olomorfe.*

Osservazione 1.5.3. - *Si puó dimostrare che è possibile derivare sotto il segno di integrale la* (1.56)*. Si ottiene la seguente formula*

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{+\partial D} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\, d\zeta \tag{1.57}$$

con z interno a D.
Su tale questione ritorneremo piú avanti (*cfr. prop.* 1.11.4)*.*

Il seguente risultato inverte il teorema di Cauchy.

Teorema 1.5.5. (Teorema di Morera) - *Sia f una funzione continua in A. Se per ogni triangolo T contenuto in A sussiste la* (1.35) *allora f è olomorfa.*

Dimostrazione. Ragionando come nella dimostrazione del lemma 1.4.5 la (1.35) consente di costruire una funzione F per la quale vale la (1.40). La continuità di f consente di dimostrare che F è una primitiva di f; tale funzione, in quanto derivata di una funzione olomorfa, è olomorfa. □

Teorema 1.5.6. (Teorema di Liouville) - *Sia f una funzione intera, una funzione cioè olomorfa in tutto il piano complesso. Se f è limitata allora essa è costante.*

Dimostrazione. Sia

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\, z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, z^n$$

lo sviluppo in serie di potenze di punto iniziale zero di f. Per le (1.54) si ha

$$|a_n| \leq \frac{M}{r^n}$$

dove M è l'estremo superiore di f e r è un qualsiasi numero positivo. Ció comporta che tutti i coefficienti a_n con $n > 0$ sono nulli. La funzione f è quindi costante. □

Dal teorema di Liouville discente il seguente risultato noto come "teorema fondamentale dell'algebra" per la cui dimostrazione rimandiamo a [1] e [6].

Teorema 1.5.7. - *Ogni polinomio di grado non nullo ammette almeno una soluzione in $\mathbb{C}$.*

Definizione 1.5.2. - *Sia A un aperto del piano. Una funzione $u \in C^2(A)$ si dice "armonica" se risolve in A l'equazione di Laplace*

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0\,. \tag{1.58}$$

L'operatore Δ prende il nome di "laplaciano".

Proposizione 1.5.1. - *La parte reale e il coefficiente dell'immaginario di una funzione olomorfa f sono armoniche.*

Dimostrazione. Sia $f = u + i\,v$; basta allora derivare la prima delle equazioni di Cauchy-Riemann rispetto alla variabile x e la seconda rispetto a y per ottenere che u è armonica. In modo analogo si prova che v è armonica. □

Lo stretto collegamento tra funzioni olomorfe e funzioni armoniche è descritto dal seguente risultato.

Proposizione 1.5.2. - *Sia u armonica in A, insieme semplicemente connesso del piano. Allora è possibile definire una ulteriore funzione armonica v, unica a meno di una costante, tale che*

$$f(x + i\,y) = u(x, y) + i\,v(x, y) \tag{1.59}$$

è olomorfa in A.

Dimostrazione. La forma differenziale

$$\omega = -u_y\,dx + u_x\,dy$$

è chiusa e, quindi, per il teo. 1.4.4, esatta. Sia v una primitiva di ω; si ha

$$v_x = -u_y\,, \quad v_y = u_x\,.$$

Le funzioni u e v verificano le condizioni di Cauchy-Riemann (1.12); la funzione (1.59) è quindi olomorfa per il teo. 1.2.2. □

Definizione 1.5.3. - *Se nella* (1.51) *i coefficienti a_n sono nulli per $n < m$ e se $a_m \neq 0$ si dice che z_0 è uno zero per f di ordine m. Si ha allora*

$$f(z) = (z - z_0)^m f_m(z) \tag{1.60}$$

con $f_m(z_0) \neq 0$.

Teorema 1.5.8. - *Se z_0 è uno zero di ordine m per f allora esiste un intorno di z_0 in cui f non ha altri zeri.*

Dimostrazione. La funzione f_m, in quanto diversa da zero in z_0, non si annulla in un intorno di z_0; per la (1.60) in tale intorno f si annulla solo in z_0. □

Osservazione 1.5.4. - *Il teo.* 1.5.8 *implica che gli zeri di una funzione sono punti isolati. L'insieme degli zeri puó avere punti di accumulazione: essi vanno a collocarsi sulla frontiera del dominio di olomorfia. Una importante conseguenza di ció è che se due funzioni olomorfe coincidono su insiemi che non sono costituiti di soli punti isolati esse devono coincidere in tutto l'aperto in cui esse sono definite.*

Teorema 1.5.9. - *Se in un punto z_0 la funzione f si annulla con tutte le sue derivate, cioè se z_0 è uno zero di ordine infinito, allora f è identicamente nulla.*

Dimostrazione. Se f e tutte le sue derivate si annullano in un punto z_0 lo sviluppo di Taylor di f di punto iniziale z_0 ha tutti i coefficienti nulli; quindi f è nulla in un intorno di z_0. Pertanto l'insieme dei punti in cui f e tutte le derivate si annullano è un aperto. Tale è ovviamente anche il complementare; questo deve essere vuoto in quanto l'insieme di olomorfia è connesso. □

1.6 Le funzioni elementari in campo complesso

In tale paragrafo diamo qualche cenno sulle procedure da seguire per estendere al campo complesso alcune delle funzioni elementari definite in ambito reale. Il modello cui far riferimento è quello proposto nel primo paragrafo in relazione alla funzione esponenziale e alle funzioni seno e coseno. Per quanto detto nell'oss. 1.5.4 tali prolungamenti da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{C}$ sono univocamente determinati.

Definizione 1.6.1. - *Siano f, g due funzioni olomorfe rispettivamente negli aperti A e B; se $A \subset B$ e se le due funzioni f, g coincidono in A si dice che g è il "prolungamento analitico"di f in B.*

Sia C il cerchio di convergenza di una serie di potenze; chiamiamo "elemento analitico" tale serie. Se f è la somma della serie e z è un punto di C si consideri lo sviluppo in serie di Taylor di f di punto iniziale z. Per il teo. 1.5.2 il raggio del cerchio di convergenza di tale ulteriore elemento analitico puó anche essere maggiore della distanza di z da ∂C; è possibile in tal caso prolungare f in un insieme piú ampio di C. Se si fa variare z in C si ottiene un prolungamento di f in un aperto costituito dall'unione dei cerchi di convergenza di tutte tali serie di Taylor di f i cui punti iniziali sono i punti di C. Si puó ripetere ovviamente la procedura in modo da prolungare ulteriormente f. A partire quindi da un elemento analitico è possibile definire una funzione, eventualmente multivoca, per la quale si usa il termine di "prolungamento analitico" di f. Per maggiori dettagli su tale nozione e sui fenomeni che si possono riscontrare si rimanda a [6] (Cap. V, n.5).

1. - Il logaritmo

Dall'identità
$$z = |z|e^{i \arg z} = e^{\log|z| + i \arg z}$$
si ha che i numeri complessi $w = \log|z| + i \arg z$ rappresentano tutte le soluzioni dell'equazione $e^w = z$. In analogia con la terminologia usata nel campo reale, per definizione, il logaritmo in ambito complesso è la funzione a piú valori

$$\log z = \log|z| + i \arg z = \log|z| + i \operatorname{Arg} z + 2k\pi i \qquad k \in \mathbb{Z}\,. \tag{1.61}$$

Se $k = 0$ in (1.61) si ottiene una funzione definita in $\mathbb{C}$ privato della semiretta cui appartengono i reali non positivi; la restrizione di tale funzione al semiasse dei reali positivi restituisce l'ordinaria funzione logaritmo in campo reale. Utilizzando le (1.20) si verifica che tale funzione è olomorfa; inoltre, per la (1.19) abbiamo
$$\frac{d \log}{dz}(z) = \frac{1}{z}\,.$$
Ovviamente è sempre possibile scegliere differenti intervalli di variabilità dell'argomento di z. Si ottiene in ogni caso una funzione olomorfa. Il logaritmo quindi presenta infiniti rami; si passa dall'uno all'altro percorrendo per intero una circonferenza con centro nell'origine facendo variare con continuità i valori

dell'argomento. L'origine prende pertanto il nome di "punto di diramazione" ed è un punto singolare per la funzione.
La funzione logaritmo rappresenta un primo esempio di funzione olomorfa a piú valori. Tale fenomeno, noto come "polidromia"(cfr. [6]), puó essere meglio descritto se si costruisce la funzione logaritmo a partire dall'elemento analitico

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}(z-1)^n$$

con la procedura di prolungamento descritta all'inizio del paragrafo.
In generale, per fissare un ramo della funzione logaritmo, si puó far riferimento al seguente risultato.

Proposizione 1.6.1. - *Sia A semplicemente connesso; supponiamo che $1 \in A$ e $0 \notin A$. È allora possibile definire in A un ramo della funzione logaritmo.*

Dimostrazione. Per il teo. 1.4.3 la funzione z^{-1} ha una primitiva F in A che si annulla in 1. Risulta pertanto

$$(z \exp(-F(z)))' = 0\,.$$

Poiché A è connesso si ha

$$z \exp(-F(z)) = \exp(-F(1)) = e^0 = 1$$

e quindi $\exp(F(z)) = z$. La funzione F rappresenta un ramo del logaritmo definito in A. □

Dimostriamo ora la seguente generalizzazione della prop. 1.6.1.

Proposizione 1.6.2. - *Sia f olomorfa in un aperto semplicemente connesso A. Se f non ha zeri in A esiste una funzione g olomorfa in A tale che $f = \exp g$. Essa è un ramo della funzione polidroma $\log f$.*

Dimostrazione. Poiché f è diversa da zero la funzione f'/f è olomorfa in A insieme semplicemente connesso. Si puó costruire in modo standard una sua primitiva. Essa ha la seguente espressione

$$g(z) = \int_{+\gamma} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}\, d\zeta + c_0\,,$$

dove γ è una curva contenuta in A, di estremi z_0, punto fisso, e z, orientata da z_0 a z e c_0 è una costante da determinare. Si ha

$$g'(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}$$

da cui

$$(f(z) \exp(-g(z)))' = 0\,.$$

Esiste pertanto una costante c tale che

$$f(z) = c\,\exp(g(z))$$

e quindi

$$f(z_0) = c\,\exp(g(z_0)) = c\,\exp c_0\,.$$

Se $c_0 = \log f(z_0)$ si ha $c = 1$ e quindi $f = \exp g$. $\square$

2. - Potenza ad esponente reale

Attraverso la funzione logaritmo è possibile definire nel campo complesso la funzione potenza ad esponente reale α nel modo seguente

$$z^\alpha = e^{\alpha \log z} = |z|^\alpha e^{i\,\alpha \arg z}\,. \tag{1.62}$$

Se α è irrazionale la funzione presenta una infinità numerabile di rami; se invece $\alpha = m/n$ con $n > 1$ la funzione (1.62) ha esattamente n rami. Per fissare una determinazione si procede come nel caso della funzione logaritmo; si opera un taglio del piano complesso escludendo i punti appartenenti ad una semiretta uscente dall'origine, per esempio, la semiretta dei reali negativi. Se si conviene di scegliere in (1.62) come argomento di z quello principale resta fissato il ramo la cui restrizione al semiasse reale positivo restituisce la funzione potenza nel campo reale. La derivata di tale funzione è ovviamente $\alpha\, z^{\alpha-1}$.
Se $\alpha = 1/2$ la funzione radice quadrata ha due rami. La determinazione la cui restrizione all'asse dei reali positivi è l'ordinaria funzione potenza in campo reale è

$$\sqrt{|z|}\,\exp\left(\frac{i}{2}\operatorname{Arg} z\right)\,.$$

3. - Le funzioni trigonometriche

Riprendiamo ora lo studio delle funzioni trigonometriche (1.10).
Se $z = x\,+\,i\,y$ si verifica facilmente che

$$\sin z = \sin x \cosh y + i\,\cos x \sinh y\,.$$

Da tale formula si deduce che il seno non ha altri zeri oltre quelli reali; inoltre, contrariamente a quanto si verifica per la corrispondente funzione definita in $\mathbb{R}$, essa non è limitata. Analoghe considerazioni possono essere fatte per la funzione coseno.

Soffermiamoci ora sulla estensione della funzione arcoseno a $\mathbb{C}$.
Per ogni $z \in \mathbb{C}$ consideriamo l'equazione nell'incognita w

$$z = \sin w = \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i}\,.$$

Si ha

$$e^{iw} = iz + \sqrt{1 - z^2} = f(z)\,.$$

La funzione f è una funzione con due rami; i punti di diramazione sono -1 e 1. Per fissarne uno ramo bisogna effettuare nel piano complesso dei tagli tali che una curva chiusa non possa avvolgersi attorno ad uno solo dei due punti di diramazione. Ció si realizza per esempio escludendo i punti di due semirette dell'asse reale i cui estremi sono 1 e -1. Si ottiene in tal modo un insieme semplicemente connesso. Se si tiene conto che f non si annulla in tale insieme è possibile applicare la prop. 1.6.2. Esiste quindi una funzione g tale che

$$\exp g(z) = iz + \sqrt{1-z^2}$$

da cui

$$w = \frac{1}{i}\, g(z) = \frac{1}{i} \log\left(iz + \sqrt{1-z^2}\right) .$$

Ha senso quindi porre

$$\arcsin z = \frac{1}{i} \log\left(iz + \sqrt{1-z^2}\right) .$$

La funzione arcoseno è una funzione polidroma. È ovviamente possibile fissarne una la cui restrizione all'intervallo $]-1,1[$ restituisce la ordinaria funzione arcoseno. Si ha inoltre

$$(\arcsin)'(z) = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} .$$

A partire dalla funzione tangente, definita in modo usuale come rapporto del seno e del coseno, introduciamo la funzione arcotangente.
Consideriamo l'equazione nell'incognita w

$$z = \tan w = \frac{\sin w}{\cos w} = \frac{1}{i}\frac{e^{iw} - e^{-iw}}{e^{iw} + e^{-iw}} .$$

Si ha allora

$$e^{2iw} = \frac{i-z}{i+z} . \tag{1.63}$$

Se eliminiamo dal piano complesso due semirette dell'asse immaginario di estremi i e $-i$ otteniamo un insieme semplicemente connesso in cui la funzione a secondo membro in (1.63) non si annulla. Ricorrendo di nuovo alla prop. 1.6.2 è possibile definire la funzione arcotangente nel modo seguente

$$\arctan z = \frac{1}{2i} \log \frac{i-z}{i+z} .$$

Anche in questo caso abbiamo costruito una funzione polidroma: i e $-i$ sono punti di diramazione. È possibile selezionarne un ramo in modo che la restrizione all'asse reale restituisca l'ordinaria funzione arcotangente. Abbiamo infine

$$(\arctan)'(z) = \frac{1}{1+z^2} .$$

1.7 Sviluppi in serie di Laurent

Sia z_0 un punto di un aperto A e sia f olomorfa in $A \backslash \{z_0\}$. La (1.45) consente di scrivere la funzione f come somma di una serie di potenze di $(z - z_0)$ con esponenti in $\mathbb{Z}$.

Teorema 1.7.1. - *Sia C un cerchio di centro z_0 contenuto in A. Se $z \in C \backslash \{z_0\}$ vale la seguente formula*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n \,, \tag{1.64}$$

nota come "sviluppo in serie di Laurent" di f di punto iniziale z_0. Si ha

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{+\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \, d\zeta \,, \quad n \in \mathbb{Z} \tag{1.65}$$

con γ circonferenza con centro in z_0 contenuta in C.
La convergenza di (1.64) *è uniforme in ogni compatto contenuto in $C \backslash \{z_0\}$.*

Dimostrazione. Consideriamo la corona circolare $C_{r,R}$ delimitata dalle due circonferenze γ_r, γ_R di centro z_0 e raggi r, R con $r < R$. Per la (1.56) si ha

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{+\gamma_R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{+\gamma_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta \tag{1.66}$$

per ogni z interno a $C_{r,R}$.
Per il primo integrale a secondo membro si puó seguire la stessa procedura utilizzata nella dimostrazione del teo. 1.5.2; quindi esso si scrive come una serie di potenze di punto iniziale z_0.
Consideriamo il secondo integrale. Se $\zeta \in \gamma_r$ si ha

$$\left| \frac{\zeta - z_0}{z - z_0} \right| = \frac{r}{|z - z_0|} < 1 \,. \tag{1.67}$$

Vale la seguente identità

$$\frac{1}{\zeta - z} = -\frac{1}{z - z_0} \, \frac{1}{1 - \dfrac{\zeta - z_0}{z - z_0}} = -\frac{1}{z - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\zeta - z_0}{z - z_0} \right)^n \;;$$

inoltre, per la (1.67), la convergenza è uniforme al variare di ζ su γ_r. Risulta pertanto

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{+\gamma_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(z - z_0)^n} \int_{+\gamma_r} (\zeta - z_0)^{n-1} f(\zeta) \, d\zeta \,.$$

Abbiamo ottenuto quindi la (1.64).

È inoltre evidente che la convergenza della serie è uniforme nella corona circolare $C_{r,R}$ e, quindi, in ogni compatto contenuto in $C\backslash\{z_0\}$.
Per quel che riguarda infine le espressioni dei coefficienti a_n basta osservare che gli integrali che compaiono nelle (1.65) sono indipendenti dalla particolare circonferenza γ scelta. □

Nello sviluppo (1.64) la serie di potenze ad esponenti non negativi prende il nome di "parte regolare" mentre la serie i cui termini sono potenze ad esponenti negativi si chiama "parte singolare".

Si possono verificare i seguenti casi.

- Lo sviluppo (1.64) si riduce alla sola parte regolare. È allora possibile prolungare per continuità f in z_0 in modo da ottenere una funzione olomorfa anche in z_0. Si parla in tal caso di "singolarità eliminabile".
- Nella parte singolare di (1.64) sono presenti solo un numero finito di termini; esiste cioè un intero $m \in \mathbb{N}$ tale che $a_{-m} \neq 0$ e $a_{-n} = 0$ se $n > m$. Si dice allora che f presenta in z_0 un "polo di ordine m".
- Esistono infiniti indici negativi n in corrispondenza dei quali i coefficienti (1.65) sono diversi da zero. Si dice che z_0 è una "singolarità essenziale".

Per ognuno dei casi sopra descritti si parla di singolarità isolata.

Proposizione 1.7.1. - *Se f è limitata in un intorno di z_0 allora z_0 è una singolarità eliminabile per f.*

Dimostrazione. Vale la (1.66). Consideriamo il secondo dei due integrali. Poiché

$$|\zeta - z| \geq |z - z_0| - r\,, \qquad \forall \zeta \in \gamma_r$$

e $|f(\zeta)| \leq M$ per una opportuna costante M, si ha

$$\left| \int_{+\gamma_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \right| \leq \frac{2\,\pi M\, r}{|z - z_0| - r}$$

da cui

$$\lim_{r \to 0} \int_{+\gamma_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = 0$$

e quindi

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{+\gamma_R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$$

per $z \neq z_0$. Basta allora ricordare la dimostrazione del teo. 1.5.2 per concludere. □

Proposizione 1.7.2. - *Se z_0 è uno zero di ordine m per f allora $1/f$ ha in z_0 un polo di ordine m. Viceversa se z_0 è un polo di ordine m per f la funzione $1/f$ ha in z_0 uno zero di ordine m.*

Dimostrazione. Basta applicare la formula (1.60). □

Proposizione 1.7.3. - *Il punto z_0 è un polo per f se e solo se*

$$\lim_{z\to z_0} |f(z)| = +\infty \,. \tag{1.68}$$

Dimostrazione. Se z_0 è un polo di ordine m per f si ha

$$\lim_{z\to z_0} (z-z_0)^m f(z) = a_{-m} \neq 0$$

da cui si ottiene facilmente la (1.68).
Viceversa, se vale la (1.68), la funzione $1/f$ è limitata in un intorno di z_0 ed è anche infinitesima. Per la prop. 1.7.1 essa deve avere uno zero in z_0; tale punto quindi è un polo per f per la prop. 1.7.2. □

Esempio 1.7.1. - *Siano P, Q polinomi irriducibili e siano z_j gli zeri di Q ciascuno con molteplicità m_j. La funzione razionale P/Q è olomorfa in $\mathbb{C}$ privato degli zeri di Q; in z_j essa presenta un polo di ordine m_j per la prop.* 1.7.2.

In base alle prop. 1.7.1 e 1.7.3 per riconoscere se un punto z_0 è una singolarità essenziale basta riconoscere che la funzione $|f(z)|$ non è regolare in z_0. Un risultato piú preciso sul comportamento di f in un intorno di una singolarità essenziale è contenuto nel seguente

Teorema 1.7.2. (**Teorema di Casorati-Weierstrass**) - *Se f presenta una singolarità essenziale in un punto z_0 allora il codominio di f è denso in $\mathbb{C}$.*

Dimostrazione. Procediamo per assurdo. Esistono allora un punto $w \in \mathbb{C}$ ed un valore r positivo tali che

$$|f(z) - w| > r$$

per ogni z appartenente al campo di olomorfia di f.
La funzione $g(z) = (f(z) - w)^{-1}$ è quindi limitata; per la prop. 1.7.1 essa è regolare in z_0. Se $g(z_0) \neq 0$ la funzione f è regolare in z_0; se invece $g(z_0) = 0$, per la prop. 1.7.2, la funzione $f - w$ presenta in z_0 un polo. In ogni caso si perviene ad un assurdo. □

Esempio 1.7.2. - *Sussiste il seguente sviluppo di Laurent*

$$e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\frac{1}{z^n} \,.$$

Lo zero quindi è una singolarità essenziale per la funzione considerata. Si verifica facilmente che il codominio della funzione è $\mathbb{C}\backslash\{0\}$.

Lo sviluppo in serie di Laurent puó essere utilizzato per classificare il comportamento all'infinito di una funzione olomorfa.

Sia f olomorfa nel complementare di un cerchio. La funzione

$$g \,:\, \zeta \neq 0 \longrightarrow g(\zeta) = f\left(\frac{1}{\zeta}\right) \tag{1.69}$$

è allora olomorfa in un intorno circolare dell'origine C privato dell'origine stessa. Il suo sviluppo in serie di Laurent

$$g(\zeta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n \zeta^n$$

ha i seguenti coefficienti (cfr. (1.65))

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{+\gamma_r} \frac{g(\zeta)}{\zeta^{n+1}}\, d\zeta$$

dove γ_r è la circonferenza con centro nell'origine e raggio r contenuta in C. Allora, operando il cambio di variabili $\zeta = 1/z$, per f si ottiene il seguente sviluppo in un intorno del punto all'infinito

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n \tag{1.70}$$

dove

$$a_n = b_{-n} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\gamma_{1/r}} \frac{f(z)}{z^{n+1}}\, dz\,. \tag{1.71}$$

Si attribuisce al punto all'infinito lo stesso tipo di singolarità che g ha in zero. In particolare l'infinito è un polo di ordine m se lo sviluppo (1.70) ha la seguente forma

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{m} a_n z^n$$

con $a_m \neq 0$. L'infinito è una singolarità essenziale per f se nella parte singolare

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n z^n$$

infiniti coefficienti sono non nulli.
Il punto all'infinito è regolare per f se nello sviluppo (1.70) compaiono solo termini con potenze ad esponente non positivo. In particolare se

$$a_n = 0 \qquad n = 0, -1, \cdots, -(m-1) \qquad a_m \neq 0$$

si dice che l'infinito è uno zero di ordine m per f. È evidente che l'infinito è uno zero di ordine m per f se e solo se l'origine è uno zero dello stesso ordine per la funzione (1.69).

1.8 Il teorema dei residui

Tra tutti i coefficienti (1.65) un ruolo importante è assunto dal termine

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{+\gamma} f(z)\, dz = \mathrm{Res}(f; z_0) \tag{1.72}$$

noto come "residuo" di f in z_0.
È possibile anche definire il residuo all'infinito nel modo seguente

$$\mathrm{Res}(f; \infty) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\gamma} f(z)\, dz\,. \tag{1.73}$$

Ovviamente nella (1.73) la curva γ è una circonferenza di centro l'origine e f è olomorfa in tutti i punti ad essa esterni.
In analogia con quanto fatto per le singolarità al finito, è possibile mettere in relazione tale residuo con un opportuno coefficiente dello sviluppo (1.70). Dalle (1.71) si deduce che

$$\mathrm{Res}(f; \infty) = -a_{-1}\,. \tag{1.74}$$

Contrariamente al caso dei punti al finito il residuo puó essere non nullo pur essendo f regolare all'infinito.

Sussistono i seguenti risultati.

Teorema 1.8.1. (Teorema dei residui) - *Sia f olomorfa in $A\backslash\{z_1, \cdots, z_k\}$ e sia D un sottoinsieme limitato di A a frontiera sufficientemente regolare; si assume inoltre che D contenga al proprio interno i punti singolari z_j. Si ha allora*

$$\int_{+\partial D} f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} \mathrm{Res}(f; z_j)\,. \tag{1.75}$$

Dimostrazione. Siano $C_j \subset D$ cerchi centrati in z_j a due a due disgiunti. Per il teo. 1.5.4 si ha

$$\int_{+\partial D} f(z)\, dz + \sum_{j=1}^{k} \int_{-\partial C_j} f(z)\, dz = 0\,.$$

Si ottiene allora la (1.75) se si tiene conto della formula (1.72). □

Teorema 1.8.2. - *Sia f una funzione olomorfa in $\mathbb{C}\backslash\{z_1, \cdots, z_k\}$. Allora*

$$\sum_{j=1}^{k} \mathrm{Res}(f; z_j) + \mathrm{Res}(f; \infty) = 0\,. \tag{1.76}$$

Dimostrazione. Consideriamo una circonferenza γ, con centro in zero, che contenga al proprio interno i punti singolari di f. Per il teo. 1.5.4 si ha

$$\int_{+\gamma} f(z)\,dz + \sum_{j=1}^{k} \int_{-\gamma_j} f(z)\,dz = 0$$

con γ_j circonferenza di centro z_j che sia interna a γ e che non contenga altri punti singolari oltre z_j e che non si intersechi con nessuna delle altre circonferenze. Si ottiene allora la (1.76) ricordando le espressioni (1.72) e (1.73) dei residui nei punti al finito e all'infinito. $\square$

Il calcolo del residuo è relativamente semplice nel caso di una singolarità polare. Si puó infatti procedere secondo quanto indicato nel seguente risultato.

Proposizione 1.8.1. - *Sia z_0 un polo di ordine m per f. Allora*

$$\mathrm{Res}(f; z_0) = \lim_{z\to z_0} \frac{1}{(m-1)!}[(z-z_0)^m f(z)]^{(m-1)}\,. \tag{1.77}$$

In particolare, se z_0 è un polo del primo ordine, si ha

$$\mathrm{Res}(f; z_0) = \lim_{z\to z_0} (z-z_0) f(z)\,. \tag{1.78}$$

Dimostrazione. Proviamo la (1.78). Si ha

$$f(z) = \frac{a_{-1}}{z-z_0} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

da cui

$$\lim_{z\to z_0} (z-z_0) f(z) = a_{-1}$$

ovvero la (1.78).
Sia z_0 un polo di ordine $m > 1$. Allora a_{-1} è il coefficiente di $(z-z_0)^{m-1}$ dello sviluppo in serie di potenze di punto iniziale z_0 della funzione

$$(z-z_0)^m f(z)\,.$$

La (1.77) discende allora dalla (1.26). $\square$

Proposizione 1.8.2. - *Il residuo all'infinito di una funzione f è uguale al residuo in zero della funzione*

$$-\frac{1}{\zeta^2} f\left(\frac{1}{\zeta}\right)\,.$$

Dimostrazione. Basta operare il cambio di variabile $z = \zeta^{-1}$ nella (1.73). $\square$

Concludiamo con una formula attraverso la quale è possibile determinare il numero degli zeri di una funzione olomorfa attraverso il calcolo di un integrale esteso alla frontiera del dominio al cui interno sono collocati gli zeri.

Teorema 1.8.3. (Formula dell'indicatore logaritmo) - *Sia f olomorfa in A e sia D un dominio regolare di A. Se $z_1, \cdots, z_k$ sono zeri di f, rispettivamente di ordini $m_1, \cdots, m_k$, tutti interni a D, allora*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{+\partial D}\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \sum_{j=1}^{k} m_j\,. \tag{1.79}$$

Dimostrazione. Per la (1.60) si ha

$$f'(z) = (z - z_j)^{m_j - 1}[m_j f_{m_j}(z) + (z - z_j) f'_{m_j}(z)] = (z - z_j)^{m_j - 1} g_{m_j}(z)$$

con $g_{m_j}(z_j) \neq 0$. Quindi z_j è uno zero di ordine $(m_j - 1)$ per f'. Ció comporta che la funzione f'/f presenta in ogni z_j un polo del primo ordine. Per la (1.78) si ha allora

$$\mathrm{Res}\,(f'/f; z_j) = \lim_{z\to z_j}\frac{g_{m_j}(z)}{f_{m_j}(z)} = m_j\,.$$

Da tale formula e dal teo. 1.8.1 si ottiene facilmente la (1.79). □

1.9 Applicazioni del teorema dei residui

Tale paragrafo è dedicato al calcolo di alcuni integrali di funzioni a valori reali; i risultati sono frutto di un uso accorto del teorema dei residui.
Premettiamo alcuni risultati.

Lemma 1.9.1. - *Sia f continua nel settore*

$$S_1 = \{z\,:\, |z - z_0| \geq r_0\,, \quad \alpha \leq \arg(z - z_0) \leq \beta\}$$

con $\alpha, \beta \in [0, 2\pi]$. Se

$$\lim_{|z|\to\infty}(z - z_0) f(z) = \lambda \tag{1.80}$$

allora

$$\lim_{r\to\infty}\int_{+\gamma_r} f(z)\,dz = i\,\lambda\,(\beta - \alpha) \tag{1.81}$$

dove γ_r è l'arco di circonferenza, di centro z_0 e raggio r, contenuto in S_1 e orientato in senso antiorario.

Dimostrazione. Per la (1.80), fissato ε è possibile determinare r_ε in modo tale che risulti

$$|(z - z_0) f(z) - \lambda| < \varepsilon \tag{1.82}$$

se $|z| > r_\varepsilon$.

Osservato che
$$\int_{+\gamma_r} \frac{dz}{z-z_0} = i\,(\beta-\alpha)\,,$$
se $r > r_\varepsilon$, si ha
$$\begin{aligned}
\left|\int_{+\gamma_r} f(z)\,dz - i\,\lambda\,(\beta-\alpha)\right| &= \left|\int_{+\gamma_r}\left[f(z)-\frac{\lambda}{z-z_0}\right]dz\right| \\
&\quad \text{(per la (1.29))} \\
&\le \int_{\gamma_r} \frac{|(z-z_0)f(z)-\lambda|}{|z-z_0|}\,ds \\
&\quad \text{(per la (1.82))} \\
&\le \varepsilon\,(\beta-\alpha)\,.
\end{aligned}$$
Dall'arbitrarietà di ε discende la (1.81). □

Lemma 1.9.2. - *Sia f una funzione continua in*
$$S_2 = \{z \,:\, 0 < |z-z_0| \le r_0\,, \quad \alpha \le \arg(z-z_0) \le \beta\}$$
con $\alpha, \beta \in [0, 2\pi]$. Se
$$\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z) = \lambda$$
allora

(1.83)
$$\lim_{r\to 0}\int_{+\gamma_r} f(z)\,dz = i\lambda(\beta-\alpha)$$

dove γ_r è l'arco di circonferenza, di centro z_0 e raggio r, contenuto in S_2 e orientato in senso antiorario.

Dimostrazione. Si procede come nel lemma 1.9.1. La (1.82) in questo caso sussiste se $|z-z_0| < r_\varepsilon$ per un opportuno $r_\varepsilon < r_0$. □

Lemma 1.9.3. - *Sia f continua in*
$$S_3 = \{z \,:\, |z| \ge r_0\,, \quad \alpha \le \arg z \le \beta\}$$
con $\alpha, \beta \in [0, \pi]$. Se

(1.84)
$$\lim_{|z|\to\infty} f(z) = 0$$

si ha

(1.85)
$$\lim_{r\to\infty}\int_{+\gamma_r} e^{i\mu z} f(z)\,dz = 0$$

per ogni $\mu > 0$; la curva γ_r è l'arco di circonferenza, con centro nell'origine e raggio r, contenuto in S_3 e orientato in senso antiorario.

Dimostrazione. Si ha

$$
\begin{aligned}
\left|\int_{+\gamma_r} e^{i\mu z} f(z)\,dz\right| &\leq \int_{\gamma_r} |f(z)||e^{i\mu z}|\,ds \leq r\,\max_{\gamma_r}|f| \int_\alpha^\beta e^{-\mu r\sin\theta}\,d\theta \\
&\leq r\,\max_{\gamma_r}|f| \int_0^\pi e^{-\mu r\sin\theta}\,d\theta = 2r\,\max_{\gamma_r}|f| \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\mu r\sin\theta}\,d\theta \\
&\quad \big(\text{essendo } \sin\theta \geq 2\pi^{-1}\theta \text{ in } [0,\pi/2]\big) \\
&\leq 2r\,\max_{\gamma_r}|f| \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-2\mu r\pi^{-1}\theta}\,d\theta \\
&\leq 2r\,\max_{\gamma_r}|f| \int_0^{+\infty} e^{-2\mu r\pi^{-1}\theta}\,d\theta \\
&= \max_{\gamma_r}|f| \int_0^\infty e^{-\mu\pi^{-1}s}\,ds = \frac{\pi}{\mu}\,\max_{\gamma_r}|f|\,.
\end{aligned}
$$

Per la (1.84) si ha

$$\lim_{r\to\infty}\max_{\gamma_r}|f| = 0\,;$$

si ottiene quindi la (1.85). □

Riportiamo ora alcuni esempi.

1. Sia

$$f(z) = \frac{1-e^{iz}}{z^2}\,.$$

Se $0 < r < R$ poniamo

$$C_{r,R} = \{z\,:\, r \leq |z| \leq R\,,\quad 0 \leq \arg z \leq \pi\}\,.$$

Siano γ_r e γ_R le semicirconferenze, rispettivamente di raggio r e R, parte della frontiera di $C_{r,R}$.

Per il teo. 1.4.2 si ha

$$0 = \int_{+\partial C_{r,R}} f(z)\,dz = 2\int_r^R \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx + \int_{-\gamma_r} f(z)\,dz + \int_{+\gamma_R} f(z)\,dz$$

da cui

$$\int_r^R \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\gamma_r} f(z)\,dz + \frac{1}{2}\int_{+\gamma_R} f(z)\,dz\,. \tag{1.86}$$

Essendo

$$|1-e^{iz}| \leq 1 + e^{-\Im(z)} \leq 2$$

si ha
$$\lim_{z\to\infty} z\,f(z) = 0$$
e quindi, per la (1.80),
$$\lim_{R\to\infty} \int_{+\gamma_R} f(z)\,dz = 0\,.$$
Poiché
$$\lim_{z\to 0} z f(z) = -i\,,$$
per il lemma 1.9.2 si ha
$$\lim_{r\to 0} \int_{-\gamma_r} f(z)\,dz = -\pi\,.$$
Facendo tendere r a zero e R a infinito nella (1.86) si ha
$$\int_0^\infty \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}\,.$$

2. Scelti $C_{r,R}$, γ_r e γ_R come nell'es. 1, per il teo. 1.4.2 si ha
$$0 = \int_{+\partial C_{r,R}} \frac{e^{iz}}{z}\,dz = 2i\int_r^R \frac{\sin x}{x}\,dx + \int_{+\gamma_R} \frac{e^{iz}}{z}\,dz + \int_{-\gamma_r} \frac{e^{iz}}{z}\,dz$$
da cui
$$\int_r^R \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{i}{2}\int_{+\gamma_R} \frac{e^{iz}}{z}\,dz + \frac{i}{2}\int_{-\gamma_r} \frac{e^{iz}}{z}\,dz\,. \tag{1.87}$$
Al primo integrale a secondo membro nella (1.87) è possibile applicare il lemma 1.9.3. Infatti la funzione z^{-1} soddisfa (1.84); per la (1.85) si ha
$$\lim_{R\to\infty} \int_{+\gamma_R} \frac{e^{iz}}{z}\,dz = 0\,.$$
Al secondo integrale si puó applicare il lemma 1.9.2; abbiamo
$$\lim_{r\to 0} \int_{-\gamma_r} \frac{e^{iz}}{z}\,dz = -i\pi\,.$$
Facendo tendere r a zero e R a infinito nella (1.87) si ha in definitiva
$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}\,. \tag{1.88}$$
Da sottolineare che la funzione nell'integrale a primo membro della (1.88) non è sommabile; si tratta quindi di un "integrale improprio".

3. Per dimostrare che
$$\int_0^{\infty} \frac{\log x}{x^2+a^2}\, dx = \pi \frac{\log a}{2a}$$
si integra la funzione
$$\frac{\log z}{z^2+a^2} \tag{1.89}$$
lungo la frontiera del dominio $C_{r,R}$ dell'es.1 con $r < a < R$. Si applica quindi il teorema dei residui tenendo in conto che il punto singolare $i\,a$ della funzione (1.89) è interno a $C_{r,R}$.

4. Se $a > 1$ si ha
$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{(a+\cos\theta)^2}\, d\theta = \frac{2\pi\, a}{(a^2-1)^{3/2}}\,.$$
Basta osservare che l'integrale a primo membro è
$$\frac{4}{i}\int_{+C} \frac{z}{(z^2+2az+1)^2}\, dz$$
dove C è la circonferenza con centro nell'origine e raggio 1. Si applica quindi il teorema dei residui tenendo conto del fatto che all'interno di C la funzione da integrare presenta in
$$-a+\sqrt{a^2-1}$$
un polo del secondo ordine. Per il calcolo del residuo in tale punto si rimanda alla regola (1.77).

5. Si consideri la funzione
$$\frac{e^{-i\omega z}}{z^2+a^2} \tag{1.90}$$
con $\omega < 0$. Essa presenta due poli del primo ordine in $\pm a\, i$. Indichiamo con C_r il semicerchio, di centro l'origine e raggio $r > a$, contenuto nel semipiano $\Im(z) \geq 0$. Si ha
$$\int_{+\partial C_r} \frac{e^{-i\,\omega z}}{z^2+a^2}\, dz = \int_{-r}^{r} \frac{e^{-i\,\omega x}}{x^2+a^2}\, dx + \int_{+\gamma_r} \frac{e^{-i\,\omega z}}{z^2+a^2}\, dz = 2\pi i \operatorname{Res}\,(f; i\,a)$$
dove γ_r è la semicirconferenza con centro nell'origine e raggio r parte della frontiera di C_r. Per la (1.78) si ha
$$\operatorname{Res}\,(f; i\,a) = \lim_{z\to i\,a} (z-i\,a)\frac{e^{-i\,\omega z}}{z^2+a^2} = -\frac{e^{-a\,|\omega|}}{2a\,i}$$
e per il lemma 1.9.3
$$\lim_{r\to\infty} \int_{+\gamma_r} \frac{e^{-i\,\omega z}}{z^2+a^2}\, dz = 0\,.$$

Si ottiene allora

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\omega x}}{x^2+a^2}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\omega\, x)}{x^2+a^2}\,dx = \frac{\pi}{a} e^{-a\,|\omega|}\,. \tag{1.91}$$

Ovviamente la (1.91) vale anche se $\omega \geq 0$.

6. Se $\omega > 0$ sia

$$T_{r,\omega} = \{z = x+iy \,:\, |x| \leq r\,, \quad 0 \leq y \leq \omega\}\,. \tag{1.92}$$

Per il teorema di Cauchy si ha

$$\begin{aligned} 0 = \int_{+\partial T_{r,\omega}} e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz \quad &= \quad \int_{-r}^{r} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx - \int_{-r}^{r} e^{-\frac{1}{2}(x+i\omega)^2}\,dx \\ &+ \quad i\int_0^{\omega} e^{-\frac{1}{2}(r+iy)^2}\,dy - i\int_0^{\omega} e^{-\frac{1}{2}(-r+iy)^2}\,dy\,. \end{aligned}$$

Essendo

$$\left|\int_0^{\omega} e^{-\frac{1}{2}(r+iy)^2}\,dy\right| \leq e^{-\frac{r^2}{2}} \int_0^{\omega} e^{\frac{y^2}{2}}\,dy$$

risulta

$$\lim_{r\to\infty} \int_0^{\omega} e^{-\frac{1}{2}(r+iy)^2}\,dy = 0\,.$$

In modo analogo si dimostra che

$$\lim_{r\to\infty} \int_0^{\omega} e^{-\frac{1}{2}(-r+iy)^2}\,dy = 0\,.$$

Ricordando che

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi} \tag{1.93}$$

abbiamo

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(x+i\omega)^2}\,dx = \sqrt{2\pi}\,. \tag{1.94}$$

7. Sia $a \in]0,1[$. Integriamo la funzione

$$f(z) = \frac{e^{az}}{1+e^z}$$

sulla frontiera del rettangolo (1.92) con $\omega = 2\pi$. La funzione f presenta nel punto $i\pi$ un polo del primo ordine il cui residuo è

$$\lim_{z\to i\pi} (z-i\pi) f(z) = e^{ia\pi} \lim_{z\to i\pi} \frac{z-i\pi}{i+e^z} = -e^{ia\pi}\,.$$

Si ha quindi

$$\begin{aligned}\int_{+\partial T_{r,2\pi}} f(z)\,dz &= \left(1-e^{2\pi ai}\right)\int_{-r}^{r}\frac{e^{ax}}{1+e^x}\,dx \\ &+ \int_0^{2\pi}\frac{e^{a(r+iy)}}{1+e^{r+iy}}\,dy - \int_0^{2\pi}\frac{e^{a(-r+iy)}}{1+e^{-r+iy}}\,dy \\ &= -2\pi i e^{ia\pi}\,.\end{aligned}$$

Si ha

$$\begin{aligned}\left|\int_0^{2\pi}\frac{e^{a(r+iy)}}{1+e^{r+iy}}\,dy\right| &\le 2\pi\frac{e^{ar}}{e^r-1} \\ \left|\int_0^{2\pi}\frac{e^{a(-r+iy)}}{1+e^{-r+iy}}\,dy\right| &\le 2\pi\frac{e^{-ar}}{1-e^{-r}}\,.\end{aligned}$$

Poiché $a\in]0,1[$ i due integrali estesi ai lati verticali del rettangolo $T_{r,2\pi}$ sono infinitesimi al tendere di r ad infinito. Si ha pertanto

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ax}}{1+e^x}\,dx = -2\pi i\frac{e^{ia\pi}}{1-e^{2\pi ai}} = \frac{\pi}{\sin(\pi a)}\,.$$

8. **(Integrali di Fresnel)** - Integriamo la funzione $\exp(-z^2)$ lungo la frontiera del settore circolare

$$S_R = \left\{0\le\rho\le R\,,\,0\le\theta\le\frac{\pi}{4}\right\}\,.$$

Per il teorema di Cauchy si ha

$$\int_{+\partial S_R} e^{-z^2}\,dz = 0$$

ovvero

$$\int_0^R e^{-t^2}\,dt + \int_{+\gamma_R} e^{-z^2}\,dz - \frac{1+i}{\sqrt{2}}\int_0^R e^{-it^2}\,dt = 0 \tag{1.95}$$

dove γ_R denota l'arco della circonferenza con centro nell'origine e raggio R che è parte della frontiera di S_R.

Risulta

$$\left|\int_{+\gamma_R} e^{-z^2}\,dz\right| \le R\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-R^2\cos 2\theta}\,d\theta\,.$$

Posto

$$2\theta = \frac{\pi}{2}-\varphi$$

abbiamo

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-R^2\cos 2\theta}\, d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R^2\sin\varphi}\, d\varphi$$

da cui, procedendo come nella dimostrazione del lemma 1.9.3, si ha

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-R^2\cos 2\theta}\, d\theta \le \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2R^2}{\pi}\varphi}\, d\varphi \le \frac{\pi}{4R^2}\,.$$

Abbiamo allora

$$\lim_{R\to\infty}\int_{+\gamma_R} e^{-z^2}\, dz = 0\,.$$

Poiché

$$\begin{aligned}\frac{1+i}{\sqrt{2}}\int_0^R e^{-it^2}\, dt \quad &= \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^R [\cos t^2 + \sin t^2] dt \\ &+ \quad \frac{i}{\sqrt{2}}\int_0^R [\cos t^2 - \sin t^2] dt\,,\end{aligned}$$

facendo divergere R nella (1.95) si ha

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\, dt = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{+\infty}[\cos t^2 + \sin t^2]dt + \frac{i}{\sqrt{2}}\int_0^{+\infty}[\cos t^2 - \sin t^2]dt\,.$$

Per la (1.93) in definitiva si ha

$$\int_0^{\infty} \cos t^2 dt = \int_0^{\infty} \sin t^2 dt = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}\,.$$

9. **(Integrali di funzioni razionali)** - Si consideri la funzione razionale

$$\frac{P(z)}{Q(z)}$$

con Q polinomio di grado $2n$ privo di radici reali e P polinomio di grado al piú $2(n-1)$. Quest'ultima condizione implica che la funzione P/Q è sommabile su $\mathbb{R}$.

Proponiamo un metodo per il calcolo dell'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\, dx\,.$$

Il polinomio Q ha $2m$ radici distinte con $m \le n$. Siano z_k $(k = 1, \cdots, m)$ le radici di Q contenute nel semipiano $\Im(z) > 0$ e sia C_r la semicirconferenza con centro nell'origine e raggio r. Se r è sufficientemente grande si ha $|z_k| < r$ e, quindi, per il teorema dei residui

$$\int_{-r}^{r} \frac{P(x)}{Q(x)}\, dx + \int_{\partial C_r} \frac{P(z)}{Q(z)}\, dz = 2\pi\, i \sum_{k=1}^{m} \text{Res}\left(\frac{P}{Q}; z_k\right)\,.$$

Per il lemma 1.9.1 risulta

$$\lim_{r\to\infty}\int_{\partial C_r}\frac{P(z)}{Q(z)}\,dz = 0\,.$$

si ha in definitiva

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = 2\pi\, i\sum_{k=1}^{m}\mathrm{Res}\left(\frac{P}{Q};z_k\right)\,.$$

Per il calcolo dei residui si puó far riferimento alla (1.78): i punti z_k sono infatti poli per P/Q.

1.10 La $\mathscr{Z}$-trasformata

Tale breve paragrafo vuole dare alcuni cenni sulla cosiddetta $\mathscr{Z}$-trasformata. Per dettagli ed approfondimenti si rimanda a [3].
Sia $\{a_n\}$ una successione tale che

$$r = \limsup_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n|} \tag{1.96}$$

sia finito. Allora la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, w^n$$

ha raggio di convergenza r^{-1}.

Definizione 1.10.1. - *La funzione*

$$A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\,\frac{1}{z^n} \tag{1.97}$$

definita nell'insieme $\{z\,:\,|z|>r\}$ *si chiama* $\mathscr{Z}$*-trasformata della successione* $\{a_n\}$ *e* r *è il suo raggio di convergenza.*

Il legame tra i termini della successione $\{a_n\}$ e la sua $\mathscr{Z}$-trasformata è descritto dalle seguenti formule

$$a_n = -\mathrm{Res}(A(z)\,z^{n-1};\infty)\,. \tag{1.98}$$

Basta infatti applicare la (1.73) alla funzione $A(z)\,z^{n-1}$.
Diamo qui di seguito un cenno di una possibile applicazione.
Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u''(t) + b\,u'(t) + c\,u(t) = f(t)\,, \qquad t\in[0,+\infty[\\ \\ u(0)=\bar{u} \\ \\ u'(0)=\bar{u}_1\,. \end{cases}$$

Fissato un "passo" h poniamo $t_n = n\,h$ e $u_n = u(t_n)$. Le derivate prime e seconde di u in t_n si possono approssimare rispettivamente con il rapporto incrementale primo

$$\frac{u_{n+1} - u_n}{h}$$

e con il rapporto incrementale secondo

$$\frac{u_{n+2} - 2\,u_{n+1} + u_n}{h^2}\,.$$

Il problema di Cauchy viene in tal modo "discretizzato"

$$\begin{cases} u_{n+2} + \beta\,u_{n+1} + \gamma\,u_n = h^2 f_n = g_n \\[2ex] u_0 = \bar{u} \\[2ex] u_1 = u_0 + h\,\bar{u}_1 \end{cases}$$

con

$$\beta = b\,h - 2\,, \qquad \gamma = 1 - b\,h + c\,h^2\,.$$

Dobbiamo quindi determinare i termini di una successione definita per ricorrenza secondo la legge

$$u_{n+2} + \beta u_{n+1} + \gamma\,u_n = g_n \tag{1.99}$$

con u_0, u_1 fissati.
Si moltiplichino i membri della (1.99) per z^{-n}; sommando su n si ha

$$z^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_{n+2}}{z^{n+2}} + \beta\,z \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_{n+1}}{z^{n+1}} + \gamma \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n}{z^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g_n}{z^n}$$

ovvero

$$z^2 \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n}{z^n} - \frac{u_1}{z} - u_0 \right) + \beta\,z \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n}{z^n} - u_0 \right) + \gamma \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n}{z^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g_n}{z^n}\,.$$

Se U è la $\mathscr{Z}$-trasformata della successione $\{u_n\}$ e g quella di $\{g_n\}$ abbiamo quindi

$$z^2 \left(U(z) - \frac{u_1}{z} - u_0 \right) + \beta\,z\,(U(z) - u_0) + \gamma\,U(z) = g(z)$$

e quindi

$$U(z) = \frac{g(z) + u_0\,z^2 + (u_1 + \beta\,u_0)\,z}{z^2 + \beta\,z + \gamma}\,.$$

In definitiva se è nota l'espressione della funzione g resta determinata anche quella della funzione U: le formule (1.98) consentono di risalire ai valori dei termini u_n della successione (1.99).

1.11 Famiglie di funzioni olomorfe

Proposizione 1.11.1. - *Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni olomorfe in un aperto A. Se essa converge uniformemente ad f sui compatti di A allora f è olomorfa in A.*

Dimostrazione. Fissato un cerchio $C \subset A$ sia T un triangolo contenuto in C. Per il teo. 1.4.2 si ha

$$\int_{+\partial T} f_n(z)dz = 0\,.$$

Sfruttando l'ipotesi di convergenza uniforme di $\{f_n\}$ si ha anche

$$0 = \int_{+\partial T} f(z)dz$$

da cui l'asserto per il teo. 1.5.5. □

Proposizione 1.11.2. - *Nelle stesse ipotesi della prop.* 1.11.1 *la successione $\{f_n'\}$ converge uniformemente a f' sui compatti di A.*

Dimostrazione. Sia K un compatto contenuto in A. Consideriamo il seguente ulteriore compatto

$$K_\delta = \{z \in A \,:\, \mathrm{dist}(z, K) \le \delta\}$$

con

$$0 < \delta < \frac{\mathrm{dist}(K, \partial A)}{2}\,.$$

Sia g olomorfa in A; proviamo che

$$\sup_K |g'| \le \frac{1}{\delta} \sup_{K_\delta} |g|\,. \tag{1.100}$$

Dalla (1.57) si ha

$$g'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{+\partial C} \frac{g(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\, d\zeta$$

dove C è il cerchio con centro in $z \in K$ e raggio δ. Poiché $C \subset K_\delta$ si ha

$$|g'(z)| \le \frac{1}{2\pi} \int_{\partial C} \frac{|g(\zeta)|}{|\zeta - z|^2}\, ds_\zeta \le \frac{1}{\delta} \sup_{K_\delta} |g|$$

e quindi la (1.100).
Inseriamo $(f_n - f)$ al posto di g nella (1.100) ; abbiamo

$$\sup_K |f_n' - f'| \le \frac{1}{\delta} \sup_{K_\delta} |f_n - f|\,.$$

Poiché $\{f_n\}$ converge uniformemente a f in K_δ si ha che $\{f_n'\}$ converge uniformemente a f' in K; dall'arbitrarietà di K discende l'asserto. □

Dalle prop. 1.11.1 e 1.11.2 si ottiene il seguente risultato.

Proposizione 1.11.3. - *Sia data una serie il cui termine generale f_n è olomorfa in A. Se la serie converge uniformemente in ogni compatto di A allora la sua somma f è olomorfa. Si ha inoltre*

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(z)\,.$$

Proponiamo ora il seguente risultato di derivazione sotto il segno di integrale.

Proposizione 1.11.4. - *Sia*

$$f\ :\ (z,t) \in A \times [a,b] \longrightarrow f(z,t)$$

una funzione continua. Se essa è olomorfa in A per ogni $t \in [a,b]$ e se f_z è continua rispetto alla variabile t per ogni $z \in A$ allora la funzione

$$g(z) = \int_a^b f(z,t)\,dt$$

è olomorfa in A e si ha

$$g'(z) = \int_a^b f_z(z,t)\,dt\,.$$

Dimostrazione. Possiamo ridurci al caso in cui l'intervallo $[a,b]$ sia $[0,1]$. Consideriamo le somme di Riemann

$$g_n(z) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(z,k/n)\,.$$

Tali funzioni sono ovviamente olomorfe in A.
Sia K un compatto di A. Si applichi il teorema di Cantor a f, ristretta al compatto $K \times [0,1]$: fissato ε, se n è abbastanza grande risulta

$$|f(z,k/n) - f(z,t)| < \varepsilon$$

per t appartenente all'intervallo $[(k-1)/n, k/n]$. Si ha quindi

$$\begin{aligned} |g_n(z) - g(z)| &= \left|\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} [f(z,k/n) - f(z,t)]\,dt\right| \\ &\le \sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} |f(z,k/n) - f(z,t)|\,dt \le \varepsilon\,. \end{aligned}$$

La successione $\{g_n\}$ converge uniformemente sui compatti di A alla funzione g, olomorfa alla luce della prop. 1.11.1.

Si ha

$$g_n'(z) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f_z(z, k/n)\,. \tag{1.101}$$

Per la prop. 1.11.2 la successione $\{g_n'\}$ converge a g' mentre la successione a secondo membro nella (1.101) tende a

$$\int_0^1 f_z(z,t)\,dt\,.$$

Abbiamo quindi l'asserto. □

Definizione 1.11.1. - *Sia $\mathcal{F}$ una famiglia di funzioni definite in un aperto A.*

- *Le funzioni di $\mathcal{F}$ si dicono equilimitate sui compatti di A se, in corrispondenza di ogni compatto $K \subset A$, è possibile determinare una costante C_K tale che*
$$|f(z)| \leq C_K$$
per ogni $z \in K$ e per ogni $f \in \mathcal{F}$.
- *Le funzioni di $\mathcal{F}$ si dicono equicontinue su un compatto $K \subset A$ se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta_K > 0$ tale che, se $z, w \in K$ e $|z - w| < \delta_K$ si ha*
$$|f(z) - f(w)| < \varepsilon$$
per ogni $f \in \mathcal{F}$.

Per il teorema di Ascoli-Arzelà (cfr. appendice C) ogni successione di una famiglia $\mathcal{F}$ di funzioni equicontinue ed equilimitate in un compatto K ha una sottosuccessione uniformemente convergente. Per famiglie di funzioni olomorfe la condizione di equilimitatezza assicura in qualche modo quella di equicontinuità. Sussiste infatti il seguente risultato.

Teorema 1.11.1. - *Sia $\mathcal{F}$ una famiglia di funzioni olomorfe in un aperto A ed equilimitate sui compatti di A. Allora ogni successione di funzioni di $\mathcal{F}$ ha una sottosuccessione che converge uniformemente in ogni compatto di A.*

Dimostrazione. Sia K un compatto di A. Fissiamo r in modo che

$$3r < \mathrm{dist}(K, \partial A)\,.$$

Siano z, w due punti di K tali che $|z - w| < r$. Per la formula integrale di Cauchy (1.45) si ha

$$f(z) - f(w) = \frac{1}{2\pi i}\int_{+\partial C_{2r}(w)} f(\zeta)\left[\frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta - w}\right] d\zeta \tag{1.102}$$

dove $C_{2r}(w)$ è il cerchio di centro w e raggio $2r$.

Se $\zeta \in \partial C_{2r}(w)$ si ha $|\zeta - w| = 2r$ e $|\zeta - z| > r$ in quanto $|z - w| < r$; abbiamo allora

$$\left|\frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta - w}\right| = \frac{|z - w|}{|\zeta - z||\zeta - w|} \leq \frac{|z - w|}{2r^2}\,. \tag{1.103}$$

Sia K_{2r} il compatto costituito dai punti che distano da K al piú $2r$ e M una costante tale che

$$|f(z)| \leq M\,, \quad z \in K_{2r}\,.$$

Poiché $\partial C_{2r}(w) \subset K_{2r}$, dalle (1.102) e (1.103) si ha

$$|f(z) - f(w)| \leq \frac{M}{r}|z - w|$$

per ogni $f \in \mathcal{F}$. Da tale stima si ottiene l'equicontinuità su K delle funzioni della famiglia $\mathcal{F}$: da ogni successione di $\mathcal{F}$, per il teorema di Ascoli-Arzelà (cfr. appendice C), è possibile estrarre una sottosuccussione convergente uniformemente in K.

Per concludere è necessario far ricorso ad un argomento di diagonalizzazione.

Denotiamo con $\{K_n\}$ una successione crescente di compatti di A invadente A tale cioè che $\cup_n K_n = A$.

Se $\{f_n\}$ è una successione di funzioni di $\mathcal{F}$ sia $\{f_{1,n}\}$ una sua sottosuccessione convergente uniformemente in K_1. Estraiamo quindi da $\{f_{1,n}\}$ una ulteriore successione $\{f_{2,n}\}$ uniformemente convergente in K_2 e cosí via. Si viene a costruire un sorta di matrice, con un numero infinito di righe e di colonne, i cui termini sono le funzioni $\{f_{m,n}\}$. La m-ma riga è una sottosuccessione di tutte le successioni poste nelle righe che la precedono; essa quindi converge uniformemente in K_j con $j \leq m$.

Consideriamo la successione diagonale il cui termine generale è $g_n = f_{n,n}$. Essa è estratta dalla successione $\{f_n\}$ e, per ogni fissato m, a patto di non tener conto dei primi $m-1$ termini, dalla successione $\{f_{m,n}\}_n$. Essa pertanto converge uniformemente su ogni compatto K_n e, in definitiva, su ogni compatto di A. $\square$

Capitolo 2

La funzione Gamma

2.1 Misura della sfera di $\mathbb{R}^N$

La funzione gamma di Eulero si definisce dapprima sul semiasse reale positivo nel modo seguente

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\, dt\,, \quad x > 0\,. \tag{2.1}$$

Integrando per parti si ha

$$\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)\,. \tag{2.2}$$

Osservato che $\Gamma(1) = 1$, dalla (2.2) per induzione abbiamo

$$\Gamma(n+1) = n!\,, \qquad n \in \mathbb{N}\,. \tag{2.3}$$

Essendo

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty t^{-1/2} e^{-t}\, dt = 2\int_0^\infty e^{-\tau^2}\, d\tau$$

e

$$\int_0^\infty e^{-\tau^2}\, d\tau = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \tag{2.4}$$

si ha

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \tag{2.5}$$

e anche, per la (2.2),

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,. \tag{2.6}$$

Piú in generale, per induzione, dalle (2.6) e (2.2) si ottiene la seguente formula

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi} \tag{2.7}$$

dove con il simbolo $k!!$ si intende il prodotto degli interi minori o uguali a k con la stessa parità di k.

Proposizione 2.1.1. - *Sia*

$$S_N = \{x \in \mathbb{R}^N \,:\, \|x\| \leq 1\}$$

la sfera unitaria di $\mathbb{R}^N$ *e sia* ω_N *la sua misura. Risulta*

$$\omega_N = \begin{cases} \dfrac{\pi^k}{k!} & se\ N = 2k \\[2ex] \dfrac{2^{k+1}\pi^k}{(2k+1)!!} & se\ N = 2k+1\,. \end{cases} \tag{2.8}$$

Dimostrazione. Con la sostituzione $t = u^2/2$ la (2.1) diventa

$$\Gamma(x) = 2^{1-x}\int_0^\infty u^{2\,x-1}e^{-\frac{u^2}{2}}\,du\,. \tag{2.9}$$

Si ha allora

$$\begin{aligned}
\Gamma(x)\,\Gamma(y) &= 2^{2-x-y}\int_0^\infty u^{2x-1}e^{-\frac{u^2}{2}}\,du\int_0^\infty v^{2y-1}e^{-\frac{v^2}{2}}\,dv \\
&= 2^{2-x-y}\int_{R^+\times R^+} u^{2x-1}v^{2y-1}e^{-\frac{u^2+v^2}{2}}\,dudv \\
&\qquad \text{(passando alle coordinate polari } (\rho,\theta)\text{)} \\
&= 2^{2-x-y}\int_0^\infty \rho^{2(x+y)-1}e^{-\frac{\rho^2}{2}}\,d\rho\int_0^{\pi/2}(\cos\theta)^{2x-1}(\sin\theta)^{2y-1}\,d\theta \\
&\qquad \text{(per la (2.9)} \\
&= 2\,\Gamma(x+y)\int_0^{\pi/2}(\cos\theta)^{2x-1}(\sin\theta)^{2y-1}\,d\theta\,.
\end{aligned}$$

Abbiamo pertanto la seguente identità

$$\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} = 2\int_0^{\pi/2}(\cos\theta)^{2x-1}(\sin\theta)^{2y-1}\,d\theta$$

da cui, dopo aver eseguito la sostituzione $z = \cos^2\theta$ nell'integrale a secondo membro,

$$\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} = \int_0^1 z^{x-1}(1-z)^{y-1}\,dz\,. \tag{2.10}$$

Poniamo $\omega_1 = 2$. Per il principio di Cavalieri abbiamo

$$\omega_N = 2\,\omega_{N-1}\int_0^1 (1-x_N^2)^{\frac{N-1}{2}}\,dx_N = \omega_{N-1}\int_0^1 z^{-1/2}(1-z)^{\frac{N-1}{2}}\,dz\,.$$

Per la (2.10) abbiamo quindi la seguente formula di ricorrenza

$$\omega_N = \omega_{N-1}\frac{\Gamma(1/2)\,\Gamma((N+1)/2)}{\Gamma(1+N/2)}\,. \tag{2.11}$$

Dimostriamo per induzione che

$$\omega_N = \frac{2\pi^{\frac{N}{2}}}{N\,\Gamma(N/2)}\,. \tag{2.12}$$

La (2.12) sussiste per $N = 2$. Assumiamo che valga la (2.12); per la (2.11) si ha

$$\omega_{N+1} = \frac{2\pi^{\frac{N}{2}}}{N\,\Gamma(N/2)}\frac{\Gamma(1/2)\,\Gamma(1+N/2)}{\Gamma(1+(N+1)/2)}\,.$$

Facendo ricorso alle (2.2) e (2.5) abbiamo

$$\omega_{N+1} = \frac{2\pi^{\frac{N+1}{2}}}{(N+1)\Gamma((N+1)/2)}$$

cioè la (2.12) con $N+1$ al posto di N: risulta provata la (2.12).
Infine, per le (2.3), (2.7), la (2.12) puó essere scritta nella forma (2.8). □

Osservazione 2.1.1. - *Sia σ_N la misura della superficie sferica ∂S_N. Osservato che $\sigma_N\, r^{N-1}$ è la misura della superficie sferica di raggio r, con un semplice passaggio a coordinate polari si ottiene $\sigma_N = N\omega_N$.*

2.2 La formula di Stirling

Dimostriamo innanzitutto il seguente criterio di convergenza uniforme.

Teorema 2.2.1. (Teorema di Dini) - *Sia $\{f_\alpha\}_{\alpha\in I}$ una famiglia di funzioni continue in un compatto K di $\mathbb{R}^N$ con I sottoinsieme di $\mathbb{R}$ non limitato superiormente.*
Siano soddisfatte le seguenti condizioni:

(a) *la famiglia è crescente (decrescente); si ha cioè*

$$\alpha < \beta \Rightarrow f_\alpha(x) \leq (\geq) f_\beta(x)$$

per ogni $x \in K$;

(b) *esiste una funzione f definita in K tale che, per ogni $x \in K$, si ha*

$$\lim_{\alpha \to \infty} f_\alpha(x) = f(x)\,;$$

(c) *la funzione f è continua in K.*

Allora la convergenza di $\{f_\alpha\}_{\alpha \in I}$ a f è uniforme su K.

Dimostrazione. Supponiamo che la famiglia $\{f_\alpha\}$ sia monotona decrescente. Possiamo inoltre assumere $f \equiv 0$; basta infatti ragionare sulla famiglia di funzioni continue $\{f_\alpha - f\}_{\alpha \in I}$.
Sia M_α il massimo di f_α in K e sia x_α un punto di massimo di f_α.
Se $\alpha < \beta$ per la (a) risulta

$$M_\alpha = f_\alpha(x_\alpha) \geq f_\alpha(x_\beta) \geq f_\beta(x_\beta) = M_\beta\,.$$

Quindi M_α è una funzione decrescente di α; esiste quindi un $M \geq 0$ tale che

$$\lim_{\alpha \to +\infty} M_\alpha = M\,.$$

Dalla famiglia $\{x_\alpha\} \subset K$ è possibile estrarre una successione $\{x_{\alpha_k}\}$, con $\{\alpha_k\}$ divergente positivamente, tale che

$$\lim_{k \to +\infty} x_{\alpha_k} = x_0 \in K\,.$$

Fissato α, per l'ipotesi di decrescenza di $\{f_\alpha\}$ e per $\alpha_k > \alpha$ si ha

$$f_\alpha(x_{\alpha_k}) \geq f_{\alpha_k}(x_{\alpha_k}) = M_{\alpha_k}$$

da cui

$$f_\alpha(x_0) = \lim_{k \to \infty} f_\alpha(x_{\alpha_k}) \geq \lim_{k \to \infty} M_{\alpha_k} = M\,.$$

Poiché al divergere di α la famiglia $\{f_\alpha(x_0)\}$ è infinitesima si ha $M = 0$. Abbiamo pertanto

$$\lim_{\alpha \to \infty} \left(\max_K f_\alpha \right) = 0\,,$$

ovvero la convergenza uniforme in K della famiglia $\{f_\alpha\}$ alla funzione identicamente nulla.
Infine, se la convergenza è monotona crescente, si ragiona su $\{-f_\alpha\}_{\alpha \in I}$. □

Dimostriamo ora il seguente risultato che descrive il comportamento asintotico di Γ e, quindi, del fattoriale (cfr. [2]).

Teorema 2.2.2. (Formula di Stirling) - *Si ha*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\Gamma(x+1)\,e^x}{x^x\sqrt{x}}=\sqrt{2\pi} \tag{2.13}$$

e quindi anche

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n!\,e^n}{n^n\sqrt{n}}=\sqrt{2\pi}\,.$$

Dimostrazione. Operiamo il cambio di variabili $t=x(1+u)$ nell'integrale in (2.1)

$$\Gamma(x+1)=x^{x+1}e^{-x}\int_{-1}^{+\infty}(1+u)^x e^{-u\,x}\,du\,. \tag{2.14}$$

Consideriamo la funzione

$$u\in]-1,+\infty[\longrightarrow h(u)=\begin{cases}\dfrac{2}{u^2}\,[u-\log(1+u)] & \text{se } u\neq 0\\[2ex] 1 & \text{se } u=0\,.\end{cases}$$

Verifichiamo che h è decrescente. Si ha

$$h'(u)=\begin{cases}\dfrac{2}{u^3}\left[2\log(1+u)-u-\dfrac{u}{1+u}\right] & \text{se } u\neq 0\\[2ex] -\dfrac{1}{3} & \text{se } u=0\,.\end{cases}$$

Posto

$$2\log(1+u)-u-\frac{u}{1+u}=k(u)$$

risulta

$$k'(u)=-\left(\frac{u}{1+u}\right)^2\leq 0\,.$$

Poiché $k(0)=0$ si ha $k(u)>0$ se $u<0$ e $k(u)<0$ se $u>0$. Risulta $h'<0$: la funzione h è allora decrescente.

Essendo

$$(1+u)\,e^{-u}=\exp\left[-\frac{u^2}{2}\,h(u)\right]$$

la (2.14) si puó scrivere nel modo seguente

$$\Gamma(x+1)=x^{x+1}e^{-x}\int_{-1}^{+\infty}\exp\left[-\frac{x\,u^2}{2}\,h(u)\right]\,du\,. \tag{2.15}$$

Operiamo ora la sostituzione $u=\sqrt{2/x}\,s$ nell'integrale in (2.15). Abbiamo

$$\frac{\Gamma(x+1)e^x}{x^x\sqrt{2x}}=\int_{-\infty}^{+\infty}\psi_x(s)\,ds \tag{2.16}$$

dove

$$\psi_x(s) = \begin{cases} \exp\left[-s^2\, h\left(\sqrt{\frac{2}{x}}\, s\right)\right] & \text{se } s > -\sqrt{x/2} \\ \\ 0 & \text{se } s \leq -\sqrt{x/2}\,. \end{cases} \tag{2.17}$$

Per ogni $s \in \mathbb{R}$ si ha

$$\lim_{x\to\infty} \psi_x(s) = \exp(-s^2)\,. \tag{2.18}$$

Essendo h decrescente la famiglia $\{\psi_x(s)\}_x$ è monotona crescente se $s > 0$, monotona decrescente se $s > 0$.
Per la (2.18) risulta

$$\psi_x(s) < \exp(-s^2)\,, \quad s \in]-\infty, 0[\,. \tag{2.19}$$

Inoltre, se ci limitiamo a considerare i valori di x per esempio piú grandi di 2, si ha

$$\psi_x(s) < \psi_2(s) = e^{-2\,s}(1+s)^2\,, \quad s \in]0, +\infty[\,. \tag{2.20}$$

Entrambe le funzioni a secondo membro nelle (2.19), (2.20) sono sommabili: quindi tale è ψ_x per ogni $x \geq 2$. Fissato ε si puó scegliere allora a in modo tale che risulti

$$\int_{-\infty}^{-a} |\psi_x(s) - \exp(-s^2)|\, ds \leq \int_{-\infty}^{-a} \psi_x(s)\, ds + \int_{-\infty}^{-a} \exp(-s^2)\, ds < \varepsilon \tag{2.21}$$

e

$$\int_{a}^{\infty} |\psi_x(s) - \exp(-s^2)|\, ds \leq \int_{a}^{\infty} \psi_x(s)\, ds + \int_{a}^{\infty} \exp(-s^2)\, ds < \varepsilon\,. \tag{2.22}$$

Per quanto già osservato la convergenza di $\{\psi_x\}$ è monotona crescente in $[-a, 0]$, decrescente in $[0, a]$. È possibile applicare alla famiglia $\{\psi_x\}$ il teo. 2.2.1: la convergenza è uniforme nell'intervallo $[-a, a]$. Si determini quindi δ in modo che risulti

$$\int_{-a}^{a} |\psi_x(s) - \exp(-s^2)|\, ds < \varepsilon\,. \tag{2.23}$$

per $x > \delta$.
Dalle (2.21), (2.22), (2.23) si ha

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi_x(s) - \exp(-s^2)|\, ds < 3\varepsilon\,,$$

se $x > \delta$, ovvero

$$\lim_{x\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_x(s)\, ds = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-s^2)\, ds\,.$$

Dalla (2.16), ricordando la (2.4), otteniamo la (2.13). □

2.3 Prolungamento analitico di Gamma

Un primo prolungamento di Γ è relativo al semipiano

$$\mathrm{K} = \{z \,:\, \Re(z) > 0\}\,. \tag{2.24}$$

Proposizione 2.3.1. - *La funzione* (2.1) *si prolunga analiticamente a K. In tale prolungamento si conserva l'espressione di Γ; si ha cioè*

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t}\, dt\,. \tag{2.25}$$

Dimostrazione. Essendo

$$|t^{z-1}e^{-t}| = t^{\Re(z)-1}e^{-t}$$

e $\Re(z) > 0$ la funzione sotto il segno di integrale in (2.25) è sommabile.
Per verificare l'olomorfia di Γ in K basta dimostrare che essa è olomorfa in ogni striscia

$$\mathrm{K}_\varepsilon = \{z \,:\, \varepsilon < \Re(z) < \varepsilon^{-1}\}$$

con $\varepsilon \in]0,1[$.
Se $n \in \mathbb{N}$ la funzione

$$F_n(z) = \int_{1/n}^n t^{z-1}e^{-t}\, dt$$

è olomorfa in $\mathbb{C}$ per la prop. 1.11.4. D'altra parte

$$\begin{aligned} |\Gamma(z) - F_n(z)| &= \left| \int_0^{1/n} t^{z-1}e^{-t}\, dt + \int_n^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}\, dt \right| \\ &\le \int_0^{1/n} t^{\Re(z)-1}e^{-t}\, dt + \int_n^{+\infty} t^{\Re(z)-1}e^{-t}\, dt\,. \end{aligned} \tag{2.26}$$

Se $t \in]0, 1/n[$ e $z \in \mathrm{K}_\varepsilon$ si ha $t^{\Re(z)-1} \le t^{\varepsilon-1}$. Abbiamo pertanto

$$\int_0^{1/n} t^{\Re(z)-1}e^{-t}\, dt \le \int_0^{1/n} t^{\varepsilon-1}\, dt = \frac{1}{\varepsilon\, n^\varepsilon}\,. \tag{2.27}$$

Se $t \ge n$ e $z \in \mathrm{K}_\varepsilon$ si ha $t^{\Re(z)-1} \le t^{\varepsilon^{-1}-1}$; inoltre $t^{\varepsilon^{-1}-1} \le \alpha_\varepsilon\, e^{t/2}$ con α_ε costante opportuna. Abbiamo pertanto

$$\int_n^{+\infty} t^{\Re(z)-1}e^{-t}\, dt \le \int_n^{+\infty} t^{\varepsilon^{-1}-1}e^{-t}\, dt \le \alpha_\varepsilon \int_n^{+\infty} e^{-t/2}\, dt$$

e quindi

$$\int_n^{+\infty} t^{\Re(z)-1}e^{-t}\, dt \le 2\alpha_\varepsilon\, e^{-n/2}\,. \tag{2.28}$$

Fissato $\sigma > 0$ è allora possibile per le (2.26), (2.27), (2.28), determinare un indice ν tale che

$$|\Gamma(z) - F_n(z)| < \sigma$$

per $n > \nu$ e per ogni $z \in \mathrm{K}_\varepsilon$.
La successione $\{F_n\}$ tende uniformemente in K_ε a Γ. Per la prop. 1.11.1 la funzione Γ è olomorfa in K_ε e quindi, per l'arbitrarietà di ε, in tutto K. $\square$

Osservazione 2.3.1. - *La derivata di* Γ*, sempre nel semipiano* (2.24)*, è*

$$\Gamma'(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} \log t \, e^{-t} \, dt \, .$$

La formula si ottiene ripercorrendo la dimostrazione della prop. 2.3.1 *e richiamando la prop.* 1.11.2*.*

L'ulteriore prolungamento di Γ è meno immediato. A tale proposito sussiste il seguente risultato (cfr. [8]).

Proposizione 2.3.2. - *La funzione* Γ *puó essere prolungata a tutto il piano complesso privato degli interi non positivi. Questi sono poli del primo ordine con i seguenti residui*

$$\mathrm{Res}\,(\Gamma; 0) = 1 \tag{2.29}$$

e

$$\mathrm{Res}\,(\Gamma; -n) = \frac{(-1)^n}{n!} \, , \quad n \in \mathbb{N} \, . \tag{2.30}$$

Dimostrazione. Se $\Re(z) > 0$ vale la (2.25) e quindi

$$\Gamma(z) = \int_0^1 t^{z-1} e^{-t} \, dt + \int_1^\infty t^{z-1} e^{-t} \, dt = \Gamma_0(z) + \Gamma_1(z) \, .$$

Verifichiamo che Γ_1 è una funzione intera, cioè una funzione olomorfa in $\mathbb{C}$.
Posto

$$F_n(z) = \int_1^n t^{z-1} e^{-t} \, dt$$

si ha

$$\Gamma_1(z) = \lim_{n\to\infty} F_n(z) \, .$$

Ciascuna funzione F_n è intera per la prop. 1.11.4. Procediamo come nella dimostrazione della prop. 2.3.1. La successione $\{F_n\}$ converge uniformemente a Γ_1 nel semipiano $\{\Re(z) < \varepsilon\}$ con ε arbitrario. La funzione Γ_1 è allora olomorfa in tale semipiano e, quindi, in tutto $\mathbb{C}$.

Occupiamoci ora di Γ_0. Integrando termine a termine abbiamo

$$\Gamma_0(z) = \int_0^1 t^{z-1} \left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^n}{n!} \right] dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+z)} \, . \tag{2.31}$$

L'identità (2.31) vale nel semipiano $\{\Re(z) > 0\}$. Basta allora verificare verificare che la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+z)}$$

è prolungabile con le proprietà descritte nell'enunciato.
Fissato $h \in \mathbb{N}$ consideriamo il cerchio

$$C_h = \left\{ z \, : \, |z| < h + \frac{1}{2} \right\} .$$

Risulta

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+z)} = \sum_{n=0}^{2h} \frac{(-1)^n}{n!(n+z)} + \sum_{n=2h+1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+z)} . \tag{2.32}$$

Il primo termine a secondo membro è una funzione olomorfa in C_h con poli del primo ordine in $0, -1, \cdots, -h$. Per il calcolo dei residui si puó utilizzare la (1.78): si ottengono in tal modo i valori (2.29), (2.30).
Se $z \in C_h$ e $n \geq 2h+1$ si ha

$$|n+z| \geq n - |z| > 2h + 1 - h - \frac{1}{2} > h + \frac{1}{2} > h .$$

Quindi la serie a secondo membro in (2.32) si maggiora con la serie numerica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n! \, h} .$$

Essa è allora totalmente convergente in C_h. La sua somma è olomorfa in tale cerchio per la prop. 1.11.3. Dall'arbitrarietà di h discende l'asserto. □

Capitolo 3

Spazi di Banach e spazi di Hilbert

3.1 Richiami

L'obiettivo di tale capitolo è quello di trasferire in spazi astratti alcune proprietá tipiche degli spazi euclidei. Solitamente si parte dalla definizione di spazio metrico per arrivare, passando per gli spazi normati, alla struttura piú ricca, gli spazi di Hilbert.

Per "distanza" (o anche "metrica") in un insieme M si intende un'applicazione

$$(x, y) \in M^2 \longrightarrow d(x, y) \in \mathbb{R}$$

tale che

(M_1) $d(x, y) = d(y, x)$

(M_2) $d(x, y) \geq 0$

(M_3) $d(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$

(M_4) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

La (M_4) è nota come proprietà triangolare.
La coppia (M, d) prende il nome di "spazio metrico".

Esempio 3.1.1. - *Se k è un intero lo spazio euclideo $\mathbb{R}^k$ è l'insieme delle k-ple ordinate*

$$(x_i) = (n_1, \cdots, x_k) .$$

La distanza euclidea tra due punti (x_i), (y_i) è

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{k} (x_i - y_i)^2} . \tag{3.1}$$

Se $x \in M$ e r è un numero positivo l'insieme

$$S_r(x) = \{y \in M \,:\, d(x,y) < r\}$$

prende il nome di "intorno sferico" di centro x e raggio r.
Si può allora riproporre in tale contesto la nozione di punto interno, di punto di accumulazione, di insieme aperto e chiuso, di insieme limitato e di quant'altro si possa esprimere attraverso definizioni che facciano riferimento alla nozione di intorno sferico.

Definizione 3.1.1. - *Sia $\{x_n\}$ una successione di punti di M. Se*

$$\lim_{n\to+\infty} d(x_n, x) = 0$$

Si dice allora che la successione converge a x; in simboli

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = x\,.$$

Definizione 3.1.2. - *Sia f una funzione definita in (M_1, d_{M_1}) a valori in (M_2, d_{M_2}).*
Si dice che f è continua in x_0 se, comunque si fissi $\varepsilon > 0$, esiste un $\delta > 0$ tale che

$$d_{M_2}(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$$

per ogni x con $d_{M_1}(x, x_0) < \delta$.

Alcune metriche, in ogni caso tutte quelle di cui ci occuperemo nel seguito, si definiscono a partire da una "norma". Con tale termine si intende un'applicazione definita in uno spazio vettoriale V

$$v \in V \longrightarrow \|v\| \in \mathbb{R}\,, \tag{3.2}$$

che goda delle proprietà

(N_1) $\|v\| \geq 0$

(N_2) $\|v\| = 0 \Longleftrightarrow v = 0$

(N_3) Se $\alpha \in \mathbb{C}$ allora $\|\alpha\, v\| = |\alpha|\,\|v\|$

(N_4) $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$.

La (N_4) è anch'essa nota come proprietà triangolare.

Una volta introdotta una norma si definisce la distanza tra due elementi v, w di V mediante la posizione

$$d(v,w) = \|v - w\|\,.$$

Si può facilmente verificare che sono soddisfatte tutte le proprietà che caratterizzano una metrica. Lo spazio metrico in tal modo ottenuto prende il nome di "spazio normato".

Osservazione 3.1.1. - *In uno spazio normato vale la seguente ulteriore proprietà che solitamente si accompagna alla* (N_4)

$$| \, \|v\| - \|w\| \, | \le \|v - w\| \,, \quad \forall v, w \in V \,. \tag{3.3}$$

La (3.3) *puó essere utilizzata tra l'altro per dimostrare che la funzione* (3.2) *è continua nel senso della def.* 3.1.2.

Osservazione 3.1.2. - *Siano* $\| \cdot \|$ *e* $\| \cdot \|^*$ *due norme definite sullo spazio vettoriale* V*. Si dice che esse sono equivalenti se esistono due costanti positive* a, b *tali che*

$$a\|x\| \le \|x\|^* \le b\|x\| \,, \quad \forall x \in V \,. \tag{3.4}$$

Da (3.4) *discende facilmente che le due norme inducono lo stesso tipo di convergenza e, quindi, la stessa struttura topologica; con ció intendiamo dire che una successione convergente rispetto alla metrica indotta da una delle due norme converge anche in relazione alla metrica indotta dall'altra.*

Esempio 3.1.2. - *In* $\mathbb{R}^k$ *la norma*

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{k} x_i^2} \tag{3.5}$$

induce la metrica euclidea (3.1).
È possibile introdurre in $\mathbb{R}^k$ *ulteriori norme quali per esempio*

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{k} |x_i| \,, \quad \|x\|_\infty = \max_i \{|x_i|\} \,.$$

Si puó dimostrare che tali norme sono equivalenti alla norma (3.5).

Alcune norme possono essere definite a partire da un "prodotto scalare". Con tale termine si intende un'applicazione

$$(v, w) \in V^2 \longrightarrow < v, w > \in \mathbb{R} \tag{3.6}$$

che goda delle seguenti proprietà

(S_1) $< v, v > \ge 0$

(S_2) $< v, v > = 0 \Longleftrightarrow v = 0$

(S_3) Se $\alpha \in \mathbb{R}$ allora $< \alpha v, w > = \alpha < v, w >$

(S_4) $< v, w > = < w, v >$

(S_5) $< u + v, w > = < u, w > + < v, w >$.

Se l'applicazione (3.6) ha valori nel campo dei complessi, al posto della (S_4) va inserita la seguente proprietà di Hermite

(S_4') $< v, w > = \overline{< w, v >}$.

Da (S_4') e (S_3) discende in modo ovvio

(S_3') Se $\alpha \in \mathbb{C}$ allora $< v, \alpha w > = \overline{\alpha} < v, w >$.

Esempio 3.1.3. - *In* $\mathbb{R}^k$ *il prodotto scalare di due vettori* (x_i), (y_i) *è dato da*

$$\sum_{i=1}^{k} x_i y_i \,.$$

Se (z_i), (w_i) *sono due vettori di* $\mathbb{C}^k$ *il prodotto scalare diventa*

$$\sum_{i=1}^{k} z_i \overline{w_i} \,.$$

Proposizione 3.1.1. - *La quantità*

$$\|v\| = \sqrt{< v, v >} \,. \tag{3.7}$$

è una norma.

Dimostrazione. Le prime tre proprietà sono di facile verifica. Per dimostrare la proprietà triangolare è necessario preliminarmente provare la seguente disuguaglianza di Schwarz

$$| < v, w > | \leq \|v\| \|w\| \,. \tag{3.8}$$

Sia w un vettore non nullo di norma unitaria. Si ha, utilizzando le proprietà del prodotto scalare,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|v - < v, w > w\|^2 = < v - < v, w > w, v - < v, w > w > \\ &= < v, v > - < v, w > \overline{< v, w >} - < v, w > \overline{< v, w >} + < v, w > \overline{< v, w >} \\ &= \|v\|^2 - | < v, w > |^2. \end{aligned}$$

Pertanto risulta

$$| < v, w > | \leq \|v\| \,. \tag{3.9}$$

Sia $w \neq 0$ inseriamo $w/\|w\|$ al posto di w in (3.9); si ottiene allora facilmente la (3.8).

Dimostriamo ora che (3.7) verifica la proprietà (N_4). Utilizzando le proprietà del prodotto scalare e la (3.8), si ha

$$\begin{aligned} \|v+w\|^2 &= \;< v+w, v+w > = < v, v > +2\,\Re(< v, w >) + < w, w > \\ &\leq \|v\|^2 + 2\|v\|\|w\| + \|w\|^2 = (\|v\| + \|w\|)^2 \end{aligned}$$

da cui ovviamente (N_4). □

Definizione 3.1.3. - *In uno spazio dotato di prodotto scalare due vettori si dicono perpendicolari se il loro prodotto scalare è nullo.*

Si pone a questo punto in modo naturale la seguente questione: è possibile stabilire se una norma può essere definita a partire da un prodotto scalare? La risposta a tale domanda è contenuta nel seguente risultato.

Teorema 3.1.1. (Regola del parallelogramma) - *Una norma puó essere definita tramite la* (3.7) *a partire da un opportuno prodotto scalare se e solo se è soddisfatta la seguente identità*

$$2\|u\|^2 + 2\|v\|^2 = \|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 \qquad \forall u, v \in V\,. \tag{3.10}$$

Dimostrazione. È intanto evidente che una norma definita a partire da un prodotto scalare soddisfa la (3.10).
Dimostriamo il viceversa. Si ponga

$$< x, y >= \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right)\;; \tag{3.11}$$

verifichiamo che (3.11) è un prodotto scalare legato alla norma (3.7).
Si ha facilmente che $< x, y >=< y, x >$ e $< x, x >= \|x\|^2$.
Essendo

$$< x, z > + < y, z >= \frac{1}{4}\left(\|x+z\|^2 + \|y+z\|^2 - \|x-z\|^2 - \|y-z\|^2\right)\,,$$

applicando la (3.10) con $(x+z)$ e $(y+z)$ al posto di u, v e ricordando la (3.11), si ha

$$< x, z > + < y, z >= \frac{1}{2}\left(\left\|\frac{x+y}{2} + z\right\|^2 - \left\|\frac{x+y}{2} - z\right\|^2\right) = 2 < \frac{x+y}{2}, z > \;.$$

Se $y = 0$, essendo ovviamente $< y, z >= 0$, si ha

$$< x, z >= 2 < \frac{x}{2}, z > \;.$$

Sfruttando tale formula si ottiene allora

$$< x, z > + < y, z >= 2 < \frac{x+y}{2}, z >=< x+y, z >$$

cioè (S_5). Ovviamente si ha anche

$$< \sum_{i=1}^{n} x_i, z >= \sum_{i=1}^{n} < x_i, z > \ . \tag{3.12}$$

Dalla (3.12), se $x_i = x$, si ha

$$< nx, z >= n < x, z > \tag{3.13}$$

ovvero, se $x_i = x/n$,

$$< \frac{x}{n}, z >= \frac{1}{n} < x, z > \ . \tag{3.14}$$

Pertanto, considerato un numero razionale m/n, per le (3.13) e (3.14), si ha

$$< \frac{m}{n} x, z >= m < \frac{x}{n}, z >= \frac{m}{n} < x, z > ,$$

cioè S_3) con α razionale. Infine, per la densitá di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ e per la proprietà di continuità della norma (cfr. oss. 3.1.2), si ottiene la (S_3) per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$. $\square$

Per concludere richiamiamo la seguente

Definizione 3.1.4. - *Una successione $\{x_n\}$ di uno spazio metrico dicesi di Cauchy se*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \nu \quad : \quad \forall n, m > \nu \quad d(x_n, x_m) < \varepsilon \, . \tag{3.15}$$

Ovviamente ogni successione convergente è di Cauchy. Non sempre è vero il viceversa.

Definizione 3.1.5. - *Uno spazio metrico dicesi "completo" se ogni successione di Cauchy è convergente.*
Uno spazio normato, se completo, prende il nome di "spazio di Banach", ovvero, di "spazio di Hilbert", se la norma è definita a partire da un prodotto scalare.

3.2 Esempi di spazi funzionali

3.2.1 Spazi di funzioni

Un primo importante esempio di spazio normato è lo spazio $C^0([a, b])$ delle funzioni continue in $[a, b]$, a valori reali o complessi, dotato della norma

$$\|f\|_{C^0} = \max_{x \in [a,b]} |f(x)| \, . \tag{3.16}$$

La distanza tra due funzioni f, g è allora

$$\|f - g\|_{C^0} = \max_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)| \, . \tag{3.17}$$

Si dimostra facilmente che una successione $\{f_n\}$ converge in $C^0([a,b])$ ad f se e solo se tale successione converge uniformemente in $[a,b]$. Dal criterio di convergenza di Cauchy per le successioni uniformemente convergenti discende allora che $C^0([a,b])$ dotato della norma (3.16) è completo.
Ovviamente quanto sopra detto in relazione allo spazio $C^0([a,b])$ puó tranquillamente essere esteso al caso delle funzioni continue su un compatto di $\mathbb{R}^k$.

Sempre in $C^0([a,b])$ è possibile definire ulteriori norme.
Un primo esempio è costituito da

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)|\,dx\,; \tag{3.18}$$

la distanza tra due funzioni f, g in tal caso è

$$\int_a^b |f(x)-g(x)|\,dx\,. \tag{3.19}$$

Osserviamo che mediante le (3.17) e (3.19) si misura in modo differente la distanza tra due funzioni: nel primo caso la (3.17) è la massima distanza verticale tra i grafici delle due funzioni, nel secondo la (3.19) misura in un certo senso l'area dell'insieme delimitato dai grafici delle due funzioni.
Piú in generale, se $p \in]1,\infty[$, poniamo

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}\,. \tag{3.20}$$

Vedremo piú avanti che la (3.20) è una norma; limitiamoci qui ad osservare che solo nel caso $p=2$ essa si ottiene a partire dal prodotto scalare

$$< f, g >= \int_a^b f\overline{g}\,dx\,.$$

Si puó dimostrare che $C^0([a,b])$ con la norma (3.18) o (3.20) non è completo; si puó prendere spunto da tale considerazione per introdurre un tipo di integrale piú generale rispetto a quello di Riemann.

3.2.2 Spazi di successioni

Passiamo ora a discutere il caso degli spazi i cui elementi sono successioni a termini reali o complessi.
Indichiamo con ℓ^1 lo spazio vettoriale delle successioni $x = \{x_n\}$ per le quali risulta

$$\|x\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < +\infty\,. \tag{3.21}$$

Si verifica facilmente che $\|\cdot\|_1$ è una norma.
Il simbolo ℓ^p, con $p > 1$, denota lo spazio delle successioni $x = \{x_n\}$ per cui

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < +\infty\,.$$

Per poter intanto affermare che ℓ^p è uno spazio vettoriale bisogna verificare che esso è chiuso rispetto all'operazione di somma. A tal fine ricordiamo la seguente diseguaglianza

$$(u+v)^p \le 2^{p-1}(u^p + v^p) \quad u, v \in \mathbb{R}^+ \tag{3.22}$$

semplice conseguenza della convessità della funzione potenza ad esponente p.
Se $x = \{x_n\}$ e $y = \{y_n\}$ appartengono a ℓ^p per la (3.22) si ha

$$|x_n + y_n|^p \le 2^{p-1}(|x_n|^p + |y_n|^p)$$

da cui discende che $(x + y) \in \ell^p$.
Poniamo

$$\|x\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{1/p} \tag{3.23}$$

e verifichiamo che essa è una norma.
Se $p > 1$ sia $q = \frac{p}{p-1}$ l'esponente coniugato di p; si ha allora

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\,. \tag{3.24}$$

Richiamiamo la seguente disuguaglianza

$$u\,v \le \frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q} \tag{3.25}$$

con $u, v \ge 0$.
Se $\{x_n\} \in \ell^p$ e $\{y_n\} \in \ell^q$ si ha per la (3.25)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n|}{\|x\|_p} \frac{|y_n|}{\|y\|_q} \le \frac{1}{p} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n|^p}{\|x\|_p^p} + \frac{1}{q} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|y_n|^q}{\|y\|_q^q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

da cui

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n\, y_n| \le \|x\|_p \|y\|_q\,. \tag{3.26}$$

Siamo ora in grado di dimostrare la proprietà triangolare. Se $\{x_n\}, \{y_n\} \in \ell^p$ si ha, per la (3.26),

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} |x_n + y_n|^p &\le \sum_{n=1}^{\infty} |x_n||x_n + y_n|^{p-1} + \sum_{n=1}^{\infty} |y_n||x_n + y_n|^{p-1} \\
&\le \left\{ \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right\} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n + y_n|^p \right)^{\frac{p-1}{p}}
\end{aligned}$$

da cui

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n+y_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{n=1}^{\infty}|y_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} . \tag{3.27}$$

La (3.27), nota come disuguaglianza di Minkowski, altro non è che la proprietà triangolare.

Osservazione 3.2.1. - *La* (3.27) *vale ovviamente anche per somme finite. Pertanto se* $x=(x_i)\in\mathbb{R}^k$

$$\left(\sum_{i=1}^{k}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

è un'ulteriore norma. Essa risulta equivalente all'usuale norma euclidea.

Tra tutti gli spazi ℓ^p un ruolo particolare riveste lo spazio ℓ^2 che è l'unico la cui norma è indotta dal prodotto scalare

$$<\{x_n\},\{y_n\}>=\sum_{n=1}^{\infty}x_n\overline{y_n}$$

ovviamente finito per la (3.26).

Infine con il simbolo ℓ^∞ si intende lo spazio delle successioni $x=\{x_n\}$ limitate con la norma

$$\|x\|_\infty = \sup_n |x_n| . \tag{3.28}$$

Un sottospazio notevole di ℓ^∞ è costituito dall'insieme c_0 delle successioni infinitesime.
Ricordiamo che tutti gli esempi proposti in tale paragrafo sono da annoverare tra gli spazi vettoriali a dimensione infinita; con ció intendiamo dire che in tutti i casi considerati non è possibile determinare sistemi finiti di generatori. Per quanto riguarda ℓ^2 vedremo più avanti che si puó introdurre un sistema infinito di generatori, una sorta di base, costituita dalla successione di vettori tra loro ortogonali

$$e_i=\{\delta_{ij}\} \tag{3.29}$$

dove

$$\delta_{ij}=\begin{cases} 0 & \text{se } i\neq j \\ \\ 1 & \text{se } i=j \end{cases} \tag{3.30}$$

è noto come "simbolo di Kroneker".
In un certo senso ℓ^2 si presenta come la naturale versione infinito-dimensionale degli spazi euclidei.

Per caratterizzare la convergenza negli spazi ℓ^p è utile riportare il seguente risultato.

Teorema 3.2.1. - *Sia* $\{x_n^{(k)}\}$ *una successione di elementi di* ℓ^p *con* $p \in [1, +\infty[$*; allora tale successione converge a* $\{x_n\}$ *se e solo se*

(i) *per ogni* $n \in N$ *risulta*
$$\lim_{k\to\infty} x_n^{(k)} = x_n\,;$$

(ii) *per ogni* $\varepsilon > 0$ *esiste un indice* ν *tale che*
$$\left(\sum_{i=\nu+1}^{\infty} |x_i^{(k)}|^p\right)^{1/p} < \varepsilon$$
per ogni intero k.

Quindi, contrariamente a quanto avviene negli spazi euclidei, la convergenza non è assicurata dalla convergenza delle successioni numeriche costituite dai termini delle varie successioni che occupano la stessa posizione.
A tale proposito emblematico è il caso della successione (3.29). Infatti le successioni numeriche formate dai termini della successione (3.29) che occupano la stessa posizione sono tutte infinitesime. Essa invece non tende alla successione nulla. Infatti se cosí fosse, per la continuità della norma (cfr. oss. 3.1.1), la successione numerica $\{\|e_i\|_2\}$ dovrebbe essere infinitesima in contrasto col fatto che $\|e_i\|_2 = 1$ per ogni $i \in \mathbb{N}$.

Osservazione 3.2.2. - *Se* $x \in \ell^2$ *si ha*
$$\lim_{i\to\infty} < e_i, x >= \lim_{i\to\infty} x_i = 0\,.$$
Si dice che la successione $\{e_i\}$ *"converge in senso debole" alla successione nulla.*

Per concludere proviamo il seguente risultato.

Teorema 3.2.2. - *Gli spazi* ℓ^p *con* $p \in [1, +\infty]$ *sono spazi di Banach. In particolare* ℓ^2 *è uno spazio di Hilbert.*

Dimostrazione. Basta ovviamente provare la completezza.
Sia $\{x^{(n)}\}$ una successione di Cauchy di ℓ^p. Allora, fissato $\varepsilon > 0$, esiste un indice ν tale che

$$\|x^{(n)} - x^{(m)}\|^p = \sum_{k=1}^{+\infty} |x_k^{(n)} - x_k^{(m)}|^p < \varepsilon^p \tag{3.31}$$

per ogni $n, m > \nu$. Pertanto le singole successioni numeriche $\{x_k^{(n)}\}$ sono convergenti: denotiamo con x_k i relativi limiti. Posto $x = \{x_k\}$ dobbiamo dimostrare che $x \in \ell^p$ e che esso è limite della successione $\{x^{(n)}\}$.
Fissato l'indice h, dalla (3.31) abbiamo
$$\sum_{k=1}^{h} |x_k^{(n)} - x_k^{(m)}|^p < \varepsilon^p$$

da cui, passando al limite su m,

$$\sum_{k=1}^{h} |x_k^{(n)} - x_k|^p \leq \varepsilon^p \,. \tag{3.32}$$

Per la disuguaglianza di Minkowski (cfr. oss. 3.2.1) si ha

$$\left(\sum_{k=1}^{h} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^{h} |x_k^{(n)}|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{h} |x_k^{(n)} - x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} .$$

Dalla limitatezza della successione $\{x^{(n)}\}$ e dalla (3.32) discende che

$$\left(\sum_{k=1}^{+\infty} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} < +\infty \,,$$

quindi $x \in \ell^p$. Inoltre dalla (3.32), facedo divergere l'indice h, si ha

$$\left(\sum_{k=1}^{+\infty} |x_k^{(n)} - x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \varepsilon$$

per ogni $n > \nu$; si ha quindi l'asserto. □

Osservazione 3.2.3. - *Se $p > 1$ si puó dimostrare che valgono le seguenti inclusioni*

$$\ell^1 \subset \ell^p \subset \ell^\infty \,.$$

3.3 Separabilità e compattezza

Richiamiamo la seguente

Definizione 3.3.1. - *Uno spazio metrico M si dice separabile se esiste un sottoinsieme numerabile D che sia denso in M; cioè ogni elemento di M è limite di una successione di elementi di D.*

Osservazione 3.3.1. - *La struttura dei reali è un primo esempio di spazio metrico separabile: infatti l'insieme $\mathbb{Q}$ dei razionali è numerabile e denso in $\mathbb{R}$. Piú in generale lo spazio euclideo $\mathbb{R}^k$ è separabile: un sottoinsieme numerabile e denso è costituito dalle $k-$ple le cui componenti sono numeri razionali.*

Osservazione 3.3.2. - *Tutti gli spazi ℓ^p con $p \in [1, +\infty[$ sono spazi separabili. Un sottoinsieme numerabile e denso è costituito dall'insieme delle successioni con un numero finito di termini non nulli e tutti razionali. Tra l'altro tale proprietà attribuisce a ℓ^2 un ruolo centrale nella teoria degli spazi di Hilbert. Si puó infatti dimostrare che ogni spazio di Hilbert separabile è isomorfo a ℓ^2 e, quindi, in qualche modo con esso identificabile.*

Proposizione 3.3.1. - *Lo spazio ℓ^∞ non è separabile.*

Dimostrazione. Si consideri l'insieme S delle successioni i cui termini sono o zero o uno. Tale insieme non è numerabile, inoltre due suoi elementi distinti hanno distanza uno. Supponiamo che esista una successione D densa in ℓ^∞ e ricopriamo S con le sfere con centri i punti di D e raggio $1/3$. In almeno una di queste devono esserci due punti di S; siano x, y tali due punti e sia z il centro della sfera. Si ha allora

$$1 = \|x - y\| \leq \|x - z\| + \|y - z\| < \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}\,.$$

L'assurdo cui siamo pervenuti prova l'asserto. □

Osservazione 3.3.3. - *Lo spazio $C^0([a, b])$ con la norma (3.16) è anch'esso separabile. Ciò è conseguenza di un risultato, noto come teorema di approssimazione di Weierstrass (cfr. appendice). In base a tale risultato è possibile approssimare in modo uniforme una qualsiasi funzione continua mediante polinomi a coefficienti razionali. Si puó dimostrare che l'insieme costituito da tali polinomi è numerabile.*

Definizione 3.3.2. - *Un sottoinsieme K di uno spazio metrico dicesi compatto se ogni sua successione ha una sottosuccessione convergente ad un elemento dell'insieme stesso.*

Ricordiamo che la compattezza ha un ruolo importante anche nelle applicazioni dal momento che interviene, per esempio, ogni volta che si vuole minimizzare una funzione.

Teorema 3.3.1. (Teorema di Weierstrass) - *Sia f una funzione numerica continua in un compatto K di uno spazio metrico. Allora f è dotata di minimo e di massimo, esistono cioè due punti $x_m, x_M \in K$ tali che, per ogni $x \in K$,*

$$f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M)\,.$$

Dimostrazione. Sia
$$m = \inf_{x \in K} f(x)\,.$$

Per le proprietà dell'estremo inferiore è possibile determinare una successione $\{x_n\}$ di elementi di K tale che

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = m\,. \tag{3.33}$$

Essendo K compatto dalla successione $\{x_n\}$ è possibile estrarre una sottosuccessione $\{x_{n_h}\}$ convergente ad un elemento $\bar{x} \in K$. Per la continuità di f risulta
$$\lim_{h \to \infty} f(x_{n_h}) = f(\bar{x})\,.$$

Tenendo presente la (3.33) si ottiene $f(\bar{x}) = m$, ovvero l'asserto.
In modo analogo si dimostra che f ha massimo. □

È noto che negli spazi euclidei ogni successione limitata ha un'estratta convergente. Da tale risultato discende tra l'altro che un insieme è compatto se e solo se è chiuso e limitato.
Tali proprietà non valgono in spazi a dimensione infinita (cfr. in appendice il teorema di Riesz). A tale proposito può essere utile ancora una volta ricordare la successione (3.29); tale successione è limitata ma da essa non è possibile estrarre ovviamente alcuna successione convergente. Altro esempio riguarda $C^0([0,1])$: la successione di funzioni

$$x \in [0,1] \longrightarrow x^n$$

non ha alcuna sottosuccessione convergente perché essa, e quindi ogni sua sottosuccessione, converge puntualmente ad una funzione discontinua.
È possibile in molti casi caratterizzare i compatti di uno spazio metrico. Per $C^0([a,b])$ tale caratterizzazione è riportata nel teorema di Ascoli-Arzelà la cui dimostrazione è in appendice.
Premettiamo la seguente

Definizione 3.3.3. - *Le funzioni di E, sottoinsieme di $C^0([a,b])$, si dicono equicontinue se, comunque si fissi $\varepsilon > 0$, esiste un $\delta > 0$ tale che*

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon \tag{3.34}$$

per ogni coppia di punti $x, y \in [a,b]$ con $|x-y| < \delta$ e per ogni $f \in E$.

Teorema 3.3.2. (Teorema di Ascoli-Arzelà) - *Sia E un sottoinsieme chiuso e limitato di $C^0([a,b])$; supponiamo inoltre che le funzioni di E siano equicontinue. Allora E è compatto.*

Riportiamo per completezza il seguente ulteriore criterio di compattezza.

Teorema 3.3.3. - *Un sottoinsieme E di ℓ^2 è compatto se è chiuso e limitato e se, per ogni $\varepsilon > 0$, è possibile determinare un indice ν tale che risulti*

$$\sum_{i=\nu+1}^{\infty} |x_i|^2 < \varepsilon$$

comunque si prenda $\{x_i\} \in E$.

Capitolo 4

L'integrale di Lebesgue

4.1 Introduzione

L'approccio alla nozione di integrale solitamente avviene con la definizione che si fa risalire a Riemann. Tale definizione, modellata sul caso delle funzioni continue, mostra tutta la sua efficacia in tale ambito.
È ben noto che, se $\{f_n\}$ è una successione di funzioni continue, uniformemente convergente in un intervallo $[a, b]$, allora la funzione limite è continua e si ha

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \Big(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\Big)\,dx\,. \tag{4.1}$$

In altri termini l'operazione di passaggio al limite sotto il segno di integrale, l'impostazione alla Riemann si rivela adeguata se si fa riferimento alla convergenza indotta dalla norma (3.16) .
Abbiamo già osservato che $C^0([a, b])$ con la norma (3.18) non è completo; esistono cioè successioni $\{f_n\}$, di Cauchy rispetto alla norma (3.18), che convergono, in qualche senso da precisare, a una funzione che non integrabile secondo Riemann. Si puó intervenire sulla definizione di integrale in modo da recuperare tali funzioni tra quelle integrabili e fare in modo che continui a valere la (4.1). Tale questione fu affrontata agli inizi del novecento da Lebesgue che propose una nozione di integrale adatta allo scopo. Premessa indispensabile è una teoria della misura di tipo nuovo anch'essa dovuta a Lebesgue.
Per motivare la necessità di precisare meglio la nozione di misura prendiamo in considerazione una classica questione di calcolo delle probabilità.
Rappresentiamo una successione di lanci di una moneta mediante una sequenza $\{a_n\}$ di cifre dove a_n puó assumere uno dei due valori $0, 1$

$$\omega = a_1\,, a_2\,, \cdots\,, a_n\,, \cdots\,. \tag{4.2}$$

Indichiamo con $s_n(\omega)$ il numero di volte che, nei primi n lanci, compare la faccia della moneta con il simbolo croce, cui facciamo corrispondere per esempio il valore numerico 1; si ha ovviamente

$$s_n(\omega) = \sum_{i=1}^{n} a_i \, .$$

La legge dei grandi numeri afferma che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{s_n(\omega)}{n} = \frac{1}{2}\,; \tag{4.3}$$

c'è da aspettarsi cioè che il caso non preferisca una delle due facce della moneta. La (4.3) va in qualche senso precisata; a tal fine è utile richiamare la nozione di insieme di misura nulla secondo Lebesgue.

Definizione 4.1.1. - *Si dice che un sottoinsieme X di $\mathbb{R}$ ha misura nulla secondo Lebesgue, in simboli $m(X) = 0$, se, fissato ε, esiste una successione di intervalli aperti $I_n =]a_n, b_n[$ tale che $X \subseteq \bigcup_n I_n$ e*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(b_n - a_n) < \varepsilon \, .$$

Sia $\mathcal{B}$ l'insieme delle successioni (4.2), dette successioni di Bernoulli. Identifichiamo $\mathcal{B}$ con un opportuno insieme numerico nel modo seguente. Associamo alla successione (4.2) il numero reale, che continuiamo a denotare con ω, la cui rappresentazione nel sistema binario è

$$\omega = 0, a_1 a_2 \cdots a_n \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n}\,; \tag{4.4}$$

ω appartenente ovviamente all'intervallo $[0, 1]$.
L'applicazione in tal modo costruita non è a stretto rigore biunivoca. Infatti gli allineamenti (4.4) che presentano la cifra 0 al posto n e la cifra 1 a partire dall'indice $n + 1$ vanno identificati con quelli che hanno tutte le cifre nulle a partire dalla cifra di posto $n + 1$ e con 1 al posto n. Se si prescinde da tali casi che, essendo in quantità numerabile, rappresentano un insieme trascurabile in quanto di misura nulla, è possibile identificare l'insieme $\mathcal{B}$ con tutto l'intervallo $[0, 1]$. Ad ogni sottoinsieme E di $\mathcal{B}$ (E è detto evento) corrisponde quindi un sottoinsieme dell'intervallo $[0, 1]$.
Ció premesso enunciamo il seguente risultato secondo il quale la probabilità che il caso preferisca una delle due facce della moneta è effettivamente nulla.

Legge dei grandi numeri - *Consideriamo l'evento*

$$E = \left\{\omega \in [0, 1] \quad : \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{s_n(\omega)}{n} \neq \frac{1}{2}\right\}\,;$$

allora $m(E) = 0$.

Riportiamo ora due esempi interessanti di insiemi di misura nulla.

Esempio 4.1.1. - *Denotiamo con D l'insieme dei numeri razionali contenuti in $[0,1]$. È noto che l'insieme D è numerabile; risulta quindi $D = \{r_n\}_{n\in N}$. Fissato $\varepsilon > 0$, per ogni $n \in \mathbb{N}$ consideriamo l'intervallo*

$$I_n = \left]r_n - \frac{\varepsilon}{2^n}, r_n + \frac{\varepsilon}{2^n}\right[.$$

Si ha $D \subset \bigcup_n I_n$ e

$$\sum_{n=1}^{\infty} m(I_n) = 2\,\varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 2\,\varepsilon\,;$$

dall'arbitrarietà di ε discende che $m(D) = 0$.
In modo analogo si dimostra che ha misura nulla qualsiasi insieme numerabile. Si puó inoltre verificare che D non è misurabile secondo Peano-Jordan.

Esempio 4.1.2. - *Posto $E_0 = [0,1]$ sia*

$$E_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]$$

l'insieme che si ottiente da E_0 eliminando i punti dell'intervallo aperto $\left]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right[$, il cosiddetto terzo medio. Si elimini ora il terzo medio in ognuno dei due intervalli che compongono E_1; si ottiene in tal modo l'insieme

$$E_2 = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right].$$

Cosí procedendo si ottiene una successione di plurintervalli $\{E_n\}$ con le seguenti caratteristiche:

i) E_n è unione di 2^n intervalli di ampiezza 3^{-n};

ii) la successione $\{E_n\}$ è decrescente nel senso che $E_{n+1} \subset E_n$.

Allora

$$C = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$$

si chiama insieme di Cantor. Tale insieme, in quanto intersezione di chiusi, è chiuso. Si puó dimostrare che appartengono a C soli i punti dell'intervallo $[0,1]$ che si possono rappresentare nella forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{3^n}$$

con la cifra α_n che assume o il valore 0 o il valore 2. Appartengono quindi a C solo quei numeri di $[0,1]$ che, in base tre, si rappresentano mediante allineamenti in cui non compare mai la cifra 1; ció tra l'altro comporta che C non è numerabile ma ha la potenza del continuo. Si puó dimostrare inoltre che C è privo di punti interni e di punti isolati.

Infine C ha misura nulla; basta osservare che $C \subset E_n$ con E_n plurintervallo di misura $(\frac{2}{3})^n$; ovviamente ció implica che è nulla anche la misura secondo Peano-Jordan di C.
L'insieme di Cantor è il primo significativo esempio di insieme frattale; per tali insiemi si puó introdurre la nozione di dimensione frattale che non sempre è rappresentata da un intero. Nel caso dell'insieme C la dimensione è

$$d = \frac{\log 2}{\log 3} = 0,63\ldots .$$

4.2 Misura secondo Lebesgue

Per definire la misura di un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ il punto di partenza consiste nell'attribuire intanto una misura agli intervalli $I = [a, b]$ per i quali

$$m(I) = b - a\,.$$

Come passo successivo si considerino gli insiemi della forma

$$P = \bigcup_{k=1}^{n} I_k\,,$$

i cosiddetti "plurintervalli", unione di un numero finito di intervalli I_k a due a due privi di punti interni comuni; si pone

$$m(P) = \sum_{k=1}^{n} m(I_k)\,. \tag{4.5}$$

Va osservato che la definizione (4.5) è ben posta dal momento che il valore numerico in tal modo determinato non dipende dal modo in cui P viene decomposto in unione di intervalli. I plurintervalli costituiscono i tasselli necessari per costruire la misura secondo Peano-Jordan. Per pervenire ad una generalizzazione di tale nozione di misura è necessario intanto ampliare la nozione di plurintervallo.

Definizione 4.2.1. - *Sia A un sottoinsieme limitato di $\mathbb{R}$. Per "ricoprimento" di A intendiamo una successione $\{I_n\}$ di intervalli aperti tale che*

$$A \subseteq \bigcup_{n} I_n\,.$$

Si definisce "misura esterna" di A la quantità

$$m^*(A) = \inf\left\{\sum_n m(I_n)\right\}\,,$$

dove l'estremo inferiore è ottenuto al variare dei ricoprimenti di A.

Sembra quindi che con tale nozione si possa attribuire una misura ad un qualsiasi sottoinsieme di $\mathbb{R}$. Purtroppo peró la misura esterna non risponde ad un requisito essenziale, noto con il nome di numerabile additività: si richiede che l'unione di una successione di insiemi misurabili, a due a due disgiunti, sia misurabile e che la sua misura sia la somma delle misure dei singoli insiemi. Per recuperare tale proprietà bisogna selezionare una opportuna classe di sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ mediante il seguente procedimento.

Definizione 4.2.2. - *La misura interna di un insieme limitato A è la quantità*

$$m_*(A) = m(I) - m^*(I \backslash A)$$

dove I è un intervallo contenente A.
Si dice che A è misurabile se $m_*(A) = m^*(A)$ ovvero se

$$m^*(A) + m^*(I \backslash A) = m(I)\,.$$

Si pone allora

$$m(A) = m_*(A) = m^*(A)\,.$$

La definizione di misurabilità puó essere estesa al caso di insiemi non limitati. Si dice che A è misurabile se risultano misurabili gli insiemi limitati $A_r = A \cap [-r, r]$ per ogni $r > 0$. La misura secondo Lebesgue di A è allora

$$m(A) = \lim_{r \to \infty} m(A_r)\,.$$

Ovviamente tale misura puó anche non essere finita.

Denotiamo con $\mathcal{M}$ l'insieme dei sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ misurabili secondo Lebesgue. Riportiamo le principali proprietà di $\mathcal{M}$ e di m.

Teorema 4.2.1. - *La famiglia $\mathcal{M}$ è un σ-anello:*

- *se $A, B \in \mathcal{M}$ allora $A \cup B$ e $A \setminus B$ appartengono a $\mathcal{M}$;*
- *se $\{A_k\}$ è una successione di insiemi appartenenti a $\mathcal{M}$ allora*

$$\bigcup_k A_k \in \mathcal{M}\,.$$

La misura m è "numerabilmente additiva": se $\{A_k\}$ è una successione di insiemi misurabili a due a due disgiunti allora

$$m\left(\bigcup_k A_k\right) = \sum_k m(A_k)\,.$$

Osservazione 4.2.1. - *Ovviamente risulta misurabile anche un insieme che sia intersezione di una successione di insiemi misurabili.*

È appena il caso di ricordare che la nozione di misura secondo Lebesgue generalizza quella di misura secondo Peano-Jordan e che, come osservato nell'es. 4.1.1, esistono insiemi misurabili secondo Lebesgue ma non secondo Peano-Jordan.

Esempio 4.2.1. - *Costruiamo un ulteriore insieme misurabile secondo Lebesgue ma non secondo Peano-Jordan con una procedura simile a quella utilizzata nell'es.* 4.1.2 *per definire l'insieme di Cantor.*
Partiamo sempre dall'intervallo $[0,1]$. *Fissato* $a \in]0,1[$ *si cancellino i punti dell'intervallo aperto, di centro* $\frac{1}{2}$ *e di ampiezza* $\frac{a}{2}$*, i cui estremi sono* $\frac{1}{2}-\frac{a}{4}$ *e* $\frac{1}{2}+\frac{a}{4}$. *Dai due intervalli rimanenti cancelliamo gli intervalli aperti, centrati nei rispettivi punti medi, di ampiezza* $\frac{a}{2^3}$. *Restano quattro intervalli chiusi: da questi, con la stessa procedura, cancelliamo gli intervalli aperti di ampiezza* $\frac{a}{2^5}$. *Dopo aver ripetuto il procedimento* n *volte la misura del plurintervallo unione degli intervalli in tal modo eliminati è*

$$a\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots\frac{1}{2^n}\right).$$

Iterando il procedimento si ottiene una successione di plurintervalli la cui unione ha misura a*; il complementare in* $[0,1]$ *di tale insieme ha quindi misura* $1-a$. *Poiché tale insieme è privo di punti interni la sua frontiera non ha misura nulla; quindi, esso non puó essere misurabile secondo Peano-Jordan.*

4.3 Integrale secondo Lebesgue

Premettiamo la seguente definizione.

Definizione 4.3.1. - *Si dice che una funzione* f *definita in* $\mathbb{R}$ *e a valori reali è "misurabile" se per ogni* $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\{x : f(x) > \alpha\} \tag{4.6}$$

è misurabile.

Osservazione 4.3.1. - *Il segno* $>$ *che compare in* (4.6) *puó essere sostituito da uno qualsiasi dei simboli* $<$, $\le$ *e* $\ge$.

Si puó dimostrare facilmente che la somma e il prodotto di due funzioni misurabili è misurabile. Per i nostri scopi è di particolare importanza il seguente risultato.

Teorema 4.3.1. - *Sia* $\{f_n\}$ *una successione, eventualmente finita, di funzioni misurabili. Allora sono misurabili le funzioni*

$$\inf_n f_n\,,\quad \sup_n f_n\,,\quad \liminf_n f_n\,,\quad \limsup_n f_n\,. \tag{4.7}$$

In particolare se la successione converge puntualmente allora il suo limite è misurabile.

Dimostrazione. Dimostriamo che è misurabile la funzione $\sup_n f_n$. Osservato che

$$\{x \,:\, \sup_n f_n(x) > \alpha\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \,:\, f_n(x) > \alpha\}$$

il risultato consegue dal fatto che $\mathcal{M}$ è un σ-anello (cfr. teo. 4.2.1). In modo analogo si procede per la funzione $\inf_n f_n$.
Questo basta anche per poter concludere che le altre funzioni in (4.7) sono misurabili. □

Definizione 4.3.2. - *Dato un sottoinsieme E di $\mathbb{R}$ per funzione caratteristica di E si intende*

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & \textit{se } x \in E \\ \\ 0 & \textit{se } x \notin E\,. \end{cases}$$

Definizione 4.3.3. - *Una combinazione lineare di funzioni caratteristiche di n insiemi misurabili e limitati E_i, a due a due disgiunti,*

$$s(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i \chi_{E_i}(x) \tag{4.8}$$

si dice "funzione semplice".

Le funzioni (4.8) sono ovviamente misurabili. Si ha il seguente risultato.

Teorema 4.3.2. - *Sia f una funzione misurabile e non negativa. Esiste allora una successione crescente di funzioni semplici $\{s_k\}$ tale che*

$$\lim_{k\to\infty} s_k(x) = f(x)\,.$$

Dimostrazione. Fissato un intero k consideriamo gli insiemi misurabili

$$F_k = \{x \,:\, f(x) \geq k\}$$

e, se j è un intero al piú uguale a $k\,2^k$,

$$F_{k,j} = \left\{ x \,:\, \frac{j-1}{2^k} \leq f(x) < \frac{j}{2^k} \right\}.$$

Consideriamo la funzione semplice

$$s_k(x) = k\,\chi_{F_k}(x) + \sum_{j=1}^{k2^k} \frac{j-1}{2^k}\,\chi_{F_{k,j}}(x)\,. \tag{4.9}$$

Si verifica facilmente che la successione $\{s_k\}$ ha le proprietà richieste. □

Le funzioni semplici hanno un ruolo strategico nella trattazione dell'integrale secondo Lebesgue in primo luogo perché per tali funzioni esso puó essere definito in modo naturale. Infatti l'integrale della funzione semplice (4.8) è

$$\int s\,dx = \sum_{i=1}^{n} c_i\, m(E_i)\,; \tag{4.10}$$

si adotta la convenzione che se s è nulla su un insieme E_i di misura non finita allora è nullo il relativo termine nella somma a secondo membro in (4.10) .

Definizione 4.3.4. - *Sia $f \geq 0$ una funzione misurabile. Indichiamo con $\mathcal{S}$ l'insieme delle funzioni semplici s tali che $s \leq f$. Per integrale secondo Lebesgue di f si intende la quantità, non necessariamente finita,*

$$\int f\,dx = \sup_{s\in\mathcal{S}} \int s\,dx\,.$$

Se l'integrale è finito si dice che f è sommabile.

Resta da discutere il caso in cui la funzione sia di segno variabile. Le funzioni

$$f^+(x) = \max\{f(x), 0\}\,, \quad f^-(x) = \max\{-f(x), 0\}$$

sono misurabili per il teo. 4.3.1. Si dice allora che f è sommabile se tali sono le due funzioni f^+, f^-; si pone allora

$$\int f\,dx = \int f^+\,dx - \int f^-\,dx\,.$$

Se f è una funzione a valori complessi essa si dice sommabile se tali sono la sua parte reale e il coefficiente dell'immaginario.
Infine, se f è definita in un insieme misurabile E, si prolunghi f in $\mathbb{R}$ ponendola uguale a zero al di fuori di E. Se tale funzione è misurabile il suo integrale si indica con il simbolo

$$\int_E f\,dx\,.$$

L'insieme delle funzioni definite in E e sommabili , a valori reali o complessi, si indica con il simbolo $L^1(E)$. Ovviamente, se $f \in L^1(E)$ e F è un sottoinsieme misurabile di E allora la restrizione di f a F appartiene a $L^1(F)$.

Se $f \in L^1(E)$ vale la seguente proprietà

$$m(E) = 0 \Longrightarrow \int_E f\,dx = 0\,. \tag{4.11}$$

Dalla (4.11) discende che l'integrale di una funzione f non cambia se ne modificano i valori su un insieme di misura nulla.
La (4.11) prende il nome di proprietà di assoluta continuità dell'integrale rispetto alla misura di Lebesgue. Di solito la (4.11) viene anche formulata nel modo seguente

(AC) *Ad ogni $\varepsilon > 0$ corrisponde un $\delta > 0$ tale che*

$$\left| \int_F f\, dx \right| < \varepsilon$$

per tutti i sottoinsiemi F di E misurabili tali che $m(F) < \delta$.

Definizione 4.3.5. - *Diremo che una certa proprietà riferita a una o piú funzioni definite in un insieme $E \in \mathcal{M}$ sussiste quasi ovunque* (*sinteticamente q.o.*) *in E se essa vale per tutti i punti di E tranne che per quelli appartenenti ad un insieme di misura nulla.*

Teorema 4.3.3. - *Sia $E \in \mathcal{M}$; sussistono le seguenti proprietà.*

a) *Per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e per ogni $f, g \in L^1(E)$ risulta*

$$\int_E (\alpha f + \beta g)\, dx = \alpha \int_E f\, dx + \beta \int_E g\, dx\,;$$

b) *se $f, g \in L^1(E)$ e $f \leq g$ q.o. in E allora*

$$\int_E f\, dx \leq \int_E g\, dx\,;$$

c) *se $f \in L^1(E)$ allora anche $|f| \in L^1(E)$ e si ha*

$$\left| \int_E f\, dx \right| \leq \int_E |f|\, dx\,;$$

d) *se $E = \cup_n E_n$ con $\{E_n\}$ successione, eventualmente finita, di insiemi misurabili a due a due disgiunti, allora*

$$\int_E f\, dx = \sum_n \int_{E_n} f\, dx\,.$$

Solo per semplicità ci siamo limitati a illustrare le nozioni di misura, di funzione misurabile e di integrale secondo Lebesgue nel caso unidimensionale. Esse possono essere estese in modo naturale a spazi euclidei di dimensione superiore. Per denotare l'integrale per esempio di una funzione f esteso al piano utilizzeremo il solito simbolo

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x, y)\, dxdy\,.$$

Limitiamoci qui a ricordare il seguente risultato (cfr. per esempio [7]).

Teorema 4.3.4. (**Teorema di Fubini-Tonelli**) - *Sia f una funzione misurabile in $\mathbb{R}^2$.*

(i) *Se f è sommabile in $\mathbb{R}^2$ allora per q.o. $x \in \mathbb{R}$ la funzione*

$$y \in \mathbb{R} \longrightarrow f(x,y) \tag{4.12}$$

è sommabile; ed è sommabile anche la funzione

$$x \in \mathbb{R} \longrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy\,. \tag{4.13}$$

Si ha inoltre

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy\,. \tag{4.14}$$

(ii) *Sia $f \geq 0$ quasi ovunque. Se la funzione* (4.12) *è sommabile per quasi ogni x e la funzione* (4.13) *è sommabile allora f è sommabile in $\mathbb{R}^2$ e vale la* (4.14).

Analoghi risultati valgono se si scambiano i ruoli delle variabili x, y.

Definizione 4.3.6. - *Siano f, g due funzioni misurabili in $\mathbb{R}$; la funzione*

$$h(x) = (f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\,g(x-y)\,dy \tag{4.15}$$

prende il nome di "prodotto di convoluzione" di f e g.

Sussiste il seguente risultato.

Proposizione 4.3.1. - *Se $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ allora il loro prodotto di convoluzione appartiene a $L^1(\mathbb{R})$.*

Dimostrazione. Osserviamo innanzitutto che la funzione $g(x-y)$ è misurabile in $\mathbb{R}^2$.
Per quasi ogni y la funzione

$$x \longrightarrow |f(y)||g(x-y)|$$

è sommabile. Risulta infatti

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(y)||g(x-y)|\,dx = |g(y)|\,\|f\|_1$$

da cui discende che

$$y \longrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} |f(y)||g(x-y)|\,dx$$

è sommabile.
Per la parte (ii) del teo. 4.3.4 si ha che $g(y)f(x-y)$ è sommabile in $\mathbb{R}^2$.
Si ha inoltre

$$\|h\|_1 \leq \int_{-\infty}^{+\infty} dy \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |g(y)||f(x-y)|\,dx\right) = \|f\|_1\|g\|_1$$

da cui l'asserto. □

4.4 Passaggio al limite sotto il segno di integrale

Il primo risultato di passaggio al limite sotto il segno di integrale è il seguente "teorema della convergenza monotona".

Teorema 4.4.1. - *Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni misurabili e definite in un insieme $E \in \mathcal{M}$; se*

$$0 \le f_1(x) \le f_2(x) \le \cdots \le f_n(x) \le \cdots , \quad q.o. \text{ in } E \tag{4.16}$$

e f è la funzione, definita quasi ovunque in E, limite puntuale di $\{f_n\}$ allora

$$\int_E f\, dx = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n\, dx . \tag{4.17}$$

Dimostrazione. La funzione f è misurabile per il teo. 4.3.1.
Per la (4.16) risulta crescente la successione numerica il cui termine generale è

$$\int_E f_n\, dx ;$$

sia L il suo limite. Poiché

$$\int_E f_n\, dx \le \int_E f\, dx$$

si ha

$$L \le \int_E f\, dx . \tag{4.18}$$

Dimostriamo che

$$L \ge \int_E f\, dx . \tag{4.19}$$

Sia s una funzione semplice non negativa tale che $s(x) \le f(x)$.
Fissato $\delta \in]0,1[$, poniamo

$$E_n = \{x \in E \,:\, f_n(x) \ge \delta s(x)\} .$$

La successione $\{E_n\}$ è crescente e risulta $E = \bigcup_n E_n$. Si ha

$$L = \lim_n \int_E f_n\, dx \ge \int_E f_n\, dx \ge \int_{E_n} f_n\, dx \ge \delta \int_{E_n} s\, dx ,$$

da cui, per l'arbitrarietà di δ,

$$L \ge \int_{E_n} s\, dx . \tag{4.20}$$

Verifichiamo che
$$\lim_n \int_{E_n} s\,dx = \int_E s\,dx\,.$$
Poniamo $A_1 = E_1$ e, se $n > 1$, $A_n = E_n \backslash E_{n-1}$. Per la proprietà d) del teo. 4.3.3 si ha
$$\int_E s\,dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{A_k} s\,dx = \lim_n \left(\sum_{k=1}^{n} \int_{A_k} s\,dx \right) = \lim_n \int_{E_n} s\,dx\,.$$
Dalla (4.20) si ha allora
$$L \geq \int_E s\,dx\,.$$
Dalla definizione di integrale secondo Lebesgue discende la (4.19) e, quindi, ricordando la (4.18), l'asserto. □

Dimostriamo ora il seguente risultato noto come "lemma di Fatou".

Lemma 4.4.1. - *Sia* $\{f_k\}$ *una successione di funzioni non negative e misurabili in un insieme* $E \in \mathcal{M}$. *Si ha allora*
$$\int_E \left(\liminf_{k\to\infty} f_k \right) dx \leq \liminf_{k\to\infty} \left(\int_E f_k\,dx \right)\,. \tag{4.21}$$
Dimostrazione. Poniamo
$$g_n(x) = \inf_{k\geq n} f_k(x)$$
e
$$a_n = \inf_{k\geq n} \left(\int_E f_k(x)\,dx \right)\,.$$
Le funzioni g_n sono misurabili per il teo. 4.3.1. Inoltre la successione $\{g_n\}$ è crescente e ha per limite la funzione
$$f = \liminf_{k\to\infty} f_k\,.$$
Risulta anche
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} \left(\int_E f_n(x)\,dx \right)\,.$$
Essendo $g_n(x) \leq f_k(x)$ se $n \leq k$ si ha
$$\int_E g_n\,dx \leq \int_E f_k\,dx \qquad \forall k \geq n$$
e quindi
$$\int_E g_n\,dx \leq a_n\,.$$
In definitiva, per il teo. 4.4.1, si ha
$$\int_E f\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_E g_n\,dx \leq \lim_{n\to\infty} a_n$$
da cui l'asserto. □

Terminiamo con il seguente risultato noto come "teorema della convergenza dominata".

Teorema 4.4.2. - *Sia $E \in \mathcal{M}$ e sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni misurabili convergente q.o. in E ad una funzione f; supponiamo inoltre che esista una funzione $g \in L^1(E)$ tale che per ogni n*

$$|f_n(x)| \le g(x)\,, \quad q.o.\ in\ E\,. \tag{4.22}$$

Allora $f \in L^1(E)$ e vale la (4.17).

Dimostrazione. Facciamo vedere innanzitutto che f è sommabile. Infatti per il lemma di Fatou e la (4.22) si ha

$$\int_E |f|\,dx = \int_E \lim_{n\to\infty} |f_n|\,dx \le \liminf_{n\to\infty} \int_E |f_n|\,dx \le \int_E g\,dx\,.$$

Essendo le funzioni $g + f_n$ non negative sempre per il lemma di Fatou si ha

$$\int_E (f+g)\,dx \le \liminf_k \int_E (f_k + g)\,dx = \liminf_k \left(\int_E f_k\,dx\right) + \int_E g\,dx$$

da cui

$$\int_E f\,dx \le \liminf_k \left(\int_E f_k\,dx\right)\,. \tag{4.23}$$

Allo stesso modo, prendendo in considerazione la successione di funzioni non negative $\{g - f_n\}$, si ha

$$\int_E (g-f)\,dx \le \liminf_k \left(\int_E (g-f_n)\,dx\right) = \int_E g\,dx - \limsup_k \left(\int_E f_k\,dx\right)$$

da cui

$$\limsup_k \int_E f_k\,dx \le \int_E f\,dx\,. \tag{4.24}$$

Da (4.23) e (4.24) si ottiene la (4.17). □

La definizione di integrale secondo Lebesgue è modellata sulla definizione di integrale secondo Riemann; la differenza sta nel diverso significato da attribuire alle funzioni semplici nei due contesti. Infatti in relazione all'integrale di Riemann le funzioni semplici sono combinazioni lineari di funzioni caratteristiche di intervalli.

Proposizione 4.4.1. - *Una funzione f limitata e integrabile secondo Riemann in un intervallo I è anche integrabile secondo Lebesgue; inoltre i due integrali coincidono.*

Dimostrazione. Per ogni n decomponiamo I in 2^n intervalli di eguale ampiezza i cui estremi denotiamo con x_k $(k = 1, \cdots, 2^n)$. Definiamo le funzioni semplici

$$\begin{aligned} s_n(x) &= \sum_{k=1}^{2^n} \left(\inf_{[x_{k-1}, x_k]} f \right) \chi_{[x_{k-1}, x_k]}(x) \\ S_n(x) &= \sum_{k=1}^{2^n} \left(\sup_{[x_{k-1}, x_k]} f \right) \chi_{[x_{k-1}, x_k]}(x) . \end{aligned}$$

Le successioni $\{s_n\}$ e $\{S_n\}$ sono monotone, la prima crescente, la seconda decrescente; siano s, S i rispettivi limiti. Si ha ovviamente $s \leq f \leq S$. Inoltre, per il teorema 4.4.2, essendo f integrabile secondo Riemann, risulta

$$0 \leq \int_I (S - s)\, dx = \lim_n \int_I (S_n - s_n)\, dx = 0 .$$

Ció implica che $s = f = S$ e che l'integrale di Lebesgue di f coincide con quello di Riemann. $\square$

Proponiamo una interessante applicazione del teorema della convergenza dominata.
Consideriamo la seguente funzione di classe $C^\infty(\mathbb{R})$

$$x \longrightarrow \eta(x) = \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} .$$

Per la (2.4) si ha

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \eta(x)\, dx = 1 . \tag{4.25}$$

Per ogni $\varepsilon > 0$ poniamo

$$\eta_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon}\, \eta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) ; \tag{4.26}$$

tali funzioni prendono il nome di "mollificatori".
Un altro modo di pervenire a mollificatori è partire dalla funzione

$$\eta(x) = \begin{cases} c \,\exp\left[\dfrac{1}{x^2 - 1}\right] & \text{se } |x| < 1 \\ \\ 0 & \text{se } |x| \geq 1 , \end{cases} \tag{4.27}$$

dove la costante c va scelta in modo tale che risulti soddisfatta la (4.25).

Se $f \in L^1(\mathbb{R})$, consideriamo il "prodotto di convoluzione"

$$f_\varepsilon(x) = (\eta_\varepsilon * f)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \eta_\varepsilon(x - y) f(y)\, dy . \tag{4.28}$$

Sussiste il seguente risultato.

Teorema 4.4.3. - *Le funzioni* (4.28) *sono di classe* C^∞. *Se* f *è continua e limitata si ha inoltre*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} f_\varepsilon(x) = f(x) \tag{4.29}$$

uniformemente sui compatti di $\mathbb{R}$.

Dimostrazione. Si ha

$$\frac{f_\varepsilon(x+h)-f_\varepsilon(x)}{h} = \frac{1}{\varepsilon}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{h}\left[\eta\left(\frac{x+h-y}{\varepsilon}\right) - \eta\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)\right] f(y)\,dy\,.$$

Il limite della funzione integranda, per h che tende a zero, è

$$\frac{d}{dx}\left[\eta\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)\right] f(y)\,;$$

inoltre, per il teorema di Lagrange, essa si maggiora con

$$\frac{1}{\varepsilon}\,(\sup|\eta'|)\,|f| \in L^1(\mathbb{R})\,.$$

Per il teo. 4.4.2 si ha allora

$$\lim_{h\to 0}\frac{f_\varepsilon(x+h)-f_\varepsilon(x)}{h} = \frac{1}{\varepsilon}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{dx}\left[\eta\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)\right] f(y)\,dy\,.$$

Essendo

$$\eta'_\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon^2}\,\eta'\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)$$

risulta

$$\frac{d}{dx}\left[\eta\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)\right] = \frac{1}{\varepsilon}\eta'\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) = \varepsilon\eta'_\varepsilon(x-y) = \varepsilon\frac{d}{dx}\left[\eta_\varepsilon(x-y)\right]\,.$$

Si ha in definitiva

$$f'_\varepsilon(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{dx}\left[\eta_\varepsilon(x-y)\right] f(y)\,dy\,.$$

Quindi f_ε è derivabile e la sua derivata si ottiene derivando sotto il segno di integrale.
In modo analogo si ragiona per ottenere tutte le derivate successive.

Ricorrendo al cambio di variabili $x-y=\varepsilon z$ si ha

$$f_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon}\int_{-\infty}^{+\infty} \eta\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) f(y)\,dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \eta(z) f(x-\varepsilon z)\,dz\,. \tag{4.30}$$

Per l'ipotesi di continuità di f in x, per ogni $\sigma>0$ esiste un δ tale che

$$|f(x)-f(y)|<\sigma$$

se $|x-y|<\delta$.
Tenendo presente la (4.25) si ha

$$\begin{aligned}
|f_\varepsilon(x)-f(x)| &= \left|\int_{-\infty}^{+\infty}\eta(z)f(x-\varepsilon z)\,dz - f(x)\int_{-\infty}^{+\infty}\eta(z)\,dz\right| \\
&\le \int_{-\infty}^{+\infty}\eta(z)|f(x-\varepsilon z)-f(x)|\,dz \\
&= \int_{|z|<\delta/\varepsilon}\eta(z)|f(x-\varepsilon z)-f(x)|\,dz \\
&+ \int_{|z|\ge\delta/\varepsilon}\eta(z)|f(x-\varepsilon z)-f(x)|\,dz = I_1+I_2\,.
\end{aligned}$$

Sia $\varepsilon<\delta$; se $|z|<\delta/\varepsilon$ si ha

$$|f(x-\varepsilon z)-f(x)|<\sigma \tag{4.31}$$

e quindi $I_1<\sigma$.
Se $M=\sup|f|$ risulta

$$I_2\le 2\,M\int_{|z|\ge\delta/\varepsilon}\eta(z)\,dz\,.$$

Esiste un δ' tale che, se $\varepsilon<\delta'$, per la (4.25) si ha

$$\int_{|z|\ge\delta/\varepsilon}\eta(z)\,dz<2\,M\,\sigma$$

da cui $I_2<\sigma$ se si sceglie ε secondo quanto sopra indicato.
Abbiamo quindi la (4.29).
Se si osserva che, per il teorema di Cantor, la (4.31) vale per x appartenente ad un compatto si ottiene l'uniforme convergenza di f_ε a f sui compatti di $\mathbb{R}$. □

Osservazione 4.4.1. - *Il risultato ottenuto afferma in sostanza che le funzioni continue si possono approssimare in modo uniforme con funzioni di classe C^∞ e le funzioni approssimanti si possono ottenere per quadratura mediante un prodotto di convoluzione tra la funzione data e un mollificatore. Accenneremo piú avanti al fatto che tale procedimento puó essere utilizzato anche per funzioni meno regolari; la convergenza ovviamente non sarà quella uniforme.*

Osservazione 4.4.2. - *La famiglia di funzioni $\{\eta_\varepsilon\}$ converge a zero in $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ e quindi quasi ovunque. In tal caso peró non si puó passare al limite sotto il segno di integrale in quanto da (4.25) discende che*

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\eta_\varepsilon(x)\,dx=1\,.$$

Si conviene che $\{\eta_\varepsilon\}$ converge ad una "misura concentrata" nell'origine nota come "delta di Dirac".

4.5 Gli spazi L^p

Abbiamo accennato nel paragrafo precedente al fatto che l'integrale di una funzione misurabile non risente delle eventuali variazioni dei valori della funzione su insiemi di misura nulla. Ció suggerisce di identificare funzioni che differiscano solo su insiemi di misura nulla. Formalmente ció viene fatto introducendo in $L^1(E)$, con $E \in \mathcal{M}$, la seguente relazione di equivalenza

$$f \sim g \Longleftrightarrow f(x) = g(x) \quad \text{q.o. in } E\,.$$

L'insieme $L^1(E)$ viene in tal modo ripartito in classi di equivalenza. Nel seguito, per funzione intendiamo per l'appunto una tale classe di equivalenza. All'atto pratico tale punto di vista non comporta alcun problema perché possiamo sempre riferirci ad una delle funzioni della classe; ogni altra funzione differisce da quella scelta solo su un insieme di misura nulla.

Fissato $p \in [1, +\infty[$, consideriamo l'insieme $L^p(E)$ delle funzioni misurabili in E tali che

$$\int_E |f|^p\,dx < +\infty\,.$$

Innanzitutto va verificato che $L^p(E)$ è uno spazio vettoriale.
Dalla (3.22) si ha

$$\int_E |f+g|^p\,dx \le 2^{p-1}\left(\int_E |f|^p\,dx + \int_E |g|^p\,dx\right) < +\infty\,.$$

Se $f \in L^p(E)$ poniamo

$$\|f\|_p = \left(\int_E |f|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}\,. \tag{4.32}$$

Verifichiamo che (4.32) è una norma. Si ha ovviamente

$$\|f\|_p = 0 \Longleftrightarrow f = 0 \quad \text{q.o. in } E\,.$$

Per quanto detto all'inizio del paragrafo possiamo affermare che $f = 0$, intendendo con ció che si sta prendendo in considerazione la classe di equivalenza cui appartiene la funzione identicamente nulla.
Si ha anche

$$\|\alpha f\|_p = |\alpha|\,\|f\|_p\,.$$

Resta quindi solo da verificare la proprietà triangolare.
Cominciamo dimostrando la seguente disuguaglianza di Hölder.

Teorema 4.5.1. - *Se $f \in L^p(E)$ e $g \in L^q(E)$ con p, q che soddisfano la* (3.24) *si ha*

$$\left|\int_E fg\,dx\right| \le \left(\int_E |f|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_E |g|^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}} = \|f\|_p \|g\|_q\,. \tag{4.33}$$

Dimostrazione. Facendo uso della disuguaglianza (3.25) si ha

$$\frac{|f(x)|}{\|f\|_p}\,\frac{|g(x)|}{\|g\|_q} \le \frac{1}{p}\,\frac{|f(x)|^p}{\|f\|_p^p} + \frac{1}{q}\,\frac{|g(x)|^q}{\|g\|_q^q}\,.$$

Sfruttando tale disuguaglianza, le proprietà a), b), c) del teo. 4.3.3, le (4.32) e (3.24), si ha

$$\begin{aligned}\left|\int_E \frac{f}{\|f\|_p}\,\frac{g}{\|g\|_q}dx\right| &\le \int_E \frac{|fg|}{\|f\|_p\|g\|_q}\,dx \\ &\le \frac{1}{p}\int_E \frac{|f|^p}{\|f\|_p^p}dx + \frac{1}{q}\int_E \frac{|g|^q}{\|g\|_q^q}dx = \frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1\,,\end{aligned}$$

ovvero la (4.33). □

Siamo ora in grado di dimostrare la disuguaglianza triangolare

$$\|f+g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p\,, \quad \forall f,g \in L^p(E)\,, \tag{4.34}$$

nota anche come disuguaglianza di Minkovski.
Se $p = 1$ la (4.34) discende in modo banale dalle proprietà dell'integrale secondo Lebesgue riportate nel teo. 4.3.3. Soffermiamoci quindi sul caso $p > 1$. Si verifica facilmente che

$$\|\,|f+g|^{p-1}\|_q = \|f+g\|_p^{p-1}\,. \tag{4.35}$$

Si ha allora

$$\begin{aligned}\|f+g\|_p^p &= \int_E |f+g|^p\,dx = \int_E |f+g|\,|f+g|^{p-1}\,dx \\ &\le \int_E |f|\,|f+g|^{p-1}\,dx + \int_E |g|\,|f+g|^{p-1}\,dx \\ &\qquad \text{(per la (4.33))} \\ &\le \|f\|_p\|\,|f+g|^{p-1}\|_q + \|g\|_p\|\,|f+g|^{p-1}\|_q \\ &\qquad \text{(per la (4.35))} \\ &= (\|f\|_p + \|g\|_p)\,\|f+g\|_p^{p-1}\,,\end{aligned}$$

da cui ovviamente la (4.34).

Riportiamo i seguenti risultati.

Proposizione 4.5.1. - *Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni convergente a f in $L^p(E)$. Per ogni $g \in L^q(E)$, con q esponente coniugato di p, si ha*

$$\lim_{n\to+\infty}\int_E f_n\,g\,dx = \int_E f\,g\,dx\,.$$

Dimostrazione. Per la (4.33) si ha

$$\left|\int_E f_n\, g\, dx - \int_E f\, g\, dx\right| \le \int_E |(f_n - f)\, g|\, dx \le \|f_n - f\|_p \|g\|_q$$

da cui l'asserto in quanto per ipotesi la successione converge a f in $L^p(E)$. $\square$

Proposizione 4.5.2. - *Sia E un insieme di misura finita. Allora se $p < q$ si ha $L^q(E) \subset L^p(E)$.*

Dimostrazione. Per la disuguaglianza di Hölder si ha

$$\int_E |f|^p\, dx \le \left(\int_E |f|^q\, dx\right)^{p/q} m(E)^{\frac{q-p}{q}}$$

ovvero

$$\|f\|_p \le m(E)^{\frac{q-p}{pq}}\, \|f\|_q\,.$$

In definitiva se la norma di f in $L^q(E)$ è finita lo è anche la norma in $L^p(E)$. $\square$

Definizione 4.5.1. - *Si dice che f appartiene a $L^\infty(E)$ se esiste una costante λ tale che $|f(x)| \le \lambda$ per ogni $x \in E \backslash E_\lambda$ con $m(E_\lambda) = 0$. L'estremo inferiore dei valori λ, noto di "estremo superiore essenziale" di f, è una norma. Essa si denota con il simbolo $\|f\|_\infty$.*

Teorema 4.5.2. - *Gli spazi $L^p(E)$, con $p \in [1, \infty]$, sono completi.*

Dimostrazione. Consideriamo dapprima il caso $p < \infty$. Sia $\{f_n\}$ una successione di Cauchy. È possibile allora determinare una sottosuccessione $\{f_{n_k}\}$ tale che

$$\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_p < 2^{-k}\,. \tag{4.36}$$

Posto

$$S_k(x) = \sum_{i=1}^{k} |f_{n_{i+1}}(x) - f_{n_i}(x)|$$

per la (4.36) e per la disuguaglianza di Minkowski si ha

$$\|S_k\|_p < 1\,.$$

Se

$$S(x) = \lim_k S_k(x)$$

per il lemma di Fatou si ha

$$\int_E S^p\, dx \le \lim_k \int_E S_k^p\, dx \le 1\,.$$

Quindi la funzione S è quasi ovunque finita; pertanto, sempre per quasi ogni $x \in E$, risulta assolutamente convergente la serie

$$f_{n_1}(x) + \sum_{i=1}^{\infty} (f_{n_{i+1}}(x) - f_{n_i}(x))\,; \tag{4.37}$$

indichiamo con f la somma di (4.37) e prolunghiamo f a zero sull'insieme di misura nulla nei cui punti la serie potrebbe non convergere. La successione delle somme parziali di (4.37) è $\{f_{n_k}\}$; si ha quindi

$$\lim_k f_{n_k} = f(x) .$$

Abbiamo in definitiva dimostrato la convergenza puntuale ad f di una sottosuccessione di $\{f_n\}$. Verifichiamo ora che tutta la successione converge in $L^p(E)$ a f. Fissato $\varepsilon > 0$ esiste un indice ν tale che $\|f_n - f_m\|_p < \varepsilon$ se $n, m > \nu$. Allora, per ogni $n > \nu$ si ha, applicando il lemma di Fatou,

$$\int_E |f_n - f|^p \, dx \leq \liminf_k \int_E |f_n - f_{n_k}|^p \, dx \leq \varepsilon^p .$$

Ció implica che le funzioni $f_n - f$ appartengono a $L^p(E)$. Quindi anche f è in $L^p(E)$; inoltre la successione converge a f in $L^p(E)$.
Per quanto riguarda $L^\infty(E)$ si puó dimostrare che una successione di Cauchy converge uniformemente ad una funzione limitata su $E \setminus E_0$ con $m(E_0) = 0$ e ció basta per concludere che anche L^∞ è completo. □

Gli spazi $L^p(E)$ quindi sono tutti spazi di Banach. Tra questi particolare attenzione merita lo spazio $L^2(E)$ la cui norma puó essere definita a partire dal prodotto scalare

$$< f, g >= \int_E f \bar{g} \, dx ;$$

esso è pertanto uno spazio di Hilbert.

Occupiamoci ora di alcuni risultati di approssimazione, mediante funzioni regolari, di funzioni appartenenti a $L^p(E)$.

Definizione 4.5.2. - *Sia g una funzione continua. Il "supporto" di g è la chiusura dell'insieme*

$$\{x \, : \, g(x) \neq 0\} .$$

Sia $C_0(\mathbb{R})$ l'insieme delle funzioni continue a supporto compatto. Punto di partenza è il seguente fondamentale risultato che riportiamo senza dimostrazione.

Teorema 4.5.3. (Teorema di Lusin) - *Sia f una funzione misurabile e limitata su E, insieme di misura finita. Fissato $\varepsilon > 0$ esiste una funzione g di classe $C_0(\mathbb{R})$ tale che*

$$m(\{x \, : \, f(x) \neq g(x)\}) < \varepsilon$$

e

$$\|g\|_\infty \leq \|f\|_\infty .$$

Cominciamo dimostrando il seguente risultato.

Teorema 4.5.4. - *L'insieme delle funzioni semplici è denso in L^p.*

Dimostrazione. Sia $f \geq 0$ e sia $\{s_k\}$ la successione (4.9) puntualmente convergente a f. Essendo

$$|f(x) - s_k(x)|^p \leq |f(x)|^p \,,$$

utilizzando il teo. 4.4.2 si ottiene l'asserto.
Per una generica f si applica quanto prima dimostrato alla sua parte positiva e a quella negativa. □

Siamo ora in grado di dimostrare il seguente risultato di approssimazione.

Teorema 4.5.5. - *Se $p < \infty$ allora $C_0(\mathbb{R})$ è denso in L^p.*

Dimostrazione. Se n è un intero definiamo la seguente funzione, detta troncata di f,

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} n & \text{se } |f(x)| > n \\ \\ f(x) & \text{se } |f(x)| \leq n \,. \end{cases}$$

Se

$$F_n = \{x \,:\, |f(x)| \geq n\}$$

allora

$$\lim_{n\to\infty} m(F_n) = 0 \,.$$

Quindi per la proprietà (AC) di assoluta continuità, fissato $\varepsilon > 0$, è possibile determinare un valore n in corrispondenza del quale

$$\int_{F_n} |f|^p \, dx < \varepsilon^p$$

da cui

$$\|f - f^{(n)}\|_p < \varepsilon \,. \tag{4.38}$$

Alla luce di quanto riportato nella dimostrazione del teo. 4.5.4 è possibile determinare una funzione semplice $s \leq f$ tale che

$$\|f^{(n)} - s\|_p < \varepsilon \,. \tag{4.39}$$

Fissiamo $\sigma > 0$. Per il teorema di Lusin esiste una funzione $g \in C_0(\mathbb{R})$ tale che $g(x) = s(x)$ tranne che per valori x appartenenti ad un insieme di misura minore di σ; inoltre

$$|g(x)| \leq \|s\|_\infty \leq n \,.$$

Si ha quindi

$$\int |g - s|^p \, dx = \int_{\{x \;|\; g(x) \neq s(x)\}} |g - s|^p \, dx \leq (2\|s\|_\infty)^p \sigma \leq (2n)^p \sigma$$

da cui, se $\sigma < \varepsilon^p (2n)^{-p}$,

$$\|g - s\|_p \leq \varepsilon \,. \tag{4.40}$$

In definitiva dalle (4.38), (4.39), (4.40) abbiamo

$$\|f-g\|_p \leq \|f-f^{(n)}\|_p + \|f^{(n)}-s\|_p + \|s-g\|_p \leq 3\varepsilon$$

da cui l'asserto. □

Nell'ottica di quanto illustrato nel par. 4.4, si puó dimostrare che le funzioni (4.28) convergono ad f in L^p al tendere a zero di ε.

Proposizione 4.5.3. - *Se* $1 \leq p < +\infty$ *l'insieme* $C^\infty(\mathbb{R}) \cap L^p(\mathbb{R})$ *è denso in* $L^p(\mathbb{R})$.

Dimostrazione. Se η denota la funzione (4.27) dalla (4.30) si ha

$$\begin{aligned}
|f_\varepsilon(x)| &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} \eta(z)^{1-\frac{1}{p}} \eta(z)^{\frac{1}{p}} |f(x-\varepsilon z)| dz \\
&\quad \text{(per la (4.33))} \\
&\leq \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \eta(z) dz\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \eta(z) |f(x-\varepsilon z)|^p dz\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\quad \text{(per la (4.25))} \\
&= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \eta(z) |f(x-\varepsilon z)|^p dz\right)^{\frac{1}{p}} .
\end{aligned}$$

Applicando il teo. 4.3.4 abbiamo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f_\varepsilon|^p\, dx \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \eta(z) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x-\varepsilon z)|^p dx\right) dz = \int_{-\infty}^{+\infty} |f|^p\, dx\,. \tag{4.41}$$

Fissato $\sigma > 0$, per il teo. 4.5.5 è possibile determinare una funzione $g \in C_0(\mathbb{R})$ tale che

$$\|f-g\|_p < \sigma\,;$$

per la (4.41) si ha allora

$$\|f_\varepsilon - g_\varepsilon\|_p \leq \sigma\,. \tag{4.42}$$

La famiglia g_ε tende a g uniformemente per il teo. 4.4.3; essa quindi converge a g in L^p e si ha

$$\|f_\varepsilon - f\|_p \leq \|f_\varepsilon - g_\varepsilon\|_p + \|g-f\|_p + \|g_\varepsilon - g\|_p < 3\,\sigma$$

da cui l'asserto.

Osservazione 4.5.1. - *L'insieme* $C^\infty(\mathbb{R}) \cap L^p(\mathbb{R})$ *è quindi denso in* $L^p(\mathbb{R})$. *Utilizzando il teo.* 4.5.3 *possiamo anche dimostrare che* $C_0^\infty(\mathbb{R})$, *cioè l'insieme delle funzioni di classe* $C^\infty(\mathbb{R})$ *a supporto compatto, è denso in* $L^p(\mathbb{R})$.

Poiché le funzioni di classe C^∞ possono a loro volta essere approssimate, in base al teorema di Weierstrass (cfr. appendice D), in modo uniforme con polinomi a coefficienti razionali che quindi sono densi in L^p. Ció comporta che tutti gli spazi L^p, con $p < \infty$, sono separabili. Tale non è L^∞.

Capitolo 5

Serie di Fourier

5.1 Motivazioni

5.1.1 L'equazione del calore

L'argomento che tratteremo costituisce il primo capitolo di un piú ampio progetto noto come "analisi di Fourier"; con tale termine si abbracciano varie tecniche attraverso le quali una funzione puó essere rappresentata come somma o, piú in generale, come integrale di funzioni di semplice struttura.
Per precisare un po' meglio cosa intendiamo dire consideriamo un problema relativo all'equazione del calore, problema dal cui studio hanno preso le mosse molte delle questioni di cui ci occuperemo.
L'equazione del calore è un'equazione a derivate parziali che descrive la diffusione di energia termica in un mezzo omogeneo. Nella sua versione piú semplice essa assume la seguente forma

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{5.1}$$

con x, variabile spaziale, appartenente ad un intervallo, e con la variabile temporale $t \in [0, +\infty[$, infine $u(x,t)$ rappresenta la temperatura misurata in x al tempo t.
Una soluzione u della (5.1) rappresenta l'evoluzione nel tempo della temperatura di una sbarra che identifichiamo per esempio con l'intervallo $[0,\pi]$; essa è isolata di modo tale che il calore possa fluire solo attraverso gli estremi. Se assumiamo che la temperatura a tali estremi venga mantenuta nulla si ha

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0\,, \quad \forall t \in [0,\infty[\,. \tag{5.2}$$

Bisogna infine assegnare la seguente ulteriore condizione

$$u(x,0) = f(x)\,, \quad \forall x \in [0,\pi] \tag{5.3}$$

che rappresenta la distribuzione della temperatura all'istante iniziale $t = 0$.
Per risolvere il problema (5.1), (5.2), (5.3) utilizzeremo il "metodo della separazione delle variabili". Come primo passo cerchiamo soluzioni di (5.1) che assumono la seguente forma

$$u(x,t) = X(x)\,T(t)\,. \tag{5.4}$$

Sostituendo in (5.1) si ha

$$X(x)\,T'(t) = X''(x)\,T(t)$$

da cui

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}\,. \tag{5.5}$$

Poiché il primo membro dipende solo da t mentre il secondo solo da x i due membri di (5.5) devono essere costanti. Esiste cioè un valore A tale che

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -A$$

da cui

$$X''(x) + A\,X(x) = 0 \tag{5.6}$$

e

$$T'(t) + A\,T(t) = 0\,. \tag{5.7}$$

Le condizioni al bordo (5.2) sono soddisfatte se

$$X(0) = X(\pi) = 0\,. \tag{5.8}$$

Deve quindi necessariamente essere $A > 0$. Posto $\lambda = \sqrt{A}$ le soluzioni di (5.6) sono

$$X(x) = c' \cos(\lambda x) + c'' \sin(\lambda x)$$

con $c', c'' \in \mathbb{R}$.
Sempre per le (5.8) abbiamo $c' = 0$ e $\sin(\lambda\pi) = 0$. Si ha allora $\lambda = n$, con $n \in \mathbb{N}$, e in definitiva

$$X(x) = c\,\sin(n\,x)\,. \tag{5.9}$$

Le soluzioni di (5.7) sono

$$T(t) = c \exp(-n^2\,t)$$

con $c \in \mathbb{R}$.

Le soluzioni del problema (5.1), (5.2) della forma (5.4) hanno la seguente espressione

$$u_n(x,t) = b_n e^{-n^2 t} \sin(nx) \tag{5.10}$$

con $n \in \mathbb{N}$ e $b_n \in \mathbb{R}$.
Ovviamente una combinazione lineare di soluzioni del tipo (5.10) è ancora soluzione di (5.1) così come è soluzione di (5.1) una funzione del tipo

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-n^2 t} \sin(nx) \tag{5.11}$$

purché ci si accerti che tale serie converga e che sia lecito derivare termine a termine due volte rispetto alla variabile x, una volta rispetto alla variabile t.
Per quanto riguarda la determinazione dei parametri b_n essa è da collegarsi alla condizione iniziale (5.3) sempre che il dato iniziale f possa a sua volta esprimersi nella forma

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)\,. \tag{5.12}$$

5.1.2 L'equazione delle corde vibranti

La procedura utilizzata per l'equazione del calore puó essere adattata all'equazione delle corde vibranti

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,. \tag{5.13}$$

In questo caso la funzione u rappresenta lo spostamento in verticale dalla posizione di riposo di una corda elastica fissata agli estremi di un intervallo che, come nel caso precedente, consideriamo sia $[0,\pi]$; sono allora soddisfatte le condizioni al bordo (5.2). Poiché ora stiamo trattando una equazione del secondo ordine nella variabile t, alla condizione iniziale (5.3) bisogna aggiungere un'altra relativa alla derivata di u rispetto alla variabile temporale

$$u_t(x,0) = g(x)\,, \quad \forall x \in [0,\pi]\,. \tag{5.14}$$

Come per l'equazione del calore cerchiamo soluzioni del tipo (5.4); si ha

$$X(x)T''(t) = X''(x)T(t)$$

da cui

$$X'' + A\,X = 0\,, \quad T'' + A\,T = 0\,.$$

Sfruttando le condizioni al bordo (5.2) su X si ha ancora una volta $A = n^2$ e, quindi, la (5.9).

Deve inoltre essere

$$T(t) = a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)\,.$$

La soluzione del problema va quindi ricercata tra quelle che assumono la forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin(nx)\left[a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)\right]\,. \tag{5.15}$$

La determinazione dei parametri che compaiono in (5.15) è demandata alle due condizioni iniziali (5.3) e (5.14). Da queste si ricava infatti che

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(nx) \tag{5.16}$$

e, ignorando per il momento le difficoltà che la derivazione termine a termine comporta,

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n\, b_n \sin(nx)\,. \tag{5.17}$$

5.1.3 L'equazione della membrana elastica

Se nel piano si introduce un sistema di coordinate polari (ρ, θ) l'equazione di Laplace (1.58) si scrive nel modo seguente

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0\,. \tag{5.18}$$

Cerchiamo soluzioni della forma

$$u(\rho, \theta) = R(\rho)T(\theta)\,. \tag{5.19}$$

Inserendo la (5.19) in (5.18) si vede che deve necessariamente essere

$$\frac{\rho^2 R'' + \rho R'}{R} = -\frac{T''}{T} = A\,,$$

con A costante opportuna. Dobbiamo quindi risolvere le equazioni differenziali ordinarie

$$\rho^2 R'' + \rho R' - AR = 0 \tag{5.20}$$

e

$$T'' + AT = 0\,. \tag{5.21}$$

Poiché le funzioni T sono periodiche di periodo 2π si ha $A = n^2$ con n intero non negativo; deve pertanto risultare

$$T(\theta) = a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta) .$$

In corrispondenza di $A = n^2$ l'integrale generale di (5.20) è

$$c_1 \rho^n + c_2 \rho^{-n} .$$

Essendo interessati a soluzioni regolari deve necessariamente essere $c_2 = 0$.
In definitiva le soluzioni del tipo (5.19) hanno la seguente espressione

$$\rho^n (a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta)) .$$

Come nei casi illustrati precedentemente siamo interessati a soluzioni della forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} \rho^n (a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta)) \tag{5.22}$$

sempre che sia possibile derivare due volte sotto il segno di serie rispetto alle variabili ρ, θ.
Se si vuole ottenere una soluzione nel "disco unitario" D con centro nell'origine e raggio uno bisogna assegnare una condizione sul bordo ∂D di D

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in D} \\ \\ u = \varphi & \text{su } \partial\text{D} . \end{cases} \tag{5.23}$$

Il sistema di condizioni (5.23) è noto come "problema di Dirichlet". È possibile in tal modo determinare i valori delle costanti a_n, b_n.
Siamo quindi arrivati a inquadrare l'obiettivo: caratterizzare le funzioni per le quali sussiste uno sviluppo quale quello indicato in (5.12), (5.16), (5.17) e assicurarsi che per le funzioni che si rappresentino mediante uno sviluppo tipo (5.11), (5.15), (5.22) sia possibile procedere con le necessarie derivazioni termine a termine.

5.2 Serie trigonometriche

Fissato un intero n non negativo consideriamo il seguente "polinomio trigonometrico"

$$P_n(x) = a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) , \qquad x \in [-\pi, \pi] .$$

Il grafico di P_n è una sinusoide di periodo $(2\pi)/n$; la frequenza è quindi $n(2\pi)^{-1}$.
Posto

$$H_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} , \tag{5.24}$$

sia

$$\alpha_n = \frac{a_n}{H_n}\,, \qquad \beta_n = \frac{b_n}{H_n}\,. \tag{5.25}$$

Esiste un unico valore $\varphi_n \in]-\pi, \pi]$ tale che

$$\alpha_n = \cos\varphi_n\,, \qquad \beta_n = \sin\varphi_n\,. \tag{5.26}$$

Si ha pertanto

$$P_n(x) = H_n \cos(nx - \varphi_n)\,.$$

In definitiva il grafico di P_n é una sinusoide con frequenza $n(2\pi)^{-1}$, ampiezza H_n e fase φ_n dove per fase si intende il punto iniziale del ciclo. Assegnare quindi le due a_n, b_n significa di fatto individuare due grandezze quali l'ampiezza e la fase dell'onda.
Ció premesso, data una funzione f periodica di periodo 2π, ci chiediamo se una tale funzione si possa esprimere come somma, eventualmente infinita, di polinomi trigonometrici, cioé se

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right]\,. \tag{5.27}$$

La (5.27) dice che un'onda periodica di periodo 2π, il cui profilo è rappresentato dal grafico di f, si ottiene dalla sovrapposizione di infinite onde sinusoidali con frequenza $n(2\pi)^{-1}$, ampiezza e fase iniziali legati ai valori a_n, b_n mediante le formule (5.24), (5.25) e (5.26).
L'espressione a secondo membro in (5.27) prende il nome di "serie trigonometrica".

In alcune situazioni puó rivelarsi piú comodo rappresentare in modo diverso una serie trigonometrica. Mediante le formule di Eulero (1.9) essa si puó scrivere infatti nel seguente modo

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx} \tag{5.28}$$

dove

$$c_0 = \frac{a_0}{2}\,, \quad c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}\,, \quad c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}\,. \tag{5.29}$$

La (5.27) diventa allora

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}\,. \tag{5.30}$$

Per capire quale legame ci sia tra f e i coefficienti a_n, b_n supponiamo che la convergenza della serie (5.27) sia uniforme.

Moltiplichiamo entrambi i membri della (5.27) per $\cos(mx)$; integrando termine a termine si ha

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(mx)\,dx &= \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(mx)\,dx \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)\cos(mx)\,dx\right) \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty}\left(b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin(nx)\cos(mx)\,dx\right).\end{aligned}$$

In modo analogo, moltiplicando entrambi i membri di (5.27) per $\sin(mx)$, si ottiene

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(mx)\,dx &= \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(mx)\,dx \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)\sin(mx)\,dx\right) \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty}\left(b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin(nx)\sin(mx)\,dx\right).\end{aligned}$$

Poiché

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)\,dx &= \int_{-\pi}^{\pi}\sin(nx)\,dx = 0\,, \quad n \in N \\ \int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)\cos(mx)\,dx &= \begin{cases} 0 & \text{se } n \neq m \\ \pi & \text{se } n = m \neq 0 \end{cases} \\ \int_{-\pi}^{\pi}\sin(nx)\sin(mx)\,dx &= \begin{cases} 0 & \text{se } n \neq m \\ \pi & \text{se } n = m \neq 0 \end{cases} \\ \int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)\sin(mx)\,dx &= 0\,,\end{aligned}$$

si ha

$$\begin{aligned}a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx\,, \quad n \geq 0 \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx\,, \quad n \geq 1\,.\end{aligned} \tag{5.31}$$

Definizione 5.2.1. - *La serie trigonometrica a secondo membro in* (5.27), *con i coefficienti* a_n, b_n *dati dalle formule* (5.31), *prende il nome di "serie di Fourier" di* f, *in simboli*

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)] \; .$$

I termini a_n, b_n *si chiamano "coefficienti di Fourier" di* f.
Se vale la (5.27) *si dice che* f *é "sviluppabile in serie di Fourier".*

Nel caso in cui la serie trigonometrica assuma la forma esponenziale (5.30) i coefficienti di Fourier di f hanno la seguente espressione

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} \, dx \, , \quad n \in Z \, . \tag{5.32}$$

Le questioni che ora si pongono sono le seguenti: è proprio necessario richiedere che la convergenza sia quella uniforme? una volta che si sia accertato che la serie di Fourier di f in qualche senso converge, chi ci assicura che sussiste l'uguaglianza (5.27)?
Per dare una risposta a tali quesiti proviamo a impostare il problema in una forma astratta.
Denotiamo con H uno spazio di Hilbert.

Definizione 5.2.2. - *Una successione* $\{v_k\}$ *di* H *dicesi "sistema ortonormale" se*

$$< v_h, v_k >= \delta_{hk} \tag{5.33}$$

dove δ_{hk} *denota il simbolo di Kroneker* (3.30).
Si dice che il sistema ortonormale è "completo" se, per ogni $v \in$ H, *esiste una successione* $\{c_n\}$ *tale che, posto*

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} c_k v_k \, , \tag{5.34}$$

si ha

$$v = \lim_{n \to \infty} s_n \tag{5.35}$$

ovvero, piú sinteticamente,

$$v = \sum_{k=1}^{\infty} c_k v_k \, . \tag{5.36}$$

Per quanto detto in precedenza i "sistemi trigonometrici"

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,, \quad \frac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}}\,, \quad \frac{\sin(mx)}{\sqrt{\pi}}\,, \quad n,m \in \mathbb{N} \tag{5.37}$$

e

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{inx}\,, \quad n \in Z \tag{5.38}$$

sono ortonormali. Dimostreremo piú avanti che tali sistemi sono completi; tale risultato ci consentirà di dare una risposta positiva ad alcune questioni poste in relazione al significato da attribuire alle identità (5.27), (5.30).

Proposizione 5.2.1. - *Sia* $\{v_k\}$ *un sistema ortonormale di* H. *Se sussiste la* (5.36) *si ha*

$$c_k =< v, v_k > \tag{5.39}$$

cioè c_k *è la "proiezione" di* v *su* v_k*.*

Dimostrazione. Osserviamo innanzitutto che

$$\lim_{n\to\infty} < s_n, v_k >=< v, v_k > \tag{5.40}$$

dove s_n è la somma parziale (5.34). Si ha infatti

$$\begin{aligned} |< s_n, v_k > - < v, v_k >| &= |< s_n - v, v_k >| \\ &\qquad \text{(per la (3.8))} \\ &\le \|s_n - v\|\|v_k\| = \|s_n - v\| \end{aligned}$$

da cui la (5.40) in quanto, per la (5.35), si ha

$$\lim_{n\to\infty} \|s_n - v\| = 0\,. \tag{5.41}$$

Abbiamo pertanto

$$\begin{aligned} < v, v_k > &= \lim_{n\to\infty} < s_n, v_k >= \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{h=1}^{n} c_h < v_h, v_k >\right) \\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{h=1}^{n} c_h \delta_{hk}\right) = c_k \end{aligned}$$

cioè la (5.39). □

Osservazione 5.2.1. - *Le* (5.39) *riproducono le formule* (5.31) *ovvero le* (5.32) *nel caso in cui il sistema sia uno dei due sistemi trigonometrici* (5.37). *C'è da osservare che esse, ottenute in ipotesi di convergenza uniforme, in tale contesto richiedono la piú debole ipotesi di convergenza in* L^2 (*cfr. prop.* 4.5.1).

In analogia con il caso dei sistemi trigonometrici i termini c_k prendono il nome di coefficienti di Fourier di v rispetto al sistema ortonormale $\{v_k\}$ e

$$\sum_{h=1}^{\infty} < v, v_h > v_h \tag{5.42}$$

viene chiamata ancora serie di Fourier di v.

Proposizione 5.2.2. - *Sussiste la seguente relazione*

$$\sum_{h=1}^{\infty} | < v, v_h > |^2 \leq \|v\|^2 \tag{5.43}$$

nota come "disuguaglianza di Bessel".

Dimostrazione. Se s_n denota la somma parziale (5.34) e c_k le quantità (5.39) si ha

$$\begin{aligned}\|s_n\|^2 &= < s_n, s_n > = < \sum_{h=1}^{n} c_h v_h, \sum_{k=1}^{n} c_k v_k > = \sum_{h,k=1}^{n} c_h \bar{c_k} < v_h, v_k > \\ &= \sum_{h,k=1}^{n} c_h \bar{c_k} \delta_{hk} = \sum_{h=1}^{n} |c_h|^2 .\end{aligned}$$

Risulta

$$< v, s_n > = \sum_{h=1}^{n} \bar{c_h} < v, v_h > = \sum_{h=1}^{n} c_h \, \bar{c_h} = \sum_{h=1}^{n} |c_h|^2 .$$

Si ha quindi

$$\|v - s_n\|^2 = \|v\|^2 - 2 < v, s_n > + \|s_n\|^2 = \|v\|^2 - \sum_{h=1}^{n} |c_h|^2 \tag{5.44}$$

da cui la (5.43). □

Teorema 5.2.1. - *Il sistema* $\{v_k\}$ *è completo se e solo se, per ogni* $v \in$ H, *sussiste la seguente uguaglianza*

$$\sum_{k=1}^{\infty} | < v, v_k > |^2 = \|v\|^2 \tag{5.45}$$

nota come "identità di Parceval".

Dimostrazione. Dalla (5.44) si deduce anche che sussiste la (5.36) se e solo se nella diseguaglianza di Bessel (5.43) vale il segno di uguaglianza. □

Proposizione 5.2.3. - *Sia* $\{d_k\}$ *una successione di* ℓ^2. *Esiste un vettore* $u \in H$ *i cui coefficienti di Fourier sono i termini della successione data. Si ha inoltre*

$$u = \sum_{k=1}^{+\infty} d_k \, v_k \, .$$

Dimostrazione. Posto

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} d_k v_k$$

si ha, se $n < m$,

$$\|s_n - s_m\|^2 = \sum_{k=n+1}^{m} |d_k|^2 \, . \tag{5.46}$$

La successione $\{s_n\}$ è quindi di Cauchy. Essendo H completo tale successione ha limite: sia

$$u = \lim_{n \to +\infty} s_n = \sum_{k=1}^{\infty} d_k v_k \, .$$

Per la prop. 5.2.1 si ha che le quantità d_k sono i coefficienti di Fourier di u. Per essi vale allora la (5.45). □

Osservazione 5.2.2. - *Se* H *è uno spazio di Hilbert dotato di sistema ortonormale completo l'applicazione di* H *in* ℓ^2 *che ad ogni vettore* v *associa la successione dei suoi coefficienti di Fourier è quindi un'applicazione biunivoca che, per la* (5.45), *conserva la norma; un tale tipo di applicazione prende anche il nome di "isometria". Ogni spazio di Hilbert dotato di un sistema ortonormale completo puó essere di fatto identificato con* ℓ^2.

Il seguente teorema fornisce un utile criterio per riconoscere se un sistema ortonormale è completo.

Teorema 5.2.2. - *Un sistema ortonormale* $\{v_k\}$ *è completo se e solo se l'unico vettore a coefficienti di Fourier nulli è il vettore nullo.*

Dimostrazione. Sia $\{v_k\}$ completo. Se i coefficienti di Fourier di un vettore v sono nulli è nulla la sua norma per l'identità di Parceval. Quindi $v = 0$.
Sia v un vettore di H e sia $\{c_n\}$ la successione dei suoi coefficienti di Fourier. Per la prop. 5.2.3 il vettore

$$u = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \, v_n$$

condivide con v i coefficienti di Fourier; allora $u - v$ ha coefficienti di Fourier nulli. Deve pertanto essere $u = v$; quindi v è somma della sua serie di Fourier. □

Osservazione 5.2.3. - *Si puó dimostrare che la completezza di un sistema equivale a far vedere che per ogni v e per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una combinazione lineare di vettori del sistema*

$$w = \sum_{k=1}^{n} d_k v_k$$

tale che $\|v - w\| < \varepsilon$.

Per concludere ricordiamo che il procedimento di Gram-Schmidt consente di costruire un sistema ortonormale completo a partire da una successione costituita da elementi le cui combinazioni lineari generano tutto lo spazio. Tale è, per esempio, la successione dei polinomi $\{x^n\}$ per il teorema di Weierstrass (cfr. appendice D). Si ottengono in tal caso i cosiddetti polinomi di Legendre

$$\sqrt{\frac{2n+1}{2}}\,\frac{1}{2^n n!}\,\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n\,;$$

essi costituiscono un sistema ortonormale completo di $L^2([-1,1])$.
Altro importante esempio di sistema ortonormale completo è costituito dal sistema di funzioni di Haar

$$H_{00}(x) = 1\,, \quad H_{n,k}(x) = \begin{cases} -2^{n/2} & \text{se } \frac{k-1}{2^n} \leq x < \frac{k-\frac{1}{2}}{2^n} \\ 2^n & \text{se } \frac{k-\frac{1}{2}}{2^n} \leq x < \frac{k}{2^n} \\ 0 & \text{altrove}\,. \end{cases}$$

Tali funzioni, contrariamente a quelle che intervengono nei casi precedenti, sono discontinue. Tale caratteristica si rivela utile per lo studio di alcuni problemi, per esempio quelli relativi alla ricostruzione di immagini, per la cui natura le funzioni da approssimare presentano discontinuità. Esse inoltre hanno un ruolo importante nella teoria delle wavelets.

5.3 Completezza del sistema trigonometrico

Proviamo ora che il sistema trigonometrico (5.37) è completo. Per verificare ció basta muoversi secondo quanto indicato nel teo. 5.2.2.
Sia u una funzione di $L^2([-\pi,\pi])$ con tutti i coefficienti di Fourier nulli.
Supponiamo che u, prolungata a $\mathbb{R}$ per periodicità, sia continua. In tal caso essa ha massimo. Se $u \not\equiv 0$ possiamo sempre supporre tale valore massimo sia positivo e che sia assunto in 0. Esiste allora un $\delta > 0$ tale che

$$u(x) > \frac{u(0)}{2}\,, \quad \forall x \in]-\delta,\delta[\,. \tag{5.47}$$

Consideriamo la funzione

$$v(x) = 1 - \cos\delta + \cos x\,.$$

Si ha ovviamente

$$1 < v(x) \leq 2 - \cos\delta \quad \forall x \in]-\delta, \delta[\tag{5.48}$$

e

$$|v(x)| \leq 1\,, \quad \forall x \in [-\pi, \pi] \backslash]\delta, \delta[\,. \tag{5.49}$$

Essendo

$$v(x) = 1 - \cos\delta + \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

ogni potenza $n-$ma di v è combinazione lineare di elementi del sistema (5.38) ovvero del sistema (5.37); quindi v^n è ortogonale ad u essendo questa per ipotesi ortogonale alle funzioni appartenenti ai due sistemi sopra richiamati. Si ha allora

$$0 = \int_{-\pi}^{-\delta} u\, v^n\, dx + \int_{-\delta}^{\delta} u\, v^n\, dx + \int_{\delta}^{\pi} u\, v^n\, dx = I_1 + I_2 + I_3\,. \tag{5.50}$$

Per la (5.49) si ha

$$|I_1| + |I_3| \leq 2\pi \max |u|\,. \tag{5.51}$$

Per la (5.48) è possibile determinare un valore reale $h \in]1, 2 - \cos\delta[$ e un intervallo $[-a, a] \subset]-\delta, \delta[$ tale che risulti

$$v(x) \geq h\,, \quad \forall x \in [-a, a]\,;$$

si ha allora, ricordando (5.47),

$$I_2 \geq \int_{-a}^{a} u\, v^n\, dx \geq u(0)\, h^n a$$

Quindi, essendo $h > 1$ la quantità I_2 puó rendersi grande a piacere al divergere di n; ció, insieme alla (5.51), è in contrasto con la (5.50). Deve pertanto essere $u \equiv 0$.
Liberiamoci ora dell'ipotesi iniziale di continuità.

Definizione 5.3.1. - *Una funzione f, definita in $\mathbb{R}$, dicesi assolutamente continua se ad ogni $\varepsilon > 0$ corrisponde un $\delta > 0$ tale che, comunque si fissino intervalli in numero finito a due a due disgiunti $]a_i, b_i[\,(i = 1, \cdots, k)$ con*

$$\sum_{i=1}^{k} (b_i - a_i) < \delta\,,$$

si abbia

$$\sum_{i=1}^{k} |f(b_i) - f(a_i)| < \varepsilon\,.$$

Richiamiamo ora il seguente risultato che estende al caso delle funzioni integrabili secondo Lebesgue il teorema fondamentale del calcolo integrale.

Teorema 5.3.1. - *Sia $f \in L^1([a,b])$. Se $x_0 \in [a,b]$ la funzione integrale*

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$$

è assolutamente continua e si ha $F'(x) = f(x)$ q.o. in $[a,b]$. Vale inoltre la seguente formula di integrazione per parti

$$\int_a^b F(x)\,g'(x)\,dx = F(b)g(b) - F(a)g(a) - \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx \tag{5.52}$$

per ogni $g \in C^1([a,b])$.

Poniamo

$$U(x) = \int_{-\pi}^{x} u(t)\,dt\,.$$

Essendo u ortogonale al sistema trigonometrico (5.37) si ha

$$U(\pi) = \int_{-\pi}^{\pi} u(t)\,dt = 0\,. \tag{5.53}$$

Utilizzando la regola di integrazione per parti (5.52) e la (5.53) abbiamo

$$\int_{-\pi}^{\pi} U(x)\sin(kx)\,dx = \frac{1}{k}\int_{-\pi}^{\pi} u(x)\cos(kx)\,dx = 0\,.$$

In modo analogo si dimostra che

$$\int_{-\pi}^{\pi} U(x)\cos(kx)\,dx = 0\,.$$

Abbiamo quindi mostrato che U è ortogonale a tutti gli elementi del sistema trigonometrico (5.37) ad eccezione del primo. Se allora poniamo

$$C_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} U(x)\,dx\,,$$

la funzione $(U - C_0)$ è ortogonale a tutte gli elementi del sistema trigonometrico (5.37). Essa inoltre, per la (5.53), se prolungata per periodicità a $\mathbb{R}$ è continua. Per quanto dimostrato al passo precedente deve essere $U - C_0 = 0$. Il teo. 5.3.1 assicura che

$$0 = (U - C_0)' = u\,, \quad \text{q.o. in }]-\pi,\pi[$$

da cui l'asserto.
Resta da analizzare il caso in cui u sia una funzione a valori complessi; il risultato si ottiene ragionando separatamente sulla parte reale e sulla parte complessa.

Osservazione 5.3.1. - *Se si ripercorre la dimostrazione sopra riportata si puó osservare che l'ipotesi che u appartenga a* L^2 *non è essenziale. Basta infatti che* $u \in L^1([-\pi,\pi])$. *Pertanto una funzione siffatta, i cui coefficienti di Fourier sono uguali a zero, è nulla quasi ovunque.*

Siamo in grado quindi di enunciare il seguente risultato.

Teorema 5.3.2. - *Se*

$$S_N^f(x) = \sum_{n=-N}^{N} c_n\, e^{inx} \tag{5.54}$$

è la somma parziale della serie di Fourier di $f \in L^2([-\pi,\pi])$ *allora la* (5.30) *va intesa nel senso che*

$$\lim_{N\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \left| f(x) - S_N^f(x) \right|^2 dx = 0\,. \tag{5.55}$$

Proposizione 5.3.1. - *Nel caso dei sistemi trigonometrici l'identità di Parceval* (5.45) *assume la seguente forma*

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\, dx = \frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(|a_n|^2 + |b_n|^2\right) \tag{5.56}$$

ovvero

$$\frac{1}{2\,\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\, dx = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} |c_n|^2\,. \tag{5.57}$$

Dalla prop. 5.3.1 discende il seguente risultato.

Teorema 5.3.3. (Teorema di Riemann-Lebesgue) - *Le successioni* $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ *e* $\{c_n\}$ *dei coefficienti di Fourier di* $f \in L^2([-\pi,\pi])$ *sono infinitesime.*

Osservazione 5.3.2. - *Poiché le somme parziali della serie di Fourier di una funzione di classe* L^2 *sono funzioni continue, dal teo.* 5.3.2 *si ottiene la proprietà di densità di* C^0 *in* L^2.

5.4 Convergenza puntuale

Il risultato di convergenza in L^2 della serie di Fourier contenuto nel teo. 5.3.2, per quanto possa ritenersi elegante data la sua generalità, si presenta per certi versi inadeguato. È possibile pervenire ad un risultato che riguardi la convergenza puntuale o, meglio, uniforme? Vedremo che ció è possibile se si fanno opportune ipotesi di regolarità su f.
A tal fine premettiamo alcune definizioni.

Definizione 5.4.1. - *Sia* f *una funzione periodica di periodo* $2\,\pi$.

- *Si dice che f è "continua a tratti" se*

  (i) *f è continua in* $]-\pi,\pi[\setminus\{x_1,\cdots,x_m\}$ *;*

  (ii) *in ogni x_k la funzione f ha limite destro e sinistro finiti e distinti:*

$$\lim_{x\to x_i^-} f(x) = f(x_i^-) \neq \lim_{x\to x_i^+} f(x) = f(x_i^+)\,;$$

  (iii) *f è convergente in $-\pi$ e π.*

- *Se f è continua in* $]-\pi,\pi[$ *e*

$$f(-\pi) = f(-\pi^+) = f(\pi^-) = f(\pi) \tag{5.58}$$

  si dice che essa è di classe $C_{2\pi}$.

- *Se f, continua a tratti, è derivabile tranne che in un numero finito di punti e se la sua derivata è a sua volta continua a tratti essa dicesi "regolare a tratti".*

Osservazione 5.4.1. - *Il grafico di una funzione continua a tratti presenta un numero finito di salti.*
È utile sottolineare il ruolo della condizione (5.58). *Infatti essa assicura che il prolungamento per periodicità di una funzione continua in* $]-\pi,\pi[$ *sia continua in* $\mathbb{R}$.
Se si restringe una funzione f regolare a tratti ad uno degli intervalli in cui f' è continua allora, prolungata f per continuità f agli estremi di tale intervallo, la funzione ottenuta è dotata di derivata in tali estremi. In sostanza una funzione f è regolare a tratti se il suo grafico presenta al piú un numero finito di salti e un numero finito di punti angolosi.

Siamo ora in grado di provare il seguente risultato relativo alla convergenza puntuale della serie di Fourier di una funzione.

Teorema 5.4.1. - *Se f è regolare a tratti la sua serie di Fourier converge a*

$$\frac{1}{2}\left[f(x^+) + f(x^-)\right] \tag{5.59}$$

per $x \in]-\pi,\pi[$, *converge a*

$$\frac{1}{2}\left[f(-\pi^+) + f(\pi^-)\right] \tag{5.60}$$

in $\pm\pi$.
Se f è di classe $C_{2\pi}$ la serie di Fourier di f converge a f ovunque.

Dimostrazione. Ricordando l'espressione (5.32) dei coefficienti di Fourier c_n di f la somma parziale (5.54) si scrive nel modo seguente

$$S_N^f(x) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-N}^{N}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{in(x-t)}dt = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-N}^{N}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{in(t-x)}dt$$

dove nell'ultimo passaggio si è semplicemente mutato n in $-n$.

Posto

$$D_N(\tau) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-N}^{N} e^{in\tau} = \frac{1}{2\,\pi} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{N}\cos(n\tau) \tag{5.61}$$

si ha

$$S_N^f(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)D_N(t-x)\,dt = (f * D_N)(x)\,. \tag{5.62}$$

Le funzioni (5.61) sono note come "nuclei di Dirichlet".

Con il cambio di variabili $t-x=\tau$, usando la periodicità delle funzioni presenti negli integrali, si ha

$$S_N^f(x) = \int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(x+\tau)D_N(\tau)d\tau = \int_{-\pi}^{\pi} f(x+\tau)D_N(\tau)d\tau\,. \tag{5.63}$$

Se $\tau \neq 0$ si ha

$$D_N(\tau) = \frac{1}{2\pi}e^{-iN\tau}\left(1+e^{i\tau}+\cdots+e^{i2N\tau}\right) = \frac{1}{2\pi}e^{-iN\tau}\frac{e^{i(2N+1)\tau}-1}{e^{i\tau}-1}$$

e quindi

$$D_N(\tau) = \frac{1}{2\pi}\frac{e^{i(N+1)\tau}-e^{-iN\tau}}{e^{i\tau}-1}\,. \tag{5.64}$$

Moltiplicando numeratore e denominatore per $e^{-i\tau/2}$ e ricordando le formule di Eulero (1.9) otteniamo la seguente espressione per i nuclei di Dirichlet

$$D_N(\tau) = \frac{1}{2\pi}\frac{e^{i(N+1/2)\tau}-e^{-i(N+1/2)\tau}}{e^{i\,\tau/2}-e^{-i\,\tau/2}} = \frac{1}{2\pi}\frac{\sin\,(N+1/2)\,\tau}{\sin(\tau/2)}\,. \tag{5.65}$$

Dalla (5.61) si ha

$$\int_0^{\pi} D_N(\tau)d\tau = \int_{-\pi}^{0} D_N(\tau)d\tau = \frac{1}{2}\,. \tag{5.66}$$

Abbiamo

$$
\begin{aligned}
& S_N^f(x) - \frac{1}{2}\left[f(x^-) + f(x^+)\right] \\
& \text{(per le (5.63) e (5.66))} \\
= & \int_{-\pi}^{0}\left[f(x+\tau) - f(x^-)\right] D_N(\tau)\,d\tau + \int_0^{\pi}\left[f(x+\tau) - f(x^+)\right] D_N(\tau)\,d\tau \\
& \text{(per la (5.64))} \\
= & \int_{-\pi}^{0} \frac{f(x+\tau) - f(x^-)}{e^{i\tau} - 1}(e^{i(N+1)\tau} - e^{-iN\tau})\,d\tau \\
+ & \int_0^{\pi} \frac{f(x+\tau) - f(x^+)}{e^{i\tau} - 1}(e^{i(N+1)\tau} - e^{-iN\tau})\,d\tau\,.
\end{aligned}
$$

Quindi, posto

$$
g(\tau) = \begin{cases} \dfrac{f(x+\tau) - f(x^-)}{e^{i\tau} - 1} & \text{se } -\pi < \tau < 0 \\[2ex] \dfrac{f(x+\tau) - f(x^+)}{e^{i\tau} - 1} & \text{se } 0 < \tau < \pi\,; \end{cases}
$$

si ha

$$
S_N^f(x) - \frac{1}{2}\left[f(x^-) + f(x^+)\right] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(\tau)\left[e^{i(N+1)\tau} - e^{-iN\tau}\right] d\tau\,. \tag{5.67}
$$

La funzione g ha la stessa regolarità di f per $\tau \neq 0$; d'altra parte per la regola di de l'Höpital si ha

$$
\lim_{\tau \to 0^+} g(\tau) = \lim_{\tau \to 0^+} \frac{f'(x+\tau)}{ie^{i\tau}} = \frac{f'(x^+)}{i}
$$

e, analogamente,

$$
\lim_{\tau \to 0^-} g(\tau) = \frac{f'(x^-)}{i}\,.
$$

Quindi g è continua a tratti; in particolare essa è di classe L^2. Dal teo. 5.3.3 i suoi coefficienti di Fourier

$$
C_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)e^{-int}dt
$$

tendono a zero al tendere di n a $+\infty$ e $-\infty$. Poiché l'espressione a secondo membro in (5.67) non è altro che $C_{-(N+1)} - C_N$ si ha

$$
\lim_{N \to +\infty} S_N^f(x) = \frac{1}{2}\left[f(x^-) + f(x^+)\right]
$$

cioè l'asserto. □

Una interessante conseguenza del teo. 5.4.1 è il seguente risultato noto come "teorema di localizzazione".

Teorema 5.4.2. - *Il comportamento della serie di Fourier di f in un punto x_0 è determinato dai valori assunti da f in un intorno di x_0 arbitrariamente scelto.*

Dimostrazione. Sia g una funzione che soddisfi le ipotesi del teo. 5.4.1 e che coincida con f in un intorno di x_0. La funzione $f - g$ è allora continua in x_0: le serie di Fourier di f e g si comportano in x_0 alla stessa maniera. □

Osservazione 5.4.2. - *La dimostrazione del teo.* 5.4.1 *puó essere utilizzata anche in ipotesi piú generali. Se per esempio f diverge in un punto ma rimane sommabile essa conserva la regolarità indicata nel teo.* 5.4.1 *in tutti i punti eccettuato quello in cui essa diverge. Basta applicare un risultato che estende il teo.* 5.3.3 *al caso di funzioni di classe $L^1(\mathbb{R})$(cfr.* [1]).

Consideriamo ora alcuni esempi.
Premettiamo il seguente risultato di semplice verifica.

Teorema 5.4.3. - *Se f é pari la serie di Fourier di f si riduce ad una serie di soli coseni, mentre se f é dispari essa diventa una serie di soli seni.*

Esempio 5.4.1. - *Consideriamo la cosiddetta "onda quadra"*

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x \in]-\pi, 0[\\ \\ 1 & \text{se } x \in [0, \pi[. \end{cases} \tag{5.68}$$

Poiché f é dispari la sua serie di Fourier é una serie di soli seni; si ha

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(nx)dx = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ é pari} \\ \\ \dfrac{4}{n\pi} & \text{se } n \text{ é dispari}. \end{cases}$$

La serie di Fourier di f ha allora la seguente espressione

$$\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}.$$

Tale serie, per il teo. 5.4.1, *ha per somma* 1 *in tutti i punti $x \in]0, \pi[$. In particolare, ponendo $x = \pi/2$ si ha*

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

Se inoltre si applica a f l'identità di Parceval (5.56) *si ha*

$$\frac{\pi^2}{8} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

Esempio 5.4.2. - *Sia*

$$f(x) = x\,, \quad x \in [-\pi, \pi]\,.$$

Essendo f dispari la serie di Fourier è la serie di soli seni

$$2\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin(nx)}{n}\,;$$

essa converge a f in tutti i punti di $]-\pi, \pi[$.

Esempio 5.4.3. - *Sia*

$$f(x) = |x|\,, \quad x \in [-\pi, \pi]\,.$$

Essendo f pari la serie di Fourier è la serie di soli coseni

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$$

che converge a f in tutti i punti di $[-\pi, \pi]$ essendo f di classe $C_{2\pi}$.

Esempio 5.4.4. - *Sia*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & se\ x \in]-\pi, 0[\\ \\ \sin x & se\ x \in [0, \pi[. \end{cases}$$

Si ha

$$f(x) = \frac{1}{\pi} - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos(2nx)}{4\,n^2-1} + \frac{\sin x}{2}\,.$$

Esempio 5.4.5. - *Consideriamo la funzione*

$$f(x) = x^2\,, \quad x \in [-\pi, \pi]\,.$$

Essendo tale funzione pari la sua serie di Fourier é una serie di soli coseni. Risulta

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{2\pi^2}{3}$$

e

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\cos(nx)\,dx = (-1)^n\frac{4}{n^2}\,, \quad n \neq 0\,.$$

Poiché tale funzione è continua e agli estremi soddisfa la condizione di raccordo (5.58) *si ha, sempre per il teo.* 5.4.1,

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos(nx)}{n^2}\,, \quad x \in [-\pi, \pi]\,.$$

In particolare, se $x = \pi$, si ha

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

e, utilizzando (5.56),

$$\frac{\pi^4}{90} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}\,.$$

Esempio 5.4.6. - *Se*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \textit{se } x \in]-\pi, 0[\\ \\ x & \textit{se } x \in [0, \pi]\,, \end{cases}$$

risulta

$$\frac{a_0}{2} = \frac{\pi}{4}\,, \quad a_n = \frac{(-1)^n - 1}{n^2\pi}\,, \quad b_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}\,.$$

Si ha allora

$$f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2} - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin(nx)}{n}\,, \quad x \in]-\pi, \pi[\,.$$

Esempio 5.4.7. - *Fissato $\varepsilon > 0$ sia*

$$f(x) = \begin{cases} 1/(2\,\varepsilon) & \textit{se } |x| < \varepsilon \\ \\ 0 & \textit{se } \varepsilon \le |x| < \pi. \end{cases}$$

La serie di Fourier è

$$\frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n\varepsilon)}{n\varepsilon}\cos(nx)\,.$$

Esempio 5.4.8. - *Fissato $\varepsilon > 0$ sia*

$$f(x) = \begin{cases} \varepsilon^{-2}(\varepsilon - |x|) & \textit{se } |x| < \varepsilon \\ \\ 0 & \textit{se } \varepsilon \le |x| < \pi. \end{cases}$$

La serie di Fourier è

$$\frac{1}{2\pi} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 - \cos(n\varepsilon)}{n^2\varepsilon^2}\cos(nx)\,.$$

5.5 Derivazione termine a termine

Se f, di classe $C_{2\pi}$, è regolare a tratti vale il teorema fondamentale del calcolo integrale

$$\int_{x_0}^{x} f'(t)\,dt = f(x) - f(x_0) \tag{5.69}$$

nonché la seguente regola di integrazione per parti

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx \tag{5.70}$$

dove g è una funzione di classe $C^1([a,b])$.
Siano a_n, b_n, c_n i coefficienti di Fourier di f e

$$\begin{aligned} a'_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\cos(nx)\,dx \\ b'_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\sin(nx)\,dx \\ c'_n &= \frac{1}{2\,\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\,e^{-i\,n\,x}\,dx \end{aligned}$$

quelli di f'. Sussiste il seguente risultato.

Lemma 5.5.1. - *Sia f regolare a tratti e di classe $C_{2\pi}$. Allora tra i coefficienti di Fourier di f e f' sussistono le seguenti relazioni*

$$a'_n = nb_n\,, \quad b'_n = -na_n\,, \quad c'_n = i\,nc_n\,. \tag{5.71}$$

Dimostrazione. Si ha

$$\begin{aligned} a'_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\cos(nx)\,dx \\ &\quad \text{(per la (5.70))} \\ &= \frac{1}{\pi}[f(\pi)\cos(n\pi) - f(-\pi)\cos(-n\pi)] + \frac{n}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx \\ &\quad \text{(per la (5.58))} \\ &= \frac{n}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx = nb_n \end{aligned}$$

da cui la prima delle due relazioni (5.71).
Le altre due relazioni si ottengono in modo analogo. □

Siamo ora in grado di dimostrare il seguente risultato di derivazione termine a termine.

Teorema 5.5.1. - *Se f soddisfa le ipotesi del lemma* 5.5.1 *e f' è regolare a tratti allora le serie di Fourier di f'*

$$\sum_{n=1}^{\infty}[nb_n\cos(nx) - na_n\sin(nx)] \tag{5.72}$$

e

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} i\,n\,c_n\,e^{inx} \tag{5.73}$$

hanno per somma $f'(x)$ in tutti i punti in cui f è derivabile e

$$\frac{1}{2}\left[f'(x^+) + f'(x^-)\right] \tag{5.74}$$

nei punti in corrispondenza dei quali il grafico di f presenta un punto angoloso.

Dimostrazione. In base al lemma 5.5.1 la serie di Fourier di f' si ottiene derivando formalmente termine a termine la serie di Fourier di f. Poiché per ipotesi f' è regolare a tratti è possibile applicare il teo. 5.4.1 a f'. Si ha quindi l'asserto. □

Piú in generale si ha il seguente risultato.

Teorema 5.5.2. - *Sia k un intero. Se le derivate di f fino a quelle di ordine $(k-1)$ sono regolari a tratti e di classe $C_{2\pi}$ e se $f^{(k)}$ è regolare a tratti allora la somma della serie che si ottiene derivando termine a termine k volte la serie di Fourier di f ha per somma $f^{(k)}(x)$ nei punti in cui $f^{(k)}$ è continua oppure la media tra il limite sinistro e destro nei punti in cui $f^{(k)}$ è discontinua.*

Osservazione 5.5.1. - *Se f, periodica di periodo 2π, è di classe $C^2(\mathbb{R})$ e se il suo coefficiente di Fourier a_0 è nullo dalla* (5.56) *e dal teo.* 5.5.1 *si ha*

$$\int_{-\pi}^{\pi}|f|^2\,dx = \pi\sum_{n=1}^{\infty}\left(|a_n|^2 + |b_n|^2\right)$$

e

$$\int_{-\pi}^{\pi}|f'|^2\,dx = \pi\sum_{n=1}^{\infty}n^2\left(|a_n|^2 + |b_n|^2\right)\,.$$

Si ottiene allora la disuguaglianza di Wirtinger

$$\int_{-\pi}^{\pi}|f|^2\,dx \le \int_{-\pi}^{\pi}|f'|^2\,dx\,. \tag{5.75}$$

In (5.75) *vale ovviamente l'uguaglianza solo se tutti i coefficienti di Fourier a_n, b_n con $n \geq 2$ sono nulli; ció si verifica solo se f è combinazione lineare delle funzioni seno e coseno.*

5.6 Convergenza uniforme

Si è parlato fin qui di sola convergenza puntuale. Per recuperare la convergenza uniforme è necessario rafforzare le ipotesi sulla regolarità di f.

Teorema 5.6.1. - *Sia f regolare a tratti e di classe $C_{2\pi}$. La serie i cui termini sono i suoi coefficienti di Fourier di f è assolutamente convergente; la serie di Fourier è allora totalmente convergente.*

Dimostrazione. Ragioniamo sulla forma esponenziale della serie di Fourier. Valgono le (5.71); inoltre la successione $\{c_n'\}$ appartiene a ℓ^2, in quanto f', essendo limitata, appartiene a $L^2([-\pi,\pi])$. Per la disuguaglianza di Schwarz abbiamo

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n| = |c_0| + \sum_{n\neq 0} \left|\frac{c_n'}{n}\right| \leq |c_0| + \left(\sum_{n\neq 0} \frac{1}{n^2}\right)^{1/2} \left(\sum_{n\neq 0} |c_n'|^2\right)^{1/2} < +\infty\,.$$

Essendo

$$\left|c_n e^{inx}\right| \leq |c_n|$$

la serie di Fourier di f è allora totalmente convergente; come tale essa è assolutamente ed uniformemente convergente. □

Per il teo. 5.6.1 una serie di Fourier puó essere integrata termine a termine se f è regolare a tratti e continua. In realtà basta molto meno.

Teorema 5.6.2. - *Sia f continua a tratti. Se $x_0, x \in [-\pi,\pi]$ allora*

$$\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt = \frac{a_0}{2}(x-x_0) + \sum_{n=1}^{+\infty}\left[a_n \int_{x_0}^{x} \cos(nt)\,dt + b_n \int_{x_0}^{x} \sin(nt)\,dt\right]. \tag{5.76}$$

Dimostrazione. La funzione

$$F(x) = \int_{-\pi}^{x} \left[f(t) - \frac{a_0}{2}\right]\,dt$$

soddisfa la condizione $F(-\pi) = F(\pi) = 0$, quindi è di classe $C_{2\,\pi}$. Essa è inoltre regolare a tratti essendo $F' = f$ nei punti in cui f è continua.
Per le (5.71) si ha

$$a_n = n\,B_n\,, \quad b_n = -n\,A_n \tag{5.77}$$

dove A_n, B_n denotano i coefficienti di Fourier di F. Risulta

$$\begin{aligned} &\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt - \frac{a_0}{2}(x-x_0) = F(x) - F(x_0) \\ = &\sum_{n=1}^{+\infty} [A_n(\cos nx - \cos nx_0) + B_n(\sin nx - \sin nx_0)] \end{aligned}$$

da cui la (5.76) per le (5.77). □

Osservazione 5.6.1. - *La convergenza assoluta della serie di Fourier di una funzione f è strettamente legata alle proprietà di regolarità di f. Infatti nei casi riportati negli es.* 5.4.1, 5.4.2, 5.4.6, 5.4.7, 5.4.8, *in cui le funzioni non sono continue, le rispettive serie dei coefficienti di Fourier non convergono assolutamente in quanto i loro termini generali, in valore assoluto, si comportano come la serie armonica. Al contrario negli es.* 5.4.3, 5.4.4, 5.4.5, *in cui la funzione soddisfa le ipotesi del teo.* 5.6.1, *la serie dei coefficienti di Fourier è assolutamente convergente in quanto confrontabile con la serie armonica generalizzata di esponente due.*

Si puó ottenere la convergenza uniforme per funzioni f solo di classe $C_{2\pi}$ a patto di accontentarsi di approssimare f con polinomi trigonometrici non necessariamente somme parziali della sua serie di Fourier. Il procedimento, noto come metodo di Fejér, fa intervenire le medie aritmetiche della successione delle somme parziali della serie di Fourier di f

$$\sigma_N(x) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} S_k(f,x)\,. \tag{5.78}$$

Teorema 5.6.3. - *Se f è di classe $C_{2\pi}$ la successione* (5.78) *converge uniformemente a f.*

Dimostrazione. Posto

$$F_N(x) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} D_n(x)$$

per la (5.65) risulta

$$F_N(x) = \frac{1}{2N\pi}\frac{\displaystyle\sum_{n=0}^{N-1}\sin((n+1/2)x)}{\sin(x/2)}\,.$$

Le funzioni F_N sono note come nuclei di Fejér.
Per le formule di prostaferesi si ha

$$\sin(x/2)\sin((n+1/2)x) = \frac{1}{2}\left[\cos nx - \cos((n+1)x)\right]$$

e quindi

$$\sum_{n=0}^{N-1}\sin(x/2)\sin((n+1/2)x) = \frac{1}{2}\left[1-\cos(Nx)\right] = \sin^2\left(\frac{N}{2}x\right)$$

da cui

$$F_N(x) = \frac{1}{2N\pi}\frac{\sin^2(Nx/2)}{\sin^2(x/2)}\,.$$

Le funzioni F_N sono quindi positive; inoltre, per la (5.66) risulta

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} F_N(x)\,dx = 1\,. \tag{5.79}$$

Fissato $\delta > 0$ per $\delta \le |x| \le \pi$ si ha

$$\sin^2(x/2) \ge \sin^2(\delta/2)$$

e quindi

$$F_N(x) \le \frac{1}{N\,\sin^2(\delta/2)}\,.$$

Ció comporta che

$$\lim_{N\to+\infty}\int_{\delta\le|x|\le\pi} F_N(x)\,dx = 0\,. \tag{5.80}$$

La funzione f è uniformemente continua. Per il teorema di Cantor, fissato ε, esiste un δ tale che

$$|f(x-y) - f(x)| < \varepsilon \tag{5.81}$$

se $|x-y| < \delta$.
Per la (5.79) si ha allora

$$\begin{aligned}
|(f * F_N)(x) - f(x)| &= \int_{-\pi}^{+\pi} F_N(y)[f(x-y) - f(x)]\,dy \\
&\le \int_{-\pi}^{+\pi} F_N(y)|f(x-y) - f(x)|\,dy \\
&\le \int_{|y|\le\delta} F_N(y)|f(x-y) - f(x)|\,dy \\
&+ \int_{\delta\le|y|\le\pi} F_N(y)|f(x-y) - f(x)|\,dy = I_1 + I_2\,.
\end{aligned}$$

Per le (5.79) e (5.80) si ha $I_1 < \varepsilon$. Essendo f limitata esiste una costante M tale che $|f| \le M$. Si ha allora

$$I_2 \le 2\,M \int_{\delta\le|y|\le\pi} F_N(y)\,dy\,.$$

Per la (5.80), se N è abbastanza grande, si ha $I_2 < \varepsilon$.
Abbiamo in tal modo ottenuto l'asserto. □

Osservazione 5.6.2. - *Con piccole modifiche si puó dimostrare che la successione* (5.78) *converge a* $f(x)$ *in tutti i punti* x *in cui* f *è continua, a* (5.59) *nei punti di discontinuità e a* (5.60) *agli estremi.*

Concludiamo con un risultato che mette in relazione la regolarità di f con la velocità di convergenza a zero della successione dei suoi coefficienti di Fourier.

Teorema 5.6.4. - *Se f, periodica di periodo 2π, è di classe $C^k(\mathbb{R})$ allora*

$$\lim_{|n|\to+\infty} n^k\, c_n = 0\,. \tag{5.82}$$

Se

$$|c_n| = 0(|n|^{-(k+\alpha)}) \tag{5.83}$$

con $\alpha > 1$ allora f è di classe C^k.

Dimostrazione. Se f è di classe C^k allora, per il lemma 5.5.1, i coefficienti di Fourier di $f^{(k)}$ sono

$$c_n^{(k)} = (in)^k c_n\,.$$

Utilizzando il teo. 5.3.3 otteniamo la (5.82).
Da (5.83) discende che

$$|n^k c_n| \le C|n|^{-\alpha}$$

con C costante opportuna. Allora la serie

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} (in)^k c_n e^{int}$$

che si ottiene derivando k volte la serie trigonometrica è totalmente convergente. È possibile quindi derivare k volte termine a termine la serie di Fourier di f. $\square$

5.7 Applicazioni

1.- Riprendiamo lo studio del problema (5.1), (5.2) e (5.3).
A titolo esemplificativo supponiamo f di classe $C^1([0,\pi])$ e tale che

$$f(0) = f(\pi) = 0\,.$$

Prolunghiamo f all'intervallo $[-\pi,\pi]$ in modo che la funzione cosí ottenuta sia dispari; si puó dimostrare che una siffatta funzione, ulteriormente prolungata a $\mathbb{R}$ per periodicità, è di classe $C^1(\mathbb{R})$. Per quanto detto nel teo. 5.4.3 per f sussiste lo sviluppo (5.12) in serie di soli seni. La convergenza è uniforme per il teo. 5.6.1; la serie di termine di termine generale b_n è inoltre assolutamente convergente per il teo. 5.6.1.
Verifichiamo prima di tutto che la (5.11), la cui somma è candidata a essere la soluzione del problema, si raccorda con il dato iniziale. Non basta che per $t = 0$ la soluzione (5.11) ridà il dato iniziale (5.3); a noi interessa che

$$\lim_{t\to 0} u(x,t) = f(x)\,.$$

Poiché che la serie (5.11) si maggiora con serie numerica di termine generale b_n, che abbiamo osservato essere assolutamente convergente, si ha che la (5.11) è uniformemente convergente nell'insieme

$$\{(x,t)\,|\,0 \leq x \leq \pi\,,\, t \geq 0\}\,.$$

È possibile quindi passare al limite sotto il segno di serie ed ottenere quanto richiesto.
Occupiamoci ora del problema della derivazione termine a termine della (5.11). Osserviamo che

$$\left|b_n e^{-n^2 t} \sin(nx)\right| \leq C e^{-n^2 d}\,, \qquad \text{se} \;\; t \geq d > 0$$

dove C è una costante che maggiora i coefficienti b_n.
D'altra parte, la serie che si ottiene dalla (5.11) derivando termine a termine o una volta rispetto alla variabile t oppure due volte rispetto alle variabile x esibisce al posto n-mo il fattore extra n^2. La comparsa di tale termine non desta preoccupazione perché la serie cosí ottenuta è maggiorata dalla serie

$$\sum_n n^2 e^{-n^2 d}$$

che è ancora convergente data la presenza dell'esponenziale. Dai teoremi di derivazione termine a termine delle serie di funzioni si puó dedurre che effettivamente è possibile procedere in tal senso; quindi essa è soluzione dell'equazione del calore (5.1).
Resterebbe da verificare che la soluzione trovata è anche unica; su ció peró non è possibile soffermarci.

2.- Occupiamoci ora dell'equazione delle onde e del relativo problema (5.13), (5.2), (5.3), (5.14). Contrariamente a quanto accade nel caso dell'equazione del calore la questione relativa alla convergenza della serie (5.15) è piú delicata in quanto manca il fattore esponenziale; ancora piú complesso è il problema della derivazione termine a termine. Infatti se anche (5.15) convergesse, differenziando formalmente la serie due volte, comparirebbe un fattore n^2 che crea non pochi problemi. Per ovviare a ció di solito si impongono opportune ipotesi di regolarità sulle funzioni f e g. Si prolunghino dapprima f, g a $[-\pi, \pi]$ in modo che le funzioni ottenute siano dispari; imponiamo che sia $f(0) = f(\pi) = g(0) = g(\pi) = 0$. Supponiamo inoltre che il loro successivo prolungamento per periodicità a $\mathbb{R}$ produca funzioni che siano, la prima, di classe $C^4(\mathbb{R})$, la seconda, di classe $C^3(\mathbb{R})$. Allora, per il teo. 5.6.4 si ha

$$|a_n| = 0(n^{-4})\,, \qquad |b_n| = 0(n^4)\,.$$

Si derivi due volte la (5.15); la serie in tal modo ottenuta, essendo controllata dalle serie armonica di esponente due, è totalmente convergente. Ció assicura la possibilità di eseguire le dovute derivazioni sotto il segno di serie. Ovviamente le ipotesi sopra riportate, se da una parte risolvono il problema matematico, non sono soddisfacenti dal punto di vista delle applicazioni in quanto sembrano un mero espediente tecnico che serve ad aggirare una difficoltà non sostanziale. D'altra parte la funzione (5.15) puó essere riscritta nella forma seguente

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(n(x+t)) + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(n(x-t)) \\ &- \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos(n(x+t)) + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos(n(x-t)) \\ &= \frac{1}{2}\left[f(x+t)+f(x-t)\right] + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} g(\tau)\, d\tau\,, \end{aligned}$$

dove, nell'ultimo passaggio, abbiamo sfruttato il fatto che è possibile integrare termine a termine la serie a secondo membro nella (5.14) (cfr. teo. 5.6.2).
Abbiamo ottenuto una formula alternativa per rappresentare la soluzione del nostro problema; tale espressione, nota come "formula di d'Alembert", funziona se f è di classe C^2 e g di casse C^1. Non siamo ancora arrivati a condizioni soddisfacenti sui dati ma abbiamo un sostanziale indebolimento di ipotesi.

3.- Riprendiamo lo studio del problema al bordo (5.23).
Data l'espressione attesa (5.22) della soluzione e la condizione al bordo, il modo piú ragionevole di scegliere i valori dei coefficienti a_n, b_n è prenderli uguali ai coefficienti di Fourier di φ. Si ha pertanto

$$u(\rho,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(t)dt + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \rho^n \int_0^{2\pi} \varphi(t)\cos[n(\theta-t)]dt\,.$$

Se $\rho < 1$ la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \rho^n \varphi(t)\cos[n(\theta-t)]$$

è totalmente e, quindi, uniformemente convergente; si ha allora

$$u(\rho,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(t)\left\{1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \rho^n \cos[n(\theta-t)]\right\} dt\,.$$

La serie sotto il segno di integrale è la parte reale della serie geometrica di ragione $\rho\, e^{i(\theta-t)}$ privata del primo termine. Si ha allora

$$\sum_{n=1}^{\infty} \rho^n \cos[n(\theta-t)] = \Re\left(\frac{\rho\, e^{i(\theta-t)}}{1-\rho\, e^{i(\theta-t)}}\right) = \frac{\rho\,\cos(\theta-t) - \rho^2}{1+\rho^2-2\rho\,\cos(\theta-t)}$$

da cui

$$u(\rho,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(t)\frac{1-\rho^2}{1+\rho^2-2\rho\,\cos(\theta-t)}\, dt\,.$$

Resta ovviamente da verificare che tale funzione risolve il problema di Dirichlet.

Capitolo 6

La trasformata di Fourier

6.1 Motivazione

Le serie di Fourier si prestano bene a rappresentare funzioni periodiche di periodo 2π o di qualsiasi altro periodo $2T$. In quest'ultimo caso, sempre se f è regolare tratti, si ha

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{T}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{T}\right) \right], \quad x \in [-T, T] \tag{6.1}$$

con

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{T} \int_{-T}^{T} f(t) \cos\left(\frac{n\pi t}{T}\right) dt, \quad n \geq 0 \\ b_n &= \frac{1}{T} \int_{-T}^{T} f(t) \sin\left(\frac{n\pi t}{T}\right) dt, \quad n \geq 1. \end{aligned} \tag{6.2}$$

Supponiamo ora che f sia definita su tutto l'asse reale e che non si ritenga conveniente procedere con una sua troncatura ad un qualsiasi intervallo limitato. Quale procedura seguire per provare a scomporre la funzione f analogamente a quanto fatto nel caso delle serie di Fourier?
Sia $f \in L^1(\mathbb{R})$. Supponiamo inoltre che f sia regolare a tratti; con tale termine si intende una funzione che è regolare a tratti su ogni intervallo limitato di $\mathbb{R}$. Consideriamo la restrizione di f all'intervallo $[-T, T]$. Sostituendo i valori (6.2) dei coefficienti a_n, b_n in (6.1) abbiamo

$$f(x) = \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(t)\, dt + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{T} \int_{-T}^{T} f(t) \cos\left[\frac{n\pi}{T}(x - t)\right] dt, \quad x \in [-T, T].$$

Cosa succede al divergere di T?

Osserviamo innanzitutto che, poiché $f \in L^1(\mathbb{R})$, risulta

$$\lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt\,;$$

si ha quindi

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(t)\,dt = 0\,.$$

C'è allora da aspettarsi che si abbia

$$f(x) = \lim_{T\to\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{T} \int_{-T}^{T} f(t) \cos\left[\frac{n\pi}{T}(x-t)\right]\,dt \right). \tag{6.3}$$

Posto $\Delta\omega = \pi T^{-1}$ e

$$\omega_n = \frac{n\pi}{T} = n\Delta\omega\,,$$

si ha

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{T} \int_{-T}^{T} f(t) \cos\left[\frac{n\pi}{T}(x-t)\right]\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Delta\omega}{\pi} \int_{-T}^{T} f(t) \cos\left[\omega_n(x-t)\right]\,dt\,. \tag{6.4}$$

Se poniamo

$$h_T(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-T}^{T} f(t) \cos[\omega(x-t)]\,dt\,,$$

l'espressione a secondo membro in (6.4) diventa

$$\sum_{n=1}^{\infty} h_T(\omega_n)\Delta\omega\,.$$

Si tratta di una sorta di somma di Riemann relativa all'integrale

$$\int_0^{\infty} h_T(\omega)\,d\omega\,.$$

Facendo tendere $\Delta\omega$ a zero, ovvero T a infinito, ricordando (6.3), (6.4), è ragionevole attendersi che

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos[\omega(x-t)]\,dt \right) d\omega\,. \tag{6.5}$$

La (6.5) puó essere riscritta nella forma piú espressiva

$$f(x) = \int_0^{\infty} [a(\omega)\cos(\omega x) + b(\omega)\sin(\omega x)]\,d\omega\,,$$

con

$$a(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(\omega t)\,dt\,, \quad b(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin(\omega t)\,dt\,.$$

Tali formule, nella loro struttura, ricordano rispettivamente la (5.27) e le (5.31). Esse di fatto ne rappresentano la versione continua: un integrale sostituisce la sommatoria e i valori discreti n vengono rimpiazzati da ω, parametro continuo.

Se, invece di prendere le mosse dalla serie (6.1), si prende in considerazione la forma esponenziale

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{in\pi x}{T}}$$

con

$$c_n = \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(t) e^{-\frac{i\,n\pi\,t}{T}}\, dt\,, \quad n \in Z\,, \tag{6.6}$$

si perviene alla seguente formula

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t}\, dt \right) e^{i\omega x}\, d\omega\,. \tag{6.7}$$

Definizione 6.1.1. - *Se $f \in L^1(\mathbb{R})$ l'integrale*

$$\mathscr{F}[f](\omega) = \hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x}\, dx \tag{6.8}$$

prende il nome "trasformata di Fourier" di f.

La (6.7) allora puó essere interpretata come una formula di inversione

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega x}\, d\omega\,. \tag{6.9}$$

Essa cioè consente di risalire alla funzione originaria f una volta che ne sia nota la trasformata di Fourier. Le condizioni che assicurano la validità della (6.9) sarà l'obiettivo principale del capitolo.

Esempio 6.1.1. - *Sia $\chi_{[-a,a]}$ la funzione caratteristica dell'intervallo $[-a,a]$. Si ha allora*

$$\hat{\chi}_{[-a,a]}(\omega) = \int_{-a}^{a} e^{-i\omega x}\, dx = \frac{e^{ia\omega} - e^{-ia\omega}}{i\omega} = 2\,\frac{\sin(a\omega)}{\omega}\,. \tag{6.10}$$

Si osservi che la trasformata di Fourier non è sommabile.

Esempio 6.1.2. - *Posto*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & se\ x < 0 \\ e^{-x} & se\ x \geq 0 \end{cases}$$

si ha

$$\hat{f}(\omega) = \int_{0}^{\infty} e^{-x} e^{-i\omega x}\, dx = \frac{1}{1 + i\omega}\,.$$

Essendo
$$|\hat{f}(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2}}$$
anche in questo caso $\hat{f}$ *non appartiene a* $L^1(\mathbb{R})$.

Esempio 6.1.3. - *Se*
$$x \in \mathbb{R} \longrightarrow f(x) = e^{-a\,|x|}$$
allora
$$\hat{f}(\omega) = \frac{2\,a}{a^2+\omega^2}\,.$$
In tal caso la trasformata $\hat{f}$ *è sommabile.*

Esempio 6.1.4. - *Sia*
$$f(x) = \frac{1}{x^2+a^2}\,.$$
Per la (1.91) *si ha*
$$\hat{f}(\omega) = \frac{\pi}{a}\,e^{-a\,|\omega|}\,.$$
La trasformata ottenuta nell'es. 6.1.3 *mostra che per* f *vale la formula di inversione* (6.9).

Esempio 6.1.5. - *Consideriamo la funzione*
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \textit{se } x \notin [-1,1] \\ \\ 1-|x| & \textit{se } x \in [-1,1]\,. \end{cases}$$
Poiché f *è pari si ha*
$$\hat{f}(\omega) = 2\int_0^1 (1-x)\cos(\omega x)\,dx = \left[\frac{2}{\omega}\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)\right]^2\,.$$

Esempio 6.1.6. -*Sia*
$$x \in \mathbb{R} \longrightarrow G_a(x) = \exp\left(-\frac{a}{2}\,x^2\right)\,. \tag{6.11}$$
Si ha
$$\begin{aligned} \hat{G}_a(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{a}{2}x^2 - i\omega x}\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(\sqrt{a}\,x + i\,\frac{\omega}{\sqrt{a}})^2 - \frac{\omega^2}{2a}}\,dx \\ &= e^{-\frac{\omega^2}{2a}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(\sqrt{a}\,x + i\,\frac{\omega}{\sqrt{a}})^2}\,dx\,. \end{aligned}$$
Ricordando la (1.94) *abbiamo*
$$\hat{G}_a(\omega) = \sqrt{\frac{2\pi}{a}}e^{-\frac{\omega^2}{2a}} \tag{6.12}$$
e, se $a = 1$,
$$\mathscr{F}\left[e^{-\frac{x^2}{2}}\right](\omega) = \sqrt{2\,\pi}\,e^{-\frac{\omega^2}{2}}\,.$$

6.2 Proprietà della trasformata di Fourier

Riportiamo qui di seguito l'elenco delle principali proprietà della trasformata di Fourier.

Teorema 6.2.1. - *Sia f di classe $L^1(\mathbb{R})$.*

(i) *Per ogni $c \neq 0$ si ha*

$$\mathscr{F}[f(cx)](\omega) = \frac{1}{|c|}\hat{f}(\omega/c)\,. \tag{6.13}$$

(ii) *Posto*

$$\tau_c f\,:\, x \in \mathbb{R} \longrightarrow f(x-c)$$

con $c \in \mathbb{R}$, si ha

$$\mathscr{F}[\tau_c f](\omega) = e^{-ic\omega}\hat{f}(\omega) \tag{6.14}$$

e

$$\mathscr{F}[e^{i\,cx} f(x)](\omega) = \hat{f}(\omega - c)\,. \tag{6.15}$$

(iii) *Se f è continua e sommabile e se f' è continua a tratti e sommabile allora*

$$\mathscr{F}[f'](\omega) = i\omega\hat{f}(\omega)\,. \tag{6.16}$$

Piú in generale, se $f, f', \cdots f^{(k-1)}$ sono continue e sommabili e se $f^{(k)}$ è continua a tratti e sommabile allora

$$\mathscr{F}[f^{(k)}](\omega) = (i\,\omega)^k\hat{f}(\omega)\,. \tag{6.17}$$

(iv) *Se la funzione $x\,f$ è sommabile allora $\hat{f}$ è derivabile e si ha*

$$\mathscr{F}[x\,f](\omega) = i\,\hat{f}'(\omega)\,. \tag{6.18}$$

Se $x^h\,f$ con $h \in \mathbb{N}$ è sommabile allora $\hat{f}$ è derivabile h volte e si ha

$$\mathscr{F}[x^h\,f](\omega) = i^h\,\hat{f}^{(h)}(\omega)\,. \tag{6.19}$$

(v) *Se $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ allora*

$$\mathscr{F}[f * g](\omega) = \hat{f}(\omega)\,\hat{g}(\omega) \tag{6.20}$$

dove $f * g$ denota il prodotto di convoluzione di f e g (cfr. def. 4.3.6).

Dimostrazione. Le (6.13), (6.14) e (6.15) sono di semplice verifica.

Data la regolarità di f vale la (5.69); si ha allora

$$f(x) = \int_0^x f'(t)\,dt + f(0)$$

da cui

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \int_0^{+\infty} f'(t)\,dt + f(0)\,.$$

Quindi f converge se x diverge positivamente. In modo analogo si prova la convergenza di f al divergere di x negativamente. Data la sommabilità di f deve essere

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0\,. \tag{6.21}$$

Integrando per parti e sfruttando la (6.21) abbiamo

$$\mathscr{F}[f'](\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)e^{-i\omega x}\,dx = i\omega\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}\,dx = i\omega\hat{f}(\omega)$$

cioè (6.16).
La (6.17) si ottiene applicando k volte la (6.16).

Essendo

$$x\,e^{-i\omega x} = i\,\frac{d}{d\omega}e^{-i\omega x}$$

si ha

$$\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)e^{-i\omega x}\,dx = i\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\frac{d}{d\omega}e^{-i\omega x}\,dx = i\,\frac{d}{d\omega}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}\,dx$$

ovvero (6.18). La derivazione sotto il segno di integrale è conseguenza del teorema sulla convergenza dominata. Si ha

$$\left|f(x)e^{-i\omega x}\frac{e^{-i\,x\Delta\omega}-1}{\Delta\omega}\right| \le |xf(x)|\left|\frac{e^{-i\,x\Delta\omega}-1}{x\Delta\omega}\right|\,.$$

Poiché

$$\left|e^{-i\,x\Delta\omega}-1\right| \le |x\Delta\omega|$$

risulta

$$\left|f(x)e^{-i\omega x}\frac{e^{-i\,x\Delta\omega}-1}{\Delta\omega}\right| \le |xf(x)|\,.$$

Essendo $x\,f(x)$ sommabile è possibile applicare il teo. 4.4.2; si ha quindi

$$\lim_{\Delta\omega\to0}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}\frac{e^{-i\,x\Delta\omega}-1}{\Delta\omega}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\frac{d}{d\omega}e^{-i\omega x}\,dx\,.$$

Applicando piú volte la (6.18) si ottiene la (6.19).

Per il teo. 4.3.4 si ha

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}[f*g](\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)\,dy\right)e^{-i\omega x}\,dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega y}g(y)\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(x-y)}f(x-y)\,dx\right)dy \\
&= \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega y}g(y)\,dy\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega z}f(z)\,dz\right) = \hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega)
\end{aligned}$$

cioè la (6.20). □

Esempio 6.2.1. - *Osservato che*

$$\chi_{[c-a,c+a]}(x) = \tau_c\chi_{[-a,a]}(x)\,,$$

per la (6.14) *e la* (6.10) *si ha*

$$\hat{\chi}_{[c-a,c+a]}(\omega) = 2\,e^{-i\,c\,\omega}\,\frac{\sin(a\omega)}{\omega}\,. \tag{6.22}$$

Esempio 6.2.2. - *Otteniamo con un altro procedimento la trasformata della funzione* (6.11) *ottenuta nell'es.* 6.1.6.
Essendo

$$G_a'(x) + a\,x\,G_a(x) = 0\,,$$

per le (6.16) *e* (6.18) *si ha*

$$a\,\hat{G}_a'(\omega) + \omega\,\hat{G}_a(\omega) = 0\,.$$

Risolvendo tale equazione differenziale si ottiene

$$\hat{G}_a(\omega) = C\,e^{-\frac{\omega^2}{2a}}\,.$$

Per determinare il valore della costante C basta osservare che

$$C = \hat{G}_a(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{a\,t^2}{2}}\,dt = \sqrt{\frac{2\pi}{a}}\,.$$

Si ha in definitiva la (6.12).

Alcuni degli esempi riportati mettono in evidenza che non sempre la trasformata di Fourier di una funzione è sommabile. Tale inconveniente suggerisce particolare cautela quando si vuole dare significato alla formula (6.9). In compenso la trasformata di Fourier presenta interessanti proprietà di regolarità. Sussiste infatti il seguente risultato, noto come "teorema di Riemann-Lebesgue", che, come il teo. 5.3.3 con la stessa denominazione, dà anche informazioni sul comportamento asintotico di $\hat{f}$.

Teorema 6.2.2. - *Se $f \in L^1(\mathbb{R})$ allora $\hat{f}$ è limitata. Si ha*

$$\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1 \tag{6.23}$$

e

$$\lim_{\omega \to \pm\infty} \hat{f}(\omega) = 0\,. \tag{6.24}$$

Inoltre $\hat{f}$ è uniformemente continua in $\mathbb{R}$.

Dimostrazione. Abbiamo

$$|\hat{f}(\omega)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\, dt$$

da cui la (6.23).
La (6.22) assicura che le combinazioni lineari di funzioni caratteristiche di intervalli sono continue e soddisfano la (6.24).
Per il teo. 4.5.4 tali funzioni sono dense in L^1. Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni semplici convergente a $f \in L^1(\mathbb{R})$. Per la (6.23) si ha

$$|\hat{f}_n(\omega) - \hat{f}(\omega)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f_n(t) - f(t)|\, dt\,, \qquad \forall \omega \in \mathbb{R}$$

da cui si ricava la convergenza uniforme di $\{\hat{f}_n\}$ a $\hat{f}$. Ció implica che $\hat{f}$ è continua. Si ha inoltre

$$\lim_{\omega \to \pm\infty} \hat{f}(\omega) = \lim_{\omega \to \pm\infty} \Big(\lim_{n \to \infty} \hat{f}_n(\omega) \Big) = \lim_{n \to \infty} \left(\lim_{\omega \to \pm\infty} \hat{f}_n(\omega) \right)$$

da cui la (6.24).
Infine, la continuità di $\hat{f}$ e la (6.24) comportano l'uniforme continuità di $\hat{f}$. $\square$

Proposizione 6.2.1. - *Se $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ si ha*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(t) g(t)\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \hat{g}(t)\, dt\,. \tag{6.25}$$

Dimostrazione. Per la prop. 6.2.2 le funzioni $\hat{f}\, g$ e $f\, \hat{g}$ sono sommabili.
Per il teo. 4.3.4 si ha

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(t) g(t)\, dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\,t\,\tau} f(\tau)\, d\tau \right) g(t)\, dt \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\,t\,\tau} g(t)\, dt \right) f(\tau)\, d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \hat{g}(\tau)\, d\tau
\end{aligned}$$

cioè la (6.25). $\square$

6.3 Formule di inversione

Per quanto riguarda la formula di inversione (6.9) proponiamo alcuni risultati. Adottiamo per semplicità di esposizione la seguente convenzione: si modifica una funzione regolare a tratti assegnando ad essa in ogni punto di discontinuità x il valore

$$\frac{f(x^-)+f(x^+)}{2}\,.$$

Teorema 6.3.1. - *Sia f sommabile e regolare a tratti. Allora*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega x}e^{-\varepsilon^2\frac{\omega^2}{2}}\hat{f}(\omega)\,d\omega = f(x)\,. \tag{6.26}$$

Dimostrazione. Sia $\varepsilon>0$. Essendo

$$\left|e^{i\omega(x-y)}e^{-\varepsilon^2\frac{\omega^2}{2}}f(y)\right| = e^{-\varepsilon^2\frac{\omega^2}{2}}\,|f(y)|$$

la funzione

$$(\omega,y)\longrightarrow e^{i\omega(x-y)}e^{-\varepsilon^2\frac{\omega^2}{2}}f(y)$$

è sommabile in $\mathbb{R}^2$. Applicando il teo. 4.3.4 si ha

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2} e^{i\omega(x-y)}e^{-\varepsilon^2\frac{\omega^2}{2}}f(y)\,dy\,d\omega &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega x}e^{-\varepsilon^2\frac{\omega^2}{2}}\hat{f}(\omega)\,d\omega\\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\,dy\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega(x-y)}e^{-\varepsilon^2\frac{\omega^2}{2}}\,d\omega\,.\end{aligned}$$

D'altra parte, sfruttando la formula (6.12), abbiamo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega(x-y)}e^{-\varepsilon^2\frac{\omega^2}{2}}\,d\omega = \mathscr{F}[e^{-\varepsilon^2\frac{\omega^2}{2}}](y-x) = \frac{\sqrt{2\pi}}{\varepsilon}e^{-\frac{(x-y)^2}{2\,\varepsilon^2}}\,.$$

In definitiva si ha

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega x}e^{-\varepsilon^2\frac{\omega^2}{2}}f(\omega)\,d\omega = \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}\,\varepsilon}\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)e^{-\frac{(x-y)^2}{2\,\varepsilon^2}}\,dy = (f*\eta_\varepsilon)(x)$$

dove η_ε è il mollificatore (4.26). Basta allora applicare il teo. 4.4.3 per ottenere la (6.26). $\square$

Dimostriamo il seguente risultato che estende alla trasformata di Fourier quanto provato per le serie di Fourier nel teo. 5.4.1.

Teorema 6.3.2. - *Se $f\in L^1(\mathbb{R})$ è regolare a tratti si ha*

$$f(x) = \lim_{r\to+\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-r}^{r}\hat{f}(\omega)e^{i\omega\,x}\,d\omega\,. \tag{6.27}$$

Se $\hat{f}\in L^1(\mathbb{R})$ vale la (6.9).

Dimostrazione. Poiché
$$\left|f(t)e^{-i\omega(t-x)}\right| \leq |f(t)|$$
la funzione
$$t \longrightarrow f(t)e^{-i\omega(t-x)}$$
è sommabile nella striscia
$$S_r = \{(t,\omega)\,:\, t \in \mathbb{R}\,,\, \omega \in [-r,r]\}$$
dal momento che
$$\int_{S_r} \left|f(t)e^{-i\omega(t-x)}\right| dt\, d\omega = 2\,r \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\, dt\,.$$
Per il teo. 4.3.4 si ha
$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_{-r}^{r} \hat{f}(\omega)e^{i\omega\, x}\, d\omega &= \frac{1}{2\pi}\int_{-r}^{r} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt\right) e^{i\omega\, x}\, d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \left(\int_{-r}^{r} e^{i\omega(x-t)}\, d\omega\right) dt \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, \frac{\sin r(t-x)}{\pi(t-x)} dt \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x+t)\, \frac{\sin rt}{\pi t}\, dt\,.
\end{aligned}$$
Dimostriamo che
$$\lim_{r\to+\infty} \int_0^{+\infty} f(x+t)\frac{\sin rt}{\pi t}\, dt = \frac{1}{2} f(x^+)\,. \tag{6.28}$$
Per la (1.88) si ha
$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} f(x+t)\frac{\sin rt}{\pi t} dt - \frac{1}{2}f(x^+) = \int_0^{+\infty} \frac{f(x+t)-f(x^+)}{\pi t}\sin rt\, dt \\
= &\int_0^{T} \frac{f(x+t)-f(x^+)}{\pi t}\sin rt\, dt + \int_T^{+\infty} f(x+t)\frac{\sin rt}{\pi t} dt \\
- &f(x^+)\int_T^{+\infty} \frac{\sin rt}{\pi t} dt = I_1 + I_2 + I_3\,.
\end{aligned}$$
Sia $\varepsilon > 0$.
Se $T > 1$ si ha
$$\left|\frac{\sin rt}{t}\right| \leq 1\,, \quad t \geq T$$

e quindi

$$|I_2| \leq \frac{1}{\pi} \int_T^{+\infty} |f(x+t)|\, dt \,.$$

Essendo f sommabile è possibile scegliere T in modo che risulti

$$|I_2| < \varepsilon \,. \tag{6.29}$$

La (1.88) comporta che

$$\lim_{T \to +\infty} \int_T^{+\infty} \frac{\sin rt}{\pi t} dt = 0 \,.$$

Anche in questo caso si fissi T in modo che risulti

$$|I_3| < \varepsilon \,. \tag{6.30}$$

Determinato T in modo tale che siano soddistatte le (6.29) e (6.30) valutiamo l'integrale I_1.
Poniamo

$$g(t) = \begin{cases} \dfrac{f(x+t) - f(x^+)}{\pi\, t} & \text{se } 0 < t < T \\ \\ 0 & \text{altrove} \,. \end{cases}$$

La funzione g converge per t che tende a zero da destra data la regolarità di f. Ció basta per assicurare che essa è sommabile. Si ha allora

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\, \frac{e^{irt} - e^{-irt}}{2i}\, dt = \frac{1}{2\,i} [\hat{g}(-r) - \hat{g}(r)] \,.$$

Per la (6.24) il termine $\hat{g}(-r) - \hat{g}(r)$ è infinitesimo al divergere di r. È possibile determinare quindi un r_ε in modo tale che risulti

$$|I_1| < \varepsilon \,, \quad r > r_\varepsilon \,. \tag{6.31}$$

Da (6.29), (6.30) e (6.31) discende la (6.28).
In modo analogo si prova che

$$\lim_{r \to +\infty} \int_{-\infty}^{0} f(x+t) \frac{\sin rt}{\pi t}\, dt = \frac{1}{2} f(x^-) \,.$$

Abbiamo provato quanto affermato nell'enunciato del teorema.
Se $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ l'integrale improprio nella (6.27) è un integrale in senso proprio. Vale quindi la (6.9). $\square$

Ma quando $\hat{f}$ è sommabile? A tale domanda risponde il seguente risultato.

Proposizione 6.3.1. - *Se f è di classe $C^2(\mathbb{R})$ allora $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$.*

Dimostrazione. Per la (6.23) la funzione $\hat{f}$ è limitata. Inoltre per la (6.17), con $k = 2$, si ha

$$|\hat{f}(\omega)| = 0\left(\frac{1}{\omega^2}\right).$$

Ció basta per assicurare che $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$. □

Una conseguenza immediata della (6.26) ovvero della (6.27) è il seguente risultato.

Proposizione 6.3.2. - *Siano f, g sommabili e regolari a tratti. Se $\hat{f} = \hat{g}$ allora $f = g$.*

6.4 La trasformata di Fourier in L^2

Quando si è introdotta la serie di Fourier una particolare enfasi è stata riservata alla teoria L^2. Solo in una fase successiva ci si è soffermati sulle proprietà di convergenza puntuale o uniforme. Quest'ultimo punto di vista ci ha fin qui guidato nel proporre le principali proprietà della trasformata di Fourier. Vogliamo in questo paragrafo illustrare per la trasformata di Fourier un punto di vista che puó essere messo in relazione con quanto illustrato per le serie di Fourier di funzioni di classe L^2.
Sia $f \in L^2(\mathbb{R})$; poiché non è detto che f sia sommabile la definizione di trasformata di Fourier richiede una certa attenzione. A tal fine è utile introdurre una tipologia di funzioni per le quali tale problema non si pone.

Definizione 6.4.1. - *Si dice che f è a "decrescenza rapida" se f è di classe $C^\infty(\mathbb{R})$ e le funzioni $P\, f^{(k)}$ sono limitate per ogni polinomio P e per ogni intero $k \geq 0$. L'insieme costituito da tali funzioni si denota con il simbolo $\mathscr{S}(\mathbb{R})$.*

Definizione 6.4.2. - *Si denota con $C_0^\infty(\mathbb{R})$ o anche con il simbolo $\mathscr{D}(\mathbb{R})$ lo spazio delle funzioni di $C^\infty(\mathbb{R})$ il cui supporto (cfr. def. 4.5.2) è compatto.*

Osservazione 6.4.1. - *Si ha $\mathscr{D}(\mathbb{R}) \subset \mathscr{S}(\mathbb{R})$. Inoltre $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ è contenuto in ogni spazio $L^p(\mathbb{R})$.*

Osservazione 6.4.2. - *Si verifica facilmente che le due funzioni (4.26) e (4.27) appartengono, rispettivamente, a $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ e $\mathscr{D}(\mathbb{R})$.*

Proposizione 6.4.1. - *La trasformata di Fourier è un'applicazione biunivoca di $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ su $\mathscr{S}(\mathbb{R})$. Vale inoltre l'identità*

$$f(x) = (2\pi)^{-1}\,\hat{\hat{f}}(-x)\,. \tag{6.32}$$

Dimostrazione. La funzione $(1 + x^2)x^h\, f^{(k)}(x)$ è limitata comunque si scelgano h, k interi non negativi. Si ha quindi

$$|x^h\, f^{(k)}(x)| \leq C_{h,k}\frac{1}{1 + x^2}$$

con $C_{h,k}$ costante opportuna. La funzione $x^h f^{(k)}(x)$ è allora sommabile. Ció comporta che sono sommabili anche le funzioni $D^k(x^h f(x))$ essendo queste combinazioni lineari di prodotti di potenze di x e di derivate di f. La trasformata di Fourier di $D^k(x^h f(x))$ è pertanto limitata per la (6.23). Inoltre per le (6.17) e (6.19) risulta

$$\mathscr{F}[D^k(x^h f(x)](\omega) = i^{h+k}\omega^k \hat{f}^{(h)}(\omega)\,. \tag{6.33}$$

Quindi il prodotto di un polinomio e di una qualsiasi derivata di $\hat{f}$ è limitato. Ció comporta che $\hat{f} \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$.
Per la definizione di trasformata di Fourier e per la formula di inversione (6.9) si ha infine

$$\mathscr{F}[\hat{f}](-x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega)e^{i\,\omega\,x}\,d\omega = 2\pi\,f(x)$$

cioè la (6.32). □

Utilizziamo quanto detto sulla trasformata di Fourier in $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ per estendere tale nozione a funzioni di classe $L^2(\mathbb{R})$. Premessa indispensabile è l'identità di Plancherel che fa le veci di quella di Parceval (5.45) e che è riportata nel seguente risultato.

Teorema 6.4.1. - *Se $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ si ha*

$$\|\hat{f}\|_2 = \sqrt{2\pi}\,\|f\|_2\,. \tag{6.34}$$

Dimostrazione. Consideriamo due funzioni $f, g \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$. Esse ovviamente appartengono a $L^2(\mathbb{R})$. Tenendo presente la formula di inversione (6.9) si ha

$$\begin{aligned}
2\pi\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)}\,dx &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\left(\overline{\int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(\omega)e^{ix\omega}\,d\omega}\right)dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\left(\int_{-\infty}^{\infty} \overline{\hat{g}(\omega)}e^{-ix\omega}\,d\omega\right)dx \\
&\qquad \text{(per il teo. 4.3.4)} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\hat{g}(\omega)}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ix\omega\,dx}\right)d\omega \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)\overline{\hat{g}(\omega)}\,d\omega\,.
\end{aligned}$$

Se $f = g$ si ottiene la (6.34). □

Sia ora f una funzione di $L^2(\mathbb{R})$. Si puó dimostrare che $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ è denso in $L^2(\mathbb{R})$; esiste quindi una successione $\{f_n\}$ di funzioni a decrescenza rapida convergente a f in $L^2(\mathbb{R})$. Per la (6.34) si ha

$$\sqrt{2\,\pi}\,\|f_n - f_m\|_2 = \|\hat{f}_n - \hat{f}_m\|_2\,.$$

La successione $\{\hat{f}_n\}$ è quindi di Cauchy in $L^2(\mathbb{R})$: il suo limite è per definizione la trasformata di Fourier di f. Ovviamente tale limite non dipende dalla particolare successione $\{f_n\}$ scelta.

Si dimostra facilmente il seguente risultato.

Teorema 6.4.2. - *Se $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ si ha*

$$2\pi \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)}\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)\overline{\hat{g}(\omega)}\, d\omega\,. \tag{6.35}$$

Vale inoltre l'identità (6.34).
La trasformata di Fourier infine è un'applicazione biunivoca di $L^2(\mathbb{R})$ su $L^2(\mathbb{R})$.

Proponiamo ora un modo alternativo di pervenire allo stesso risultato.
La restrizione di f a $[-r, r]$ appartiene a $L^1([-r, r])$ per la prop. 4.5.2. Ha senso quindi calcolarne la trasformata di Fourier

$$\phi_r(\omega) = \int_{-r}^{r} f(t)e^{-i\omega t}\, dt\,. \tag{6.36}$$

Si puó dimostrare che le funzioni (6.36), al divergere di r, convergono in $L^2(\mathbb{R})$ a $\hat{f}$.
Osserviamo per concludere che per funzioni di classe $L^2(\mathbb{R})$ vale anche una formula di inversione (6.9); tale formula va peró correttamente interpretata.
Poniamo

$$\psi_r(x) = \int_{-r}^{r} \hat{f}(\omega)e^{i\omega x}\, d\omega\,; \tag{6.37}$$

si puó dimostrare che, al tendere di r ad infinito, la famiglia di funzioni (6.37) tende in $L^2(\mathbb{R})$ a f. Quindi la formula di inversione (6.9) in un certo senso continua a sussistere purché si interpreti nel modo giusto il simbolo di integrale.

6.5 Applicazioni

1 - Riprendiamo lo studio dell'equazione del calore (5.1) nel semipiano delle y positive con la condizione iniziale

$$u(x, 0) = f(x)\,, \quad x \in \mathbb{R}\,. \tag{6.38}$$

Non ci sono condizioni al bordo che vanno sostituite da ipotesi che assicurino che la soluzione u e il dato iniziale f tendano a zero in modo sufficientemente rapido per $|x|$ che diverge.
Per ogni fissato valore della variabile t si applichi la trasformata di Fourier all'equazione (5.1). Per il momento non ci preoccupiamo della liceità dei vari passaggi matematici; procedendo in modo formale e ricordando la (6.16) si ha

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(\omega, t) + \omega^2 \hat{u}(\omega, t) = 0\,.$$

Per ogni ω fissato abbiamo quindi una equazione differenziale ordinaria del primo ordine nella variabile t. Se si aggiunge la condizione iniziale

$$\hat{u}(\omega, 0) = \hat{f}(\omega)$$

si ottiene

$$\hat{u}(\omega, t) = \hat{f}(\omega)\exp(-\omega^2 t)\,.$$

Dobbiamo adesso risalire all'espressione della soluzione u del nostro problema. Si osserva innanzitutto (cfr. (6.12)) che $\exp(-\omega^2\, t)$ è la trasformata di Fourier della funzione

$$K_t(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\, t}}\exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right)$$

nota come "nucleo del calore". Essa risolve l'equazione (5.1) nel semipiano delle t positive e, essendo uguale al mollificatore (4.26) con $\varepsilon = \sqrt{2\,t}$, quando t va a zero, "tende" alla delta di Dirac.
In definitiva si ha

$$\hat{u}(\omega, t) = \hat{f}(\omega)\hat{K}_t(\omega)\,.$$

Ricordando la (6.20) si ottiene allora

$$\mathscr{F}[u] = \mathscr{F}[f * K_t]$$

da cui

$$u(x,t) = [f * K_t](x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\exp\left(-\frac{|x-y|^2}{4t}\right)dy\,.$$

Abbiamo in tal modo ottenuto una espressione per la soluzione del nostro problema; che tale funzione sia effettivamente la soluzione cercata è oggetto di verifica.

2 - Consideriamo l'equazione di Laplace (1.58) nel semipiano delle y positive ed associamo ad essa la condizione iniziale (6.38). Cerchiamo soluzioni limitate.
Per ogni fissato y applichiamo la trasformata di Fourier; si ottiene la seguente equazione differenziale

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}\hat{u}(\omega, y) - \omega^2\hat{u}(\omega, y) = 0\,.$$

La soluzione ha la seguente struttura

$$\hat{u}(\omega, y) = c_1(\omega)e^{-|\omega| y} + c_2(\omega)e^{|\omega| y}$$

ovvero, visto che siamo interessati a soluzioni limitate

$$\hat{u}(\omega, y) = c(\omega)e^{-|\omega| y}\,.$$

Per la (6.38) deve essere $\hat{u}(\omega, y) = \hat{f}(\omega)$. Abbiamo quindi

$$\hat{u}(\omega, y) = \hat{f}(\omega)e^{-|\omega| y}\,. \tag{6.39}$$

Posto

$$P(x,y) = \frac{y}{\pi(x^2+y^2)}$$

si ha (cfr. es. 6.1.4)

$$\hat{P}(\omega,y) = e^{-|\omega|y}\,.$$

Dalla 6.39, ricordando la (6.20), si ottiene

$$u(x,y) = (f*P)(x,y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y f(x-t)}{\pi(t^2+y^2)}\,dt\,.$$

Come al solito bisogna verificare che u è effettivamente soluzione del problema.

3 - Per concludere riportiamo il seguente risultato, attribuito a Shannon, molto utilizzato in "analisi dei segnali".

Teorema 6.5.1. (Sampling theorem) - *Supponiamo che $f \in L^2(\mathbb{R})$ sia a "banda limitata", risulti cioè*

$$\hat{f}(\omega) = 0\,, \quad \textit{per } |\omega| \geq T \tag{6.40}$$

con T costante opportuna.
Allora f è completamente determinata dai valori che essa assume nei punti

$$x_n = \frac{n\pi}{T}\,, \quad n \in Z\,.$$

Più precisamente si ha

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x_n)\frac{\sin(Tx-n\pi)}{Tx-n\pi}\,. \tag{6.41}$$

Dimostrazione. L'utilità di un tale risultato è evidente; un segnale infatti puó essere ricostruito semplicemente facendo rilevazioni su un insieme discreto di valori della variabile temporale.
Sia φ una funzione appartenente a $\mathscr{S}(\mathbb{R})$. Si ha

$$\begin{aligned}
2\pi\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\overline{\varphi(x)}\,dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega)\overline{\hat{\varphi}(\omega)}\,d\omega \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega)\left(\overline{\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)e^{-i\omega\, x}\,dx}\right)d\omega \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\varphi(x)}e^{i\omega\, x}\,dx\right)d\omega \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\varphi(x)}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega)e^{i\omega\, x}\,d\omega\right)dx\,.
\end{aligned}$$

La prima uguaglianza consegue dalla (6.35), l'ultima dal teo. 4.3.4. Data l'arbitrarietà di φ deve essere

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega e^{i\omega x}\, d\omega\,. \tag{6.42}$$

Dalla (6.42) consegue intanto che f è continua.
Consideriamo la restrizione di $\hat{f}$ all'intervallo $[-T, T]$ e sviluppiamo tale funzione in serie di Fourier nella sua forma esponenziale

$$\hat{f}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{-n} e^{-\frac{in\pi\omega}{T}}\,. \tag{6.43}$$

Per le (6.6) si ha

$$c_{-n} = \frac{1}{2T}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{\frac{in\pi\omega}{T}}\, d\omega\,. \tag{6.44}$$

Per la (6.42) la (6.44) diventa

$$c_{-n} = \frac{\pi}{T} f\left(\frac{n\pi}{T}\right)\,. \tag{6.45}$$

In definitiva, sempre per la formula di inversione (6.9), utilizzando (6.43) e (6.45), risulta

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T} \hat{f}(\omega) e^{i\omega x} d\omega = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{n\pi}{T}\right) e^{-\frac{in\pi\omega}{T}}\right) e^{i\omega x} d\omega \\ &= \frac{1}{2T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{n\pi}{T}\right)\int_{-T}^{T} e^{-\frac{in\pi\omega}{T}} e^{i\omega x} d\omega = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{n\pi}{T}\right)\frac{\sin(Tx - n\pi)}{Tx - n\pi} \end{aligned}$$

cioè la (6.41).
Si osservi che, nel calcolo appena effettuato, abbiamo proceduto commutando il simbolo di serie con il simbolo di integrale. Tale operazione è lecita in quanto, indicata con S_N la somma parziale $N-$ma della serie (6.43), la successione $\{S_N\}$ converge in L^2 a $\hat{f}$. Ricordando la prop. 4.5.1 abbiamo

$$\begin{aligned} \int_{-T}^{T} \hat{f}(\omega) e^{i\omega x} d\omega &= \lim_{N\to\infty}\int_{-T}^{T} S_N(\omega) e^{i\omega x} d\omega \\ &= \lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N}^{N} c_{-n}\int_{-T}^{T} e^{-\frac{in\pi\omega}{T}} e^{i\omega x}\, d\omega \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{-n}\int_{-T}^{T} e^{-\frac{in\pi\omega}{T}} e^{i\omega x} d\omega\,. \end{aligned}$$

□

Capitolo 7

La trasformata di Laplace

7.1 Definizione ed esempi

Sia f una funzione definita in $\mathbb{R}$ che risulti nulla nell'intervallo $]-\infty, 0[$. Per un tale tipo di funzione si usa talvolta il termine "segnale". Per tutto il capitolo, anche se non espressamente indicato, faremo esclusivamente riferimento a tale tipologia di funzioni.
Se

$$t \in [0, +\infty[\longrightarrow e^{-z_0\, t}\, f(t)$$

è sommabile per un opportuno $z_0 \in \mathbb{C}$ si dice che f è "Laplace-trasformabile".
Se $\Re(z) \geq \Re(z_0)$ si ha

$$|e^{-z\, t} f(t)| = e^{-\Re(z)\, t}\, |f(t)| \leq e^{-\Re(z_0)\, t} |f(t)| \leq |e^{-z_0\, t}\, f(t)|\,;$$

la funzione $e^{-z\, t} f(t)$ è allora sommabile.
Posto

$$\sigma[f] = \inf\{\Re(z)\,:\, e^{-z\, t}\, f(t) \in L^1([0, +\infty[)\}$$

la funzione $e^{-z\, t} f(t)$ è sommabile se z appartiene al semipiano

$$\{z \in \mathbb{C}\,:\, \Re(z) > \sigma[f]\}\,. \tag{7.1}$$

La quantità $\sigma[f]$ viene chiamata "ascissa di convergenza" di f.
Se $\sigma[f] = -\infty$ l'insieme (7.1) coincide con tutto $\mathbb{C}$.

Definizione 7.1.1. - *Se z appartiene al semipiano* (7.1) *la funzione*

$$\mathscr{L}[f](z) = \int_0^{+\infty} e^{-z\, t}\, f(t)\, dt \tag{7.2}$$

prende il nome di "trasformata di Laplace" di f.

Un utile criterio per riconoscere se una funzione è Laplace-trasformabile è contenuto nella seguente proposizione.

Proposizione 7.1.1. - *Se esistono due costanti* M *e* α *tali che*

$$|f(t)| \le M\, e^{\alpha t} \tag{7.3}$$

allora f *è Laplace-trasformabile e* $\sigma[f] \le \alpha$.

Dimostrazione. Basta ovviamente verificare che la funzione $f(t)\, e^{-\beta\, t}$ è sommabile se $\beta > \alpha$. Per la (7.3) si ha infatti

$$|f(t)|\, e^{-\beta\, t} = |f(t)|\, e^{-\alpha\, t}\, e^{(\alpha-\beta)\, t} \le M\, e^{(\alpha-\beta)\, t}$$

da cui l'asserto. □

Riportiamo il seguente risultato per la cui dimostrazione rimandiamo a [1].

Teorema 7.1.1. - *La trasformata di Laplace* (7.2) *è olomorfa nel semipiano* (7.1). *Si ha inoltre*

$$\frac{d}{dz}\mathscr{L}[f](z) = -\int_0^{+\infty} t\, f(t) e^{-zt}\, dt\,. \tag{7.4}$$

Elenchiamo qui di seguito le principali proprietà della trasformata di Laplace.

Proposizione 7.1.2. - *Se* f, g *sono due funzioni Laplace-trasformabili con ascisse di convergenza* $\sigma[f]$ *e* $\sigma[g]$ *allora, se* $a,\, b \in \mathbb{C}$,

$$\mathscr{L}[a\, f + b\, g](z) = a\, \mathscr{L}[f](z) + b\, \mathscr{L}[g](z)$$

per ogni z *tale che* $\Re(z) > \max\{\sigma[f], \sigma[g]\}$.

Dimostrazione. È una semplice conseguenza della definizione di trasformata di Laplace. □

Teorema 7.1.2. - *Sia* f *una funzione Laplace-trasformabile.*

(i) *Se* $c > 0$ *si ha*

$$\mathscr{L}[f(c\, t)](z) = c^{-1} \mathscr{L}[f](z/c) \tag{7.5}$$

per ogni z *tale che* $\Re(z) > c\, \sigma[f]$.

(ii) *Posto*

$$\tau_c f\,:\, t \in \mathbb{R} \longrightarrow f(t-c)$$

con $c > 0$, *si ha*

$$\mathscr{L}[\tau_c f](z) = e^{-c\, z} \mathscr{L}[f](z) \tag{7.6}$$

per ogni z *tale che* $\Re(z) > \sigma[f]$.

Se $a \in \mathbb{C}$ *si ha*

$$\mathscr{L}[e^{a\, t}\, f(t)](z) = \mathscr{L}[f(t)](z-a) \tag{7.7}$$

per ogni z *tale che* $\Re(z) > \sigma[f] + \Re(a)$.

(iii) *Se f è anche continua e regolare a tratti e se f' è Laplace-trasformabile si ha*

$$\mathscr{L}[f'](z) = z\mathscr{L}[f](z) - f(0) \tag{7.8}$$

per ogni z tale che $\Re(z) > \max\{\sigma[f], \sigma[f']\}$.

(iv) *Se g è Laplace-trasformabile allora*

$$\mathscr{L}[f * g](z) = \mathscr{L}[f](z)\,\mathscr{L}[g](z) \tag{7.9}$$

per ogni z tale che $\Re(z) > \max\{\sigma[f], \sigma[g]\}$.

Dimostrazione. Le (7.5), (7.6) e (7.7) sono di semplice verifica.

Proviamo la (iii).
Si ha

$$\mathscr{L}[f'](z) = \lim_{r\to+\infty} \int_0^r e^{-zt} f'(t)\, dt\,.$$

Data la regolarià di f è possibile integrare per parti. Se $r > 0$ si ha

$$\int_0^r e^{-zt} f'(t)\, dt = z\int_0^r e^{-zt} f(t)\, dt + e^{-z\,r} f(r) - f(0)\,.$$

I due integrali convergono al divergere di r dal momento che le funzioni integrande sono sommabili. Risulta quindi finito il seguente limite

$$\lim_{r\to+\infty} e^{-z\,r} f(r)\,.$$

Poiché f è sommabile si ha che f è infinitesima all'infinito. Risulta in tal modo provata la (7.8).

Occupiamoci ora della (iv).
Poiché le funzioni f, g sono nulle sul semiasse negativo abbiamo

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau) g(t-\tau)\, d\tau\,.$$

Per il teo. 4.3.4 si ha

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}[f * g](z) &= \int_0^{+\infty} e^{-z\,t} \left(\int_0^t f(\tau) g(t-\tau)\, d\tau \right) dt \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-z\,\tau} f(\tau) \left(\int_\tau^{+\infty} g(t-\tau) e^{-z(t-\tau)}\, dt \right) d\tau \\
&\qquad \text{(ponendo } t - \tau = s\text{)} \\
&= \left(\int_0^{+\infty} e^{-z\,\tau} f(\tau)\, d\tau \right) \left(\int_0^{+\infty} e^{-z\,s} g(s)\, ds \right)
\end{aligned}$$

ovvero la (7.9). □

Esempio 7.1.1. - *Consideriamo la funzione di Heaviside*

$$H(t) = \begin{cases} 1 & se\ t \geq 0 \\ 0 & se\ t < 0\,. \end{cases} \tag{7.10}$$

Si ha

$$\mathscr{L}[H](z) = \int_0^{+\infty} e^{-z\,t}\,dt = \frac{1}{z}$$

per ogni z tale che $\Re(z) > 0$.
Piú in generale, se $f(t) = e^{a\,t}$ e $\Re(z) > \Re(a)$, allora

$$\mathscr{L}[e^{a\,t}](z) = \int_0^{+\infty} e^{-(z-a)t}\,dt = \frac{1}{z-a}\,. \tag{7.11}$$

Esempio 7.1.2. - *Se $f(t) = \chi_{[0,h]}(t)$ si ha*

$$\mathscr{L}[f](z) = \int_0^{h} e^{-z\,t}\,dt = \frac{1 - e^{-h\,z}}{z}$$

per ogni $z \in \mathbb{C}$.
Posto

$$\delta_h(t) = \chi_{[0,h]}(t)/h \tag{7.12}$$

abbiamo

$$\mathscr{L}[\delta_h(t)](z) = \frac{1 - e^{-h\,z}}{h\,z}\,. \tag{7.13}$$

La famiglia di funzioni δ_h tende q.o. alla funzione nulla. Si prova facilmente che

$$\lim_{h\to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_h(t)\varphi(t)\,dt = \varphi(0) \tag{7.14}$$

per ogni funzione $\varphi \in C^0(\mathbb{R})$: la famiglia $\{\delta_h\}$ ha per limite la cosiddetta delta di Dirac (*cfr. oss.* 4.4.2)*.*

Esempio 7.1.3. - *Consideriamo la funzione $f(t) = t^{\alpha-1}$ con $\alpha > 0$.*
Si ha $\sigma[f] = 0$. Se z è reale risulta

$$\mathscr{L}[f](z) = \int_0^{+\infty} e^{-z\,t} t^{\alpha-1}\,dt = \frac{1}{z^\alpha} \int_0^{+\infty} e^{-\tau} \tau^{\alpha-1}\,d\tau = \frac{\Gamma(\alpha)}{z^\alpha}\,.$$

È possibile estendere per prolungamento analitico tale formula a tutti i valori complessi z posti nel semipiano $\{z : \Re(z) > 0\}$.
Se $\alpha = n+1$, con $n \in \mathbb{N}$, per la (2.3) *si ha*

$$\mathscr{L}[t^n](z) = \frac{n!}{z^{n+1}}\,.$$

Piú in generale, se $a \in \mathbb{C}$, risulta

$$\mathscr{L}[e^{a\,t}t^{\alpha-1}](z) = \frac{\Gamma(\alpha)}{(z-a)^{\alpha}} \tag{7.15}$$

per ogni z tale che $\Re(z) > \Re(a)$.

Esempio 7.1.4. - *Facendo appello alle formule di Eulero* (1.9)*, alla prop.* 7.1.2 *e alla* (7.11) *abbiamo*

$$\mathscr{L}[\sin\omega t](z) = \frac{\omega}{z^2+\omega^2}\,, \qquad \mathscr{L}[\cos\omega t](z) = \frac{z}{z^2+\omega^2} \tag{7.16}$$

per ogni z con parte reale positiva.
Le (7.16) *sono suscettibili delle seguenti generalizzazioni*

$$\begin{aligned} \mathscr{L}[e^{a\,t}\,\sin\omega t](z) &= \frac{\omega}{(z-a)^2+\omega^2} \\ \mathscr{L}[e^{a\,t}\,\cos\omega t](z) &= \frac{z-a}{(z-a)^2+\omega^2}\,. \end{aligned} \tag{7.17}$$

Esse sono conseguenza dalla (7.7)*.*

Analogamente si ha

$$\mathscr{L}[\sinh\omega t](z) = \frac{\omega}{z^2-\omega^2}\,, \quad \mathscr{L}[\cosh\omega t](z) = \frac{z}{z^2-\omega^2}\,.$$

In tal caso z va scelto con parte reale maggiore di ω.

Proposizione 7.1.3. - *Se f è periodica di periodo T allora*

$$\mathscr{L}[f](z) = \frac{1}{1-e^{-T\,z}}\int_0^T e^{-z\,t} f(t)\,dt \tag{7.18}$$

per ogni z con parte reale positiva.

Dimostrazione. Si ha

$$\begin{aligned} \mathscr{L}[f](z) &= \sum_{n=0}^{+\infty}\int_{nT}^{(n+1)T} e^{-z\,t}\,f(t)\,dt \\ &\qquad \text{(con il cambio di variabile } t=\tau+n\,T\text{)} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-z\,nT}\int_0^T e^{-z\,\tau}\,f(\tau+nT)\,d\tau \\ &\qquad \text{(per la periodicità di } f\text{)} \\ &= \left(\int_0^T e^{-z\,t}\,f(t)\,dt\right)\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-z\,nT}\,. \end{aligned}$$

Poiché $\left|e^{-z\,T}\right| = e^{-\Re(z)\,T} < 1$ si ha

$$\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-z\,nT} = \frac{1}{1-e^{-T\,z}}\,.$$

Abbiamo pertanto la (7.18). □

Esempio 7.1.5. - *Sia f la restrizione al semiasse positivo dell'onda quadra* (5.68)*. Per la* (7.18) *si ha*

$$\begin{aligned}\mathscr{L}[f](z) &= \frac{1}{1-e^{-2\,\pi\,z}}\left[\int_0^{\pi} e^{-z\,t}\,dt - \int_{\pi}^{2\pi} e^{-z\,t}\,dt\right] \\ &= \frac{1}{z}\frac{(1-e^{-\pi\,z})^2}{1-e^{-2\,\pi\,z}} = \frac{1}{z}\frac{1-e^{-\pi\,z}}{1+e^{-\pi\,z}} = \frac{1}{z}\,\tanh\left(\frac{\pi}{2}\,z\right)\,.\end{aligned}$$

7.2 La formula di inversione

Sia f Laplace-trasformabile. Se $x > \sigma[f]$ la funzione $e^{-x\,t}\,f(t)$ è sommabile; per la sua trasformata di Fourier vale la seguente formula

$$\mathscr{F}[e^{-x\,t}f](y) = \int_0^{+\infty} e^{-(x+i\,y)t}f(t)\,dt = \mathscr{L}[f](x+i\,y)\,. \tag{7.19}$$

La (7.19) mette in evidenza lo stretto legame tra la trasformata di Fourier e quella di Laplace.
Un primo risultato riconducibile alla (7.19) è il seguente.

Proposizione 7.2.1. - *Se f è Laplace-trasformabile si ha*

$$\lim_{|y|\to+\infty} \mathscr{L}[f](x+i\,y) = 0 \tag{7.20}$$

per ogni $x > \sigma[f]$. Se f soddisfa la (7.3) *risulta*

$$\lim_{x\to+\infty} \mathscr{L}[f](x+i\,y) = 0 \tag{7.21}$$

per ogni y.

Dimostrazione. La (7.20) consegue dalle (7.19) e (6.24).
Sussista la (7.3) e sia $x > \alpha+1$. Si ha

$$|f(t)e^{-(x+i\,y)t}| \le |f(t)|e^{-x\,t} \le |f(t)|e^{-\alpha\,t}e^{-t} \le Me^{-t}\,. \tag{7.22}$$

La (7.22), per il teo. 4.4.2, consente di passare al limite sotto il segno di integrale

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} \mathscr{L}[f](x+i\,y) &= \lim_{x\to+\infty} \int_0^{+\infty} f(t)e^{-(x+i\,y)t}\,dt \\ &= \int_0^{+\infty} \left(\lim_{x\to+\infty} f(t)e^{-(x+i\,y)t}\right)\,dt = 0\,.\end{aligned}$$

Abbiamo in tal modo la (7.21). □

Occupiamoci ora della formula di inversione della trasformata di Laplace. Ricordiamo la convenzione secondo la quale nei punti di discontinuità f assume il valore (5.59).

Teorema 7.2.1. - *Sia f regolare a tratti e Laplace-trasformabile. Se $\beta > \sigma[f]$ allora*

$$f(t) = \frac{1}{2\pi\, i} \lim_{r\to+\infty} \int_{\beta-i\,r}^{\beta+i\,r} \mathscr{L}[f](z) e^{z\,t}\, dz\,. \tag{7.23}$$

L'integrale si intende esteso al segmento di $\mathbb{C}$ di estremi $(\beta - i\,r)$ e $(\beta + i\,r)$.

Dimostrazione. La funzione $g(t) = e^{-\beta\,t} f(t)$ è sommabile e regolare a tratti. Riscriviamo la (7.19) nel modo seguente

$$\hat{g}(\omega) = \mathscr{L}[f](\beta + i\,\omega)\,.$$

Per la formula di inversione (6.27) abbiamo allora

$$g(t) = \frac{1}{2\,\pi} \lim_{r\to+\infty} \int_{-r}^{r} \hat{g}(\omega)\, e^{i\,\omega\,t}\, d\omega = \frac{1}{2\,\pi} \lim_{r\to+\infty} \int_{-r}^{r} \mathscr{L}[f](\beta + i\,\omega) e^{i\,\omega\,t}\, d\omega$$

ovvero, posto $z = \beta + i\,\omega$,

$$e^{-\beta\,t} f(t) = \frac{1}{2\,\pi\,i} \lim_{r\to+\infty} \int_{\beta-i\,r}^{\beta+i\,r} \mathscr{L}[f](z) e^{(z-\beta)\,t}\, dz\,.$$

Semplificando il termine $e^{-\beta\,t}$ si ottiene la (7.23). □

7.3 Applicazione alle equazioni differenziali

Se u è una funzione di classe $C^{n-1}([0, +\infty[)$ e $u^{(n-1)}$ è regolare a tratti e Laplace-trasformabile allora, applicando n volte la (7.8), abbiamo

$$\mathscr{L}[u^{(n)}](z) = z^n \mathscr{L}[u](z) - [z^{n-1}\, u^{(0)}(0) + z^{n-2}\, u^{(1)}(0) + \cdots + u^{(n-1)}(0)] \tag{7.24}$$

dove si è posto $u^{(0)} = u$ e $u^{(k)}$ è la derivata k-ma di u.

Si consideri il problema di Cauchy relativo ad una equazione differenziale lineare di ordine n a coefficienti costanti

$$\begin{cases} u^{(n)} + a_1\, u^{(n-1)} + \cdots + a_n u = f \\ u^{(0)}(0) = u_0 \\ \dots \\ u^{(n-1)}(0) = u_{n-1}\,. \end{cases}$$

Applicando la trasformata di Laplace ai due membri dell'equazione e utilizzando la (7.24) si ha

$$P(z)\,\mathscr{L}[u](z) = \mathscr{L}[f](z) + Q(z)$$

dove

$$P(z) = z^n + a_1\,z^{n-1} + \cdots + a_0$$

e

$$\begin{aligned} Q(z) &= u_0\,z^{n-1} + (u_1 + a_1\,u_0)\,z^{n-2} + \cdots \\ &+ (u_{n-1} + a_1 u_{n-2} + \cdots + a_{n-1} u_0)\,. \end{aligned}$$

In definitiva abbiamo

$$\mathscr{L}[u](z) = \mathscr{L}[f](z)\frac{1}{P(z)} + \frac{Q(z)}{P(z)}\,. \tag{7.25}$$

A questo punto, per ottenere la soluzione, è necessario "antitrasformare". Se si decompongono le funzioni razionali P^{-1} e $Q\,P^{-1}$ in fratti semplici si puó ricorrere (7.11), (7.15) e (7.17) per ottenere le due v e w le cui trasformate di Laplace sono rispettivamente P^{-1} e $Q\,P^{-1}$. Infine, per la (7.9), si ha la seguente espressione della soluzione

$$u = f * v + w\,. \tag{7.26}$$

Per semplicità di esposizione limitiamoci d'ora in poi al caso di equazioni differenziali del secondo ordine. Riscriviamo il relativo problema di Cauchy

$$\begin{cases} u'' + a\,u' + b\,u = f \\ u(0) = u_0 \\ u'(0) = u_1 \end{cases}$$

La (7.25) diventa

$$\mathscr{L}[u](z) = \frac{\mathscr{L}[f](z)}{z^2 + az + b} + \frac{u_0\,z + (u_1 + a\,u_0)}{z^2 + az + b}\,. \tag{7.27}$$

Per le funzioni razionali

$$R_1(z) = \frac{1}{z^2 + az + b}\,, \qquad R_2(z) = \frac{u_0\,z + (u_1 + a\,u_0)}{z^2 + az + b}$$

è semplice risalire alle antitrasformate come già sopra indicato.

Esempio 7.3.1. - *Applichiamo il metodo sopra descritto al problema di Cauchy*

$$\begin{cases} u'' - 3\,u' + 2\,u = f \\ u(0) = 1 \\ u'(0) = 0 \end{cases}$$

con

$$f(t) = \begin{cases} \sin t & se\ t \in [0, \pi] \\ \\ 0 & se\ t > \pi. \end{cases}$$

Per la (7.27) *si ha*

$$\mathscr{L}[u](z) = \frac{\mathscr{L}[f](z)}{z^2 - 3z + 2} + \frac{z-3}{z^2 - 3z + 2} = \mathscr{L}[f](z)\, R_1(z) + R_2(z)\,.$$

Per la (7.15) *le antitrasformate di* R_1 *e* R_2 *sono rispettivamente*

$$v = e^{2\,t} - e^t\,, \quad w = 2\,e^t - e^{2\,t}\,.$$

La soluzione ha l'espressione (7.26)*. Per ottenere la soluzione bisogna calcolare la convoluzione delle funzioni* f *e* v*.*

Esempio 7.3.2. - *Consideriamo il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} u'' + u = f \\ \\ u(0) = 1 \\ \\ u'(0) = -1 \end{cases}$$

con $f(t) = t$*.*
Si ha

$$\mathscr{L}[u](z) = \frac{\mathscr{L}[f](z)}{z^2+1} + \frac{z-1}{z^2+1} = \mathscr{L}[f](z)\, R_1(z) + R_2(z)\,.$$

Per le (7.17) *le antitrasformate di* R_1 *e* R_2 *sono rispettivamente*

$$v(t) = \sin t\,, \quad w(t) = \cos t - \sin t\,.$$

A questo punto non resta che calcolare il prodotto di convoluzione

$$(f * v)(t) = \int_0^t \sin\tau\,(t-\tau)\,d\tau\,.$$

Esempio 7.3.3. - *Per quanto riguarda il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} u'' - 2\,u' + u = f \\ \\ u(0) = 0 \\ \\ u'(0) = 1 \end{cases}$$

ancora con $f(t) = t$ *si ha*

$$\mathscr{L}[u](z) = \frac{\mathscr{L}[f](z)}{(z-1)^2} + \frac{1}{(z-1)^2} = \mathscr{L}[f](z)\,\mathscr{L}[t\,e^t](z) + \mathscr{L}[t\,e^t](z)\,.$$

La soluzione è

$$u(t) = \int_0^t e^\tau\,\tau(t-\tau)\,d\tau + t\,e^t\,.$$

Capitolo 8

Distribuzioni

8.1 Definizioni ed esempi

Definizione 8.1.1. - *Una funzione misurabile u dicesi "localmente sommabile" se è sommabile la sua restrizione ad un qualsiasi intervallo limitato. Lo spazio costituito da tali funzioni si denota con il simbolo* $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$.

Ad ogni funzione $u \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ si puó associare il funzionale lineare

$$\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}) \longrightarrow < u, \varphi >= \int_{-\infty}^{+\infty} u(x)\varphi(x)\, dx \tag{8.1}$$

dove $\mathscr{D}(\mathbb{R})$ è lo spazio introdotto nella def. 6.4.2. La funzione $u\,\varphi$ è integrabile in quanto essa è non nulla in un intervallo limitato e, in tale intervallo, essa è il prodotto di una funzione sommabile e di una limitata.

Sussiste il seguente risultato.

Proposizione 8.1.1. - *Se il funzionale lineare* (8.1) *è nullo allora u è quasi ovunque uguale a zero.*

Dimostrazione. Consideriamo la restrizione di u, per esempio, a $[-\pi, \pi]$ e la funzione di $\mathscr{D}(\mathbb{R})$

$$\eta(x) = \begin{cases} \exp\left(\dfrac{1}{x^2-\pi^2}\right) & \text{se } |x| < \pi \\ \\ 0 & \text{se } |x| \geq \pi \end{cases} \tag{8.2}$$

il cui supporto è $[-\pi, \pi]$.
Per ipotesi si ha

$$\int_{-\pi}^{\pi} u(x)\,\eta(x) e^{inx}\, dx = 0$$

per ogni $n \in \mathbb{Z}$ dal momento che $\eta(x)\, e^{inx} \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$. I coefficienti di Fourier di $u\,\eta$ sono quindi nulli. Pertanto (cfr. oss. 5.3.1) la funzione $u\eta$ è quasi ovunque nulla; ció comporta che la restrizione di u all'intervallo $[-\pi, \pi]$ è quasi ovunque nulla. Alla stessa conclusione si perviene se si sceglie un qualsiasi altro intervallo. Abbiamo quindi l'asserto. □

Il risultato appena dimostrato consente in sostanza di identificare una funzione localmente sommabile con il funzionale lineare (8.1). È questo l'appiglio cui ci aggrapperemo per estendere la nozione di funzione.
Prima di far ció dobbiamo introdurre una topologia in $\mathscr{D}(\mathbb{R})$ rispetto alla quale il funzionale (8.1) sia, oltre che lineare, anche continuo.

Definizione 8.1.2. - *La successione $\{\varphi_n\}$ di funzioni di $\mathscr{D}(\mathbb{R})$ converge alla funzione nulla se*

- *i supporti delle funzioni φ_n sono contenuti in un intervallo limitato;*
- *per ogni intero $k \geq 0$ si ha*

$$\lim_{n \to +\infty} \|\varphi_n^{(k)}\|_{C^0} = 0\,,$$

ovvero le successioni $\{\varphi_n^{(k)}\}$ convergono uniformemente a zero.

La successione $\{\varphi_n\}$ converge alla funzione φ se $\{\varphi_n - \varphi\}$ converge alla funzione nulla.

Definizione 8.1.3. - *Si chiama "distribuzione" un'applicazione lineare*

$$f\,:\,\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}) \longrightarrow f(\varphi) = < f, \varphi > \in \mathbb{C}$$

che sia anche "continua" nel senso che

$$\lim_{n \to \infty} \varphi_n = \varphi \Longrightarrow \lim_{n \to \infty} < f, \varphi_n > = < f, \varphi > \ . \tag{8.3}$$

Lo spazio delle distribuzioni si denota con il simbolo $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$. Le funzioni di $\mathscr{D}(\mathbb{R})$ prendono il nome di "funzioni test".

Di semplice verifica è il seguente utile risultato.

Proposizione 8.1.2. - *La continuità di un funzionale lineare su $\mathscr{D}(\mathbb{R})$ va verificata solo in zero. Altrimenti detto, vale la* (8.3) *se e solo se*

$$\lim_{n \to \infty} \varphi_n = 0 \Longrightarrow \lim_{n \to \infty} < f, \varphi_n > = 0\,.$$

Introduciamo ora topologia in $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$ definendo in essa opportunamente la nozione di convergenza.

Definizione 8.1.4. - *Una successione di distribuzioni $\{f_n\}$ tende a $f \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ se*

$$\lim_{n \to +\infty} < f_n, \varphi > = < f, \varphi >$$

per ogni $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$.

Proposizione 8.1.3. - *Una funzione $u \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ è una distribuzione.*

Dimostrazione. Per la prop. 8.1.2 basta verificare che il funzionale (8.1) è continuo in zero.
Se $\{\varphi_n\}$ converge a zero in $\mathscr{D}(\mathbb{R})$ allora

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} u(x)\varphi_n(x)\,dx \right| \leq \left(\int_a^b |u(x)|\,dx \right) \|\varphi_n\|_{C^0}$$

dove $[a,b]$ è un intervallo che contiene i supporti delle funzione φ_n. Poiché

$$\lim_{n\to\infty} \|\varphi_n\|_{C^0}$$

si ha l'asserto. □

Di semplice verifica è il seguente risultato.

Proposizione 8.1.4. - *Il funzionale*

$$\delta_0 \,:\, \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}) \longrightarrow \varphi(0) \tag{8.4}$$

è una distribuzione.

Definizione 8.1.5. - *Il funzionale* (8.4) *prende il nome la "delta di Dirac". Piú un generale con il simbolo*

$$\delta_x \,:\, \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}) \longrightarrow \varphi(x)$$

si denota la "delta di Dirac concentrata in x".

Proposizione 8.1.5. - *La distribuzione* (8.4) *non si puó identificare con una funzione.*

Dimostrazione. Procediamo per assurdo. Sia δ una funzione localmente sommabile tale che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\,\varphi(x)\,dx = \varphi(0) \tag{8.5}$$

per ogni funzione test φ.
Se $n \in \mathbb{N}$ poniamo $\varphi_n(x) = \eta(n\,x)$ dove η è la funzione (8.2). Tali funzioni sono convergono a zero q.o.. Inoltre

$$\varphi_n(x) \leq e^{-\pi^2}\,, \quad x \in [-\pi, \pi]\,.$$

Per il teo. 4.4.2 si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{-\pi}^{+\pi} \delta(x)\,\varphi_n(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \delta(x) \left(\lim_{n\to+\infty} \varphi_n(x) \right) dx = 0\,.$$

D'altra parte per la (8.5) si ha

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\varphi_n(x)\,dx = \varphi_n(0) = e^{-\pi^2}\,;$$

abbiamo quindi un assurdo. □

Osservazione 8.1.1. - *Abbiamo piú volte accennato a famiglie di funzioni che convergono, nel senso della def.* 8.1.4, *alla delta di Dirac. Il procedimento attraverso il quale si perviene ai mollificatori (cfr. par. 4.4) rappresenta un modello per costruire funzioni che approssimano la delta. Altre famiglie di funzioni sono i nuclei di Dirichlet (cfr. par. 5.4), quelli di Fejér (cfr. par. 5.6), le funzioni* $\sin(r\,t)/(\pi\,t)$ *che intervengono nella dimostrazione del teo.* 6.3.2, *il nucleo del calore e, per finire, la famiglia di funzioni* δ_h *dell'es.* 7.1.2.

Proposizione 8.1.6. - *La famiglia* $\{\mathscr{L}[\delta_h]\}$ *delle trasformate di Laplace delle funzioni* (7.12) *converge nel senso delle distribuzioni, al tendere di* h *a zero, alla funzione identicamente uguale a* 1.

Dimostrazione. Se $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$, per il teo. 4.3.4 si ha

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathscr{L}[\delta_h](x)\varphi(x)\,dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_h(t)e^{-xt}\,dt\right)\varphi(x)\,dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-xt}\,\varphi(x)\,dx\right)\delta_h(t)\,dt\,.\end{aligned}$$

Per la (7.14) la famiglia $\{\delta_h\}$ delle funzioni (7.12) converge alla delta di Dirac al tendere di h a zero. Si ha

$$\lim_{h\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathscr{L}[\delta_h](x)\varphi(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,dx$$

da cui l'asserto. □

Osservazione 8.1.2. - *Il precedente risultato suggerisce di porre* $\mathscr{L}[\delta_0](z) = 1$.

Esempio 8.1.1. - *Poniamo*

$$u_\varepsilon = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & se\ |x| > \varepsilon \\ 0 & se\ |x| \le \varepsilon\,. \end{cases} \tag{8.6}$$

Se φ *è una funzione test sia* $[-r, r]$ *un intervallo contenente il suo supporto. Si ha*

$$< u_\varepsilon, \varphi >= \int_{\varepsilon\le|x|\le r} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx = \int_{\varepsilon\le|x|\le r} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}\,dx$$

dal momento che

$$\int_{\varepsilon\le|x|\le r} \frac{\varphi(0)}{x}\,dx = 0\,.$$

La funzione

$$x \neq 0 \longrightarrow \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x} \tag{8.7}$$

ha una singolarità eliminabile in zero; essa è quindi localmente integrabile. L'integrale a secondo membro è costante per valori di r abbastanza grandi.
Si pone

$$\lim_{r\to+\infty}\int_{-r}^{r}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}\,dx=(\text{v.p.})\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}\,dx$$

dove l'integrale a secondo membro non vuole indicare l'integrale in senso ordinario della funzione (8.7) *essendo questa non sommabile: esso prende il nome di "integrale valor principale" o anche di "integrale alla Cauchy".*
La famiglia di distribuzioni (8.6) *converge quindi nel senso della def.* 8.1.4 *al funzionale lineare*

$$\varphi\in\mathscr{D}(\mathbb{R})\longrightarrow(\text{v.p.})\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}\,dx\,. \tag{8.8}$$

Proposizione 8.1.7. - *Il funzionale* (8.8) *è una distribuzione.*

Dimostrazione. Dobbiamo solo verificare la continuità. Sia $\{\varphi_n\}$ una successione di $\mathscr{D}(\mathbb{R})$, con i supporti contenuti in $[-r,r]$, convergente a zero. Per il teorema di Lagrange si ha

$$\left|\frac{\varphi_n(x)-\varphi_n(0)}{x}\right|\le\|\varphi_n\|_{C^1}$$

da cui si deduce che

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{-r}^{r}\frac{\varphi_n(x)-\varphi_n(0)}{x}\,dx=0\,.$$

Quindi il funzionale (8.8) è una distribuzione ed è il limite in $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$ della famiglia di funzioni (8.6). □

Definizione 8.1.6. - *La* (8.8)*, nota come "distribuzione valore principale di* $1/x$*", viene indicata con simbolo*

$$(\text{v.p.})\,\frac{1}{x}\,.$$

Da osservare che $1/x$ *non è localmente sommabile e quindi la distribuzione non puó in alcun modo identificarsi con tale funzione.*

8.2 Derivata di una distribuzione

Per definire la derivata di una distribuzione il punto di partenza è la seguente identità

$$\int_{-\infty}^{+\infty}u'(x)\varphi(x)\,dx=-\int_{-\infty}^{+\infty}u(x)\varphi'(x)\,dx \tag{8.9}$$

valida per funzioni u di classe $C^1(\mathbb{R})$ e per funzioni test φ. Per la (8.9) la distribuzione associata alla funzione u' si puó descrivere attraverso una distribuzione che coinvolge solo la u. La (8.9) viene presa a modello per introdurre la nozione di derivata di una distribuzione.

Definizione 8.2.1. - *La derivata di una distribuzione f è il funzionale lineare e continuo su $\mathscr{D}(\mathbb{R})$*

$$f' \,:\, \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}) \longrightarrow - < f, \varphi' > \,. \tag{8.10}$$

Vale cioè la seguente relazione

$$< f', \varphi > = - < f, \varphi' >$$

che estende alle distribuzioni l'identità (8.9)*.*

Esempio 8.2.1. - *Calcoliamo la derivata della funzione di Heaviside* (7.10)*. Si ha*

$$< H', \varphi > = - < H, \varphi' > = - \int_0^{+\infty} \varphi'(x)\, dx = \varphi(0)\,.$$

Quindi $H' = \delta_0$.

Esempio 8.2.2. - *La distribuzione δ_0' agisce nel modo seguente*

$$< \delta_0', \varphi > = - < \delta_0, \varphi' > = -\varphi'(0)\,.$$

Proposizione 8.2.1. - *La derivata di* $\log|x|$ *è la distribuzione* (8.8)*.*

Dimostrazione. Se $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ e $[-r, r]$ ne contiene il supporto si ha

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{+\infty} \log|x|\, \varphi'(x)\, dx = \int_{-r}^{r} \log|x| [\varphi(x) - \varphi(0)]'\, dx \\
= \;& \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon}^{r} \log|x| [\varphi(x) - \varphi(0)]'\, dx + \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-r}^{-\varepsilon} \log|x| [\varphi(x) - \varphi(0)]'\, dx \\
= \;& - \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon}^{r} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x}\, dx - \lim_{\varepsilon \to 0} (\log \varepsilon\, [\varphi(\varepsilon) - \varphi(0)]) - \varphi(0) \log r \\
- \;& \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-r}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x}\, dx + \lim_{\varepsilon \to 0} (\log \varepsilon\, [\varphi(-\varepsilon) - \varphi(0)]) + \varphi(0) \log r \\
= \;& - \int_{-r}^{r} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x}\, dx = -(\text{v.p.}) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x}\, dx \\
= \;& - < (\text{v.p.})\, \frac{1}{x}, \varphi >
\end{aligned}$$

da cui l'asserto. □

Esempio 8.2.3. - *Per semplificare le notazioni indichiamo con f la distribuzione* (8.8)*. Procedendo come nell'es.* 8.1.1*, scelto r in modo che il supporto di φ sia contenuto in $[-r,r]$, si ha*

$$\begin{aligned}
< f', \varphi > &= - < f, \varphi' >= - \int_{-r}^{r} \frac{\varphi'(x) - \varphi'(0)}{x}\, dx \\
&= - \int_{-r}^{r} \frac{1}{x}\, [\varphi(x) - \varphi(0) - \varphi'(0)\, x]'\, dx \\
&= (\text{v.p.}) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(0) - \varphi'(0)\, x}{x^2}\, dx\,.
\end{aligned}$$

Il seguente risultato estende al caso delle distribuzioni un ben noto teorema del calcolo differenziale.

Proposizione 8.2.2. - *Se $f' = 0$ allora f è costante cioè*

$$< f, \varphi >= c \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\, dx\,, \quad \forall \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}) \tag{8.11}$$

con $c \in \mathbb{C}$. Si ha cioè $f = c$.

Dimostrazione. Si verifica facilmente che le derivate di funzioni test si caratterizzano come funzioni test ad integrale nullo. La condizione $f' = 0$ equivale quindi ad affermare che $< f, \psi >= 0$ per ogni $\psi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ tale che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x)\, dx = 0\,.$$

Sia φ_0 una funzione test tale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_0(x)\, dx = 1\,.$$

Se $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ la funzione test

$$\psi(x) = \varphi(x) - \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\, dx \right) \varphi_0(x)$$

ha integrale nullo. Quindi

$$0 =< f, \psi >=< f, \varphi > - \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\, dx \right) < f, \varphi_0 >$$

ovvero

$$< f, \varphi >=< f, \varphi_0 > \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\, dx \right)\,.$$

Abbiamo cioè la (8.11) con $c =< f, \varphi_0 >$. $\square$

Definizione 8.2.2. - *Se $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$ e $f \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ il prodotto di ψ e f è la distribuzione*

$$\psi\, f\,:\, \varphi \longrightarrow < f, \psi\,\varphi > \ .$$

Esempio 8.2.4. - *Si ha*

$$< x\,\delta_0, \varphi > = < \delta_0, x\,\varphi > = 0$$

per ogni $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$. Quindi la distribuzione $x\,\delta_0$ è la distribuzione nulla.
Poiché

$$< x\,\delta_0', \varphi > = < \delta_0', x\,\varphi > = - < \delta_0, \varphi + x\,\varphi' > = -\varphi(0)$$

si ha $x\,\delta_0' = -\delta_0$.
Se f denota la distribuzione (8.8), posto $\psi = x\,\varphi$, si ha

$$< x\,f, \varphi > = < f, \psi > = (\text{v.p.}) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\psi(x) - \psi(0)}{x}\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\, dx\,.$$

Risulta quindi $x\,f = 1$.

Di semplice verifica è il seguente risultato.

Proposizione 8.2.3. - *Se $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$ e $f \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ allora*

$$(\psi\, f)' = \psi'\, f + \psi\, f'\,.$$

8.3 Distribuzioni temperate

Ci accingiamo a definire la trasformata di Fourier di una distribuzione.
Punto di partenza è la (6.25): se $f \in L^1$ e $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ si ha

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(t)\varphi(t)\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\hat{\varphi}(t)\, dt\,.$$

L'idea è di definire la trasformata di Fourier di una distribuzione f in modo che risulti

$$< \hat{f}, \varphi > = < f, \hat{\varphi} > \ . \tag{8.12}$$

Non è peró detto che $\hat{\varphi}$ appartenga allo spazio $\mathscr{D}(\mathbb{R})$ delle funzioni test. La via d'uscita consiste nel cambiare lo spazio delle funzioni test propendendo per uno che sia stabile rispetto alla trasformata di Fourier. Ad un tale ruolo ben si presta lo spazio $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ (cfr. prop. 6.4.1). Dobbiamo peró prima provvedere ad introdurre in tale spazio una topologia.

Definizione 8.3.1. - *Una successione $\{\varphi_n\}$ di funzioni di $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ converge alla funzione nulla se, per ogni coppia h, k di interi non negativi, $\{x^h \varphi_n^{(k)}\}$ converge uniformemente a zero.*
Si dice che $\{\varphi_n\}$ converge alla funzione φ se $\{\varphi_n - \varphi\}$ converge alla funzione identicamente nulla.

Si verifica facilmente che una successione convergente in $\mathscr{D}(\mathbb{R})$ è convergente anche in $\mathscr{S}(\mathbb{R})$. Esistono invece successioni di $\mathscr{D}(\mathbb{R})$ convergenti in $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ ma non in $\mathscr{D}(\mathbb{R})$. La successione di funzioni

$$\eta_n(x) = \frac{1}{2^n}\,\eta(x-n)\,,$$

dove η è la funzione (4.27), converge a zero in $\mathscr{S}(\mathbb{R})$. Infatti, se h, k sono interi non negativi, si ha

$$|x^h\, D^k \eta_n(x)| \le \frac{(n+1)^h}{2^n}\,\|\eta_n^{(k)}\| = \frac{(n+1)^h}{2^n}\,\|\eta^{(k)}\|$$

da cui si ottiene che la successione $\{x^h\, D^k \eta_n\}$ converge uniformemente a zero. La successione $\{\eta_n\}$ non converge invece in $\mathscr{D}(\mathbb{R})$ visto che i supporti delle funzioni η_n non sono confinati in un intervallo compatto.

Perché il secondo membro della (8.12) sia continuo su $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ abbiamo bisogno del seguente risultato.

Proposizione 8.3.1. - *La trasformata di Fourier è un'applicazione continua di $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ in sé.*

Dimostrazione. Per la prop. 6.4.1 resta da verificare solo la continuità. Bisogna cioè provare che $\{\hat{\varphi}_n\}$ converge in $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ alla funzione nulla se $\{\varphi_n\}$ fa altrettanto. Dalle (6.33) e (6.23) si ha

$$|\omega^k D^h \hat{\varphi}_n(\omega)| = |\mathscr{F}[D^k(x^h \varphi_n)(\omega)| \le \|D^k(x^h \varphi_n)\|_1\,. \tag{8.13}$$

La successione il cui termine generale è

$$(1+x^2) D^k(x^h \varphi_n(x))$$

converge uniformemente a zero. Esiste quindi una costante C tale che

$$(1+x^2)\,|D^k(x^h \varphi_n(x))| \le C$$

ovvero

$$|D^k(x^h \varphi_n(x))| \le \frac{C}{1+x^2}\,.$$

Il teo. 4.4.2 consente allora di affermare che

$$\lim_{n\to\infty} \|D^k(x^h \varphi_n(x))\|_1 = 0\,.$$

Dalla (8.13) si deduce che la successione $\{\omega^k D^h \hat{\varphi}_n\}$ converge uniformemente a zero. Abbiamo quindi ottenuto la convergenza a zero in $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ di $\{\hat{\varphi}_n\}$. □

Definizione 8.3.2. - *Un funzionale lineare e continuo su $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ è detta "distribuzione temperata". Lo spazio costituito da tali distribuzioni si denota con $\mathscr{S}'(\mathbb{R})$.*

Una distribuzione temperata è un funzionale continuo che agisce su uno spazio piú ampio e piú ricco di successioni convergenti di quanto non sia $\mathscr{D}(\mathbb{R})$. In realtà $\mathscr{S}'(\mathbb{R})$ è strettamente contenuto in $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$. Basti pensare alla funzione localmente sommabile e^{x^2}.

Definizione 8.3.3. - *Per "funzioni a crescita lenta" si intendono le funzioni che si presentano come prodotto di un polinomio e di una funzione sommabile.*

Proposizione 8.3.2. - *Le funzioni a crescita lenta sono distribuzioni temperate.*

Dimostrazione. Sia $f = P\,u$ con P polinomio e $u \in L^1(\mathbb{R})$. Se $\{\varphi_n\}$ converge a zero in $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ si ha

$$\left|\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\varphi_n(x)\,dx\right| \le \int_{-\infty}^{+\infty} |u(x)\,P(x)\,\varphi_n(x)|\,dx \le \|u\|_1 \|P\,\varphi_n\|_\infty\,.$$

Poiché

$$\lim_{n\to\infty} \|P\,\varphi_n\|_\infty = 0$$

si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\varphi_n(x)\,dx = 0$$

da cui l'asserto. □

Proposizione 8.3.3. - *Sono a crescita lenta i polinomi e le funzioni appartenenti a un qualche spazio di Lebesgue $L^p(\mathbb{R})$.*

Dimostrazione. Se f è un polinomio di grado n allora la seguente scrittura

$$f(x) = \frac{f(x)}{1+x^{2n}}(1+x^{2n}) = u(x)\,(1+x^{2n})\,, \tag{8.14}$$

con u ovviamente sommabile, comporta che f è a crescita lenta.
Se $f \in L^p(\mathbb{R})$ basta scrivere f come in (8.14) avendo cura di scegliere n in modo tale che $(1+x^{2n})^{-1}$ appartenga a $L^q(\mathbb{R})$ con q esponente coniugato di p: in tal caso infatti la funzione

$$\frac{f(x)}{1+x^{2n}}$$

appartiene a $L^1(\mathbb{R})$ per la disuguaglianza di Hölder.
La (8.14) consente anche di concludere che le funzioni limitate sono a crescita lenta. □

8.4 Trasformata di Fourier in $\mathscr{S}'(\mathbb{R})$

Siamo ora in grado di definire la trasformata di Fourier per una distribuzione temperata f. In tal caso il termine a secondo membro nella (8.12) è, per la prop. 8.3.1, un funzionale lineare e continuo su $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ cioè una distribuzione temperata.

Definizione 8.4.1. - *La distribuzione temperata*

$$\hat{f} \, : \, \varphi \in \mathscr{S} \longrightarrow < f, \hat{\varphi} >$$

è la trasformata di Fourier di f.

Esempio 8.4.1. - *Si verifica facilmente che le delta di Dirac δ_λ sono distribuzioni temperate. Essendo*

$$< \hat{\delta}_\lambda, \varphi >=< \delta_\lambda, \hat{\varphi} >= \hat{\varphi}(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) e^{-i\,\lambda\,t}\,dt$$

si ha che $\hat{\delta}_\lambda$ coincide con la funzione limitata $e^{-i\,\lambda\,t}$.
In particolare si ha che $\hat{\delta}_0 = 1$.

Esempio 8.4.2. - *Sia $f(x) = e^{i\lambda\,x}$. Se $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, per la formula di inversione* (6.9) *si ha*

$$< \hat{f}, \varphi >= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda\,x} \hat{\varphi}(x)\,dx = 2\pi\,\varphi(\lambda)$$

da cui

$$\mathscr{F}[e^{i\lambda\,x}] = 2\pi\,\delta_\lambda \tag{8.15}$$

e, in particolare,

$$\mathscr{F}[1] = 2\pi\,\delta_0\,. \tag{8.16}$$

Definizione 8.4.2. - *Se f è una distribuzione indichiamo con il simbolo $f(-x)$ la distribuzione*

$$< f(-x), \varphi(x) >=< f(x), \varphi(-x) > \;.$$

Se $f(x) = f(-x)$ la distribuzione $f(x)$ dicesi pari; se invece $f(x) = -f(-x)$ essa dicesi dispari.

È possibile estendere la formula (6.32) alle distribuzioni temperate.
Si ha

$$< \hat{\hat{f}}, \varphi >=< \hat{f}, \hat{\varphi} >=< f, \hat{\hat{\varphi}} >= 2\pi < f, \varphi(-x) >= 2\,\pi < f(-x), \varphi >$$

ovvero

$$\hat{\hat{f}}(x) = 2\,\pi\,f(-x)\,. \tag{8.17}$$

La trasformata di Fourier gode, anche in tale nuovo contesto, di tutte le proprietà elencate nel teo. 6.2.1. Queste sono una quasi immediata conseguenza delle corrispondenti proprietà valide per funzioni a decrescenza rapida.
Si ha

$$\begin{aligned} < \mathscr{F}[f'], \varphi > &= < f', \hat{\varphi} >= - < f, \hat{\varphi}' >= i < f, \mathscr{F}[x\,\varphi] > \\ &= i < \hat{f}, x\,\varphi >= i < x\,\hat{f}, \varphi > \end{aligned}$$

ovvero

$$\mathscr{F}[f'] = i\,x\,\hat{f}\,. \tag{8.18}$$

Si ha inoltre

$$\begin{aligned} < \hat{f}', \varphi > &= - < \hat{f}, \varphi' >= - < f, \mathscr{F}[\varphi'] >= -i < f, x\,\hat{\varphi} > \\ &= -i < x\,f, \hat{\varphi} >= -i < \mathscr{F}[x\,f], \varphi > \end{aligned}$$

ovvero

$$i\,\hat{f}' = \mathscr{F}[x\,f]\,. \tag{8.19}$$

Esempio 8.4.3. - *Per semplicità indichiamo con f la distribuzione* (8.8) *che si dimostra essere temperata.*
Per la (8.19) *e per quanto osservato negli es.* 8.2.4 *e* 8.4.2 *abbiamo*

$$i\,\hat{f}' = \mathscr{F}[x\,f] = \mathscr{F}[1] = 2\pi\,\delta_0\,. \tag{8.20}$$

Se

$$\operatorname{sgn}(t) = \begin{cases} 1 & se\ t > 0 \\ -1 & se\ t < 0 \end{cases}$$

denota la funzione "signum", si ha

$$H(t) = \frac{1}{2}\,[\operatorname{sgn}(t) + 1] \tag{8.21}$$

e quindi $\operatorname{sgn}'(t) = 2\,\delta_0$. *È allora possibile riscrivere la* (8.20) *nel modo seguente*

$$(i\,\hat{f} - \pi\,\operatorname{sgn}(t))' = 0\,.$$

Per la prop. 8.2.2 *risulta* $i\,\hat{f} = \pi\,\operatorname{sgn}(t) + c$ *con c costante. Poiché f è dispari tale è anche $\hat{f}$: deve essere allora $c = 0$. In definitiva si ha*

$$\hat{f} = -i\,\pi\,\operatorname{sgn}(t)\,. \tag{8.22}$$

Applicando la trasformata di Fourier ad entrambi i membri della (8.22)*, per la* (8.17) *e tenendo conto che f è dispari, abbiamo*

$$\mathscr{F}[\operatorname{sgn}(t)] = \frac{i}{\pi}\,\hat{\hat{f}}(t) = 2\,i\,f(-t) = -2\,i\,f(t)\,.$$

Infine, per la (8.21) *e* (8.16)*, si ha*

$$\hat{H} = -i\,f + \pi\,\delta_0\,.$$

8.5 Distribuzioni periodiche

Definizione 8.5.1. - *La distribuzione*

$$f(x-x_0)\,:\,\varphi\in\mathscr{D}(\mathbb{R})\longrightarrow< f(x),\varphi(x+x_0)>$$

prende il nome di "traslata" di f.

La nozione di funzione periodica di periodo T si estende alle distribuzioni nel modo seguente.

Definizione 8.5.2. - *La distribuzione f è periodica di periodo T se*

$$f(x+T)=f(x)$$

ovvero se

$$< f(x+T),\varphi(x)>=< f(x),\varphi(x-T)>$$

per ogni $\varphi\in\mathscr{D}(\mathbb{R})$.

Sia u tale che $u(t)=0(|t|^{-\alpha})$ con $\alpha>1$.
La funzione

$$u_T(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}u(t-kT)\,,$$

periodica di periodo T, prende il nome di "ripetizione periodica" di u. Va osservato che la serie converge uniformemente su ciascun intervallo di periodicità per l'ipotesi sul comportamento asintotico di u.

Si consideri la restrizione di u_T all'intervallo $[-T/2,T/2]$ e i suoi coefficienti di Fourier (6.6). Si ha

$$\begin{aligned}
c_n &= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}u_T(t)e^{-\frac{i\,2\,n\pi\,t}{T}}\,dt=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}u(t-kT)e^{-\frac{i\,2\,n\pi\,t}{T}}\,dt\\
&= \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\int_{-T/2}^{T/2}u(t-kT)e^{-\frac{i\,2\,n\pi\,t}{T}}\,dt\\
&\qquad\text{(con la sostituzione } t-k\,T=\tau)\\
&= \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\int_{-T/2-kT}^{T/2-kT}u(\tau)e^{-\frac{i\,2\,n\pi\,\tau}{T}}\,d\tau=\frac{1}{T}\int_{-\infty}^{+\infty}u(\tau)e^{-\frac{i\,2\,n\pi\,\tau}{T}}\,d\tau\\
&= \frac{1}{T}\,\hat{u}\left(\frac{2n\pi}{T}\right)\,.
\end{aligned}$$

Se la funzione u è sufficientemente regolare, per esempio di classe $\mathscr{S}(\mathbb{R})$, la funzione u_T è somma della sua serie di Fourier. Abbiamo quindi

$$u_T(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}u(t-nT)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n\,e^{\frac{i\,2\pi\,n\,t}{T}}=\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\hat{u}\left(\frac{2n\pi}{T}\right)\,e^{\frac{i\,2\pi\,n\,t}{T}}$$

da cui, posto $t = 0$ e scambiando n con $-n$,

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} u(nT) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{u}\left(\frac{2n\pi}{T}\right) . \tag{8.23}$$

Passiamo ora a considerare un esempio notevole di distribuzione periodica

$$f = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta_{nT}$$

detta “pettine” di delta di Dirac con passo T o, anche, “treno di impulsi”.
Verifichiamo innanzitutto che essa è una distribuzione temperata.
Se $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ si ha

$$< f, \varphi >= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \varphi(nT)\,;$$

la serie converge vista la rapidità con cui φ tende a zero all'infinito.
Sia $\{\varphi_k\}$ una successione convergente alla funzione nulla in $\mathscr{S}(\mathbb{R})$. Si ha

$$\begin{aligned} < f, \varphi_k > &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(1 + n^2T^2)\varphi_k(nT)}{1 + n^2T^2} \\ &\leq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1 + n^2T^2} \|(1 + x^2)\varphi_k\|_\infty . \end{aligned}$$

Dal momento che

$$\lim_{k\to+\infty} \|(1 + x^2)\varphi_k\|_\infty = 0$$

si ha

$$\lim_{k\to+\infty} < f, \varphi_k >= 0 .$$

Per la (8.23) abbiamo

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \varphi(nT) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{\varphi}\left(\frac{2n\pi}{T}\right) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) e^{-\frac{i\,2\pi\,nt}{T}}\, dt$$

che, mutando n in $-n$, puó essere scritta nel modo seguente

$$< \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta_{nT}, \varphi >=< \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{\frac{i\,2\pi\,nt}{T}}, \varphi >$$

per ogni $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$.
Abbiamo quindi

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta_{nT} = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{\frac{i\,2\pi\,nt}{T}}$$

uguaglianza da intendersi nel senso delle distribuzioni.
Infine, per la (8.15) si ha

$$\mathscr{F}\left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta_{nT}\right] = \frac{2\,\pi}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta_{\frac{2\pi\,n}{T}}\ .$$

In definitiva la trasformata di Fourier di un pettine di delta di Dirac con passo T è un pettine di Dirac con passo $(2\,\pi)/T$.

Appendice A

Il teorema di Riesz

Lemma A.0.1. (Lemma di Riesz) - *Sia V un sottospazio lineare chiuso e proprio di uno spazio di Banach. Allora, comunque si fissi $\varepsilon > 0$ è possibile determinare un elemento u di norma unitaria tale che*

$$\text{dist}(u, V) \geq 1 - \varepsilon \,. \tag{A.1}$$

Dimostrazione. Il fatto che V sia chiuso e che sia un sottoinsieme proprio consente di scegliere un elemento $u_0 \notin V$ tale che $d = \text{dist}(u_0, V) > 0$. Essendo

$$d = \inf_{v \in V} \|u_0 - v\| \,,$$

per le proprietà dell'estremo inferiore esiste un elemento $v_0 \in V$ tale che

$$d \leq \|u_0 - v_0\| < \frac{d}{1 - \varepsilon} \,. \tag{A.2}$$

Allora il vettore di norma unitaria

$$u = \frac{u_0 - v_0}{\|u_0 - v_0\|}$$

verifica la (A.1). Infatti se v è il generico elemento di V si ha

$$\|u - v\| = \frac{\|u_0 - (v_0 + v\|u_0 - v_0\|)\|}{\|u_0 - v_0\|} \,.$$

Poiché $(v_0 + v\|u_0 - v_0\|) \in V$ si ha, per le (A.2),

$$\|u - v\| \geq \frac{d}{d(1 - \varepsilon)^{-1}} = 1 - \varepsilon \,,$$

da cui, essendo v arbitrariamente scelto in V, la (A.1). □

Siamo ora in grado di dimostrare il seguente risultato.

Teorema A.0.1. (Teorema di Riesz) - *Se la sfera unitaria di uno spazio di Banach è compatta allora lo spazio ha dimensione finita.*

Dimostrazione. Procediamo per assurdo. Esiste allora una successione di sottospazi vettoriali il cui $n-$mo termine V_n ha dimensione n ed è quindi chiuso; sia inoltre $V_n \subset V_{n+1}$. È possibile allora, per il Lemma di Riesz, costruire una successione di vettori $\{v_n\}$ di norma unitaria, con $v_n \in V_n$ e

$$\mathrm{dist}(v_n, V_{n-1}) \geq \tfrac{1}{2}\,.$$

Sia $n > m$; si ha allora $\|v_n - v_m\| > \frac{1}{2}$. Dalla successione $\{v_n\}$ non è possibile quindi estrarre alcuna sottosuccessione convergente. $\square$

Appendice B

Il teorema di Ascoli-Arzelà

Consideriamo una successione di punti

$$y_1, y_2, \cdots, y_n, \cdots \tag{B.1}$$

densa in $[a, b]$. Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni di E. Tale successione è limitata: quindi è limitata la successione numerica $\{f_n(y_1)\}$; da essa estraiamo una sottosuccessione convergente che denotiamo nel modo seguente

$$f_{11}(y_1), f_{12}(y_1), \cdots, f_{1n}(y_1), \cdots .$$

Consideriamo ora la successione numerica $\{f_{1n}(y_2)\}$; in quanto limitata da essa è possibile estrarre una sottosuccessione convergente

$$f_{21}(y_2), f_{22}(y_2), \cdots, f_{2n}(y_2), \cdots .$$

Con tale procedura si ottiene la seguente tabella ad infinite righe e colonne

$$\begin{array}{cccc} f_{11} & f_{12} & f_{13} & \cdots \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & \cdots \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{array} \tag{B.2}$$

con le seguenti caratteristiche:

a) ogni riga rappresenta una successione estratta da ciascuna delle successioni contenute nelle righe precedenti nonché dalla successione $\{f_n\}$;

b) la successione che occupa la riga $k-$ma converge in y_k e quindi, per quanto detto al punto a), in ogni y_h con $h < k$.

Consideriamo la successione diagonale, cioè la successione il cui termine $n-$mo è $g_n = f_{nn}$.
Tale successione converge in ogni punto y_k in quanto essa, a parte un numero finito di termini, è estratta da tutte le successioni che costituiscono le righe della tabella (B.2).
Sfruttando l'equicontinuità è ora possibile dimostrare che la successione $\{g_n\}$ converge in ogni punto dell'intervallo $[a, b]$ e che tale convergenza è uniforme. Fissato $\varepsilon > 0$ si determini δ secondo quanto indicato nella def. 3.3.3. Suddividiamo l'intervallo $[a, b]$ in m intervalli tutti di ampiezza inferiore a δ e scegliamo in ciascuno di tali intervalli un punto della successione (B.1); denotiamo tali punti con i simboli

$$z_1, z_2, \cdots, z_m \,.$$

Fissato un punto x supponiamo che esso appartenga all'intervallo cui appartiene il punto z_i. Si ha allora

$$|g_k(x) - g_h(x)| \leq |g_k(x) - g_k(z_i)| + |g_k(z_i) - g_h(z_i)| + |g_h(z_i) - g_h(x)| < 3\varepsilon$$

vuoi per la condizione di equicontinuità (3.34) vuoi per la convergenza della successione numerica $\{g_k(z_i)\}$. È evidente che la stima vale per h, k maggiori di un opportuno indice ν, lo stesso indice ν a partire dal quale risulta, per la convergenza di $\{g_k(z_i)\}$,

$$|g_k(z_i) - g_h(z_i)| < \varepsilon \,.$$

Va sottolineato il fatto che le successioni numeriche $\{g_k(z_i)\}$ sono in numero finito. Ció è essenziale per poter concludere che la stima sopra ottenuta è uniforme al variare di x.
Abbiamo in tal modo dimostrato che E è compatto in quanto da ogni sua successione abbiamo estratto una successione che converge uniformemente.
Osserviamo che è anche possibile invertire tale proposizione; si puó infatti dimostrare che se E è compatto allora necessariamente E deve essere un insieme chiuso, limitato e con la proprietà che le funzioni che ad esso appartengono sono equicontinue.

Appendice C

Il teorema di approssimazione di Weierstrass

Riportiamo la dimostrazione del seguente risultato di approssimazione di Weierstrass dovuta al matematico ucraino S. Bernstein.

Teorema C.0.1. - *Data* $f \in C^0([a,b])$, *per ogni* $\varepsilon > 0$ *esiste un polinomio* p *tale che*

$$\|f - p\|_{C^0} < \varepsilon\,.$$

Dimostrazione. Supponiamo che l'intervallo di definizione sia l'intervallo $[0,1]$ e consideriamo i cosiddetti polinomi di Bernstein

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}\,.$$

Derivando rispetto a x la classica formula del binomio di Newton

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \tag{C.1}$$

e moltiplicando per x si ha

$$nx(x+y)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} x^k y^{n-k}\,. \tag{C.2}$$

Differenziando due volte la (C.1) rispetto a x e moltiplicando per x^2 si ottiene

$$n(n-1)x^2(x+y)^{n-2} = \sum_{k=0}^{n} k(k-1) \binom{n}{k} x^k y^{n-k}\,. \tag{C.3}$$

Ponendo $y = 1 - x$ nelle (C.1), (C.2) e (C.3) si ha rispettivamente

$$1 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

$$nx = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

$$n(n-1)x^2 = \sum_{k=0}^{n} k(k-1) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} .$$

Si ha pertanto

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{n} (k-nx)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\ = \quad & \sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} - 2n \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\ + \quad & n^2 x^2 \textstyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = [nx + n(n-1)x^2] - 2n^2x^2 + n^2x^2 \end{aligned}$$

da cui

$$\sum_{k=0}^{n} (k-nx)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = nx(1-x) . \tag{C.4}$$

Per l'uniforme continuità di f, fissato $\varepsilon > 0$, si puó determinare un $\delta > 0$ tale che

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon \qquad \forall x, y \in [0,1] ; \tag{C.5}$$

sia inoltre M tale che

$$|f(x)| \leq M , \qquad \forall x \in [0,1] . \tag{C.6}$$

Si ha allora

$$\begin{aligned} |f(x) - p_n(x)| \quad &= \left| \sum_{k=0}^{n} \left(f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \right| \\ &\leq \left| \sum_{|k-nx|<\delta n} \left(f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \right| \\ &+ \left| \sum_{|k-nx|\geq\delta n} \left(f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \right| . \end{aligned}$$

Se $|k - nx| < n\delta$ si ha anche $|x - k/n| < \delta$ e quindi, per la (C.5),

$$\left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| < \varepsilon\,;$$

pertanto risulta

$$\begin{aligned}
&\left| \sum_{|k-nx|<\delta n} \left(f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \right| \\
\leq\ & \sum_{|k-nx|<\delta n} \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\
<\ & \varepsilon \left(\sum_{|k-nx|<\delta n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \right) \\
\leq\ & \varepsilon \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \right) = \varepsilon\,.
\end{aligned}$$

Se invece $|k - nx| \geq n\delta$ si ha

$$\begin{aligned}
&\left| \sum_{|k-nx|\geq\delta n} \left(f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \right| \\
&\text{(per la (C.6))} \\
&\leq 2M \left(\sum_{|k-nx|\geq\delta n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \right) \\
&\left(\text{essendo } \frac{|k - n\,x|}{n\delta} \geq 1\right) \\
&\leq \frac{2M}{n^2\delta^2} \left(\sum_{k=0}^{n} (k-nx)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \right) \\
&\text{(per la (C.4))} \\
&= \frac{2M}{n^2\delta^2}\, nx(1-x)\,.
\end{aligned}$$

Poiché $x(1-x) \leq 1/4$ in definitiva si ha

$$|f(x) - p_n(x)| \leq \varepsilon + \frac{M}{2n\delta^2}\,.$$

Se allora si sceglie n in modo tale che risulti

$$n > \frac{M}{2n\delta^2}$$

si ha

$$|f(x) - p_n(x)| < 2\varepsilon$$

da cui l'asserto. $\square$

Appendice D

Partizione dell'unità

Negli spazi metrici completi la nozione di compattezza puó essere formulata in due modi diversi tra loro equivalenti. Infatti alla tradizionale definizione di compattezza per successioni si puó affiancare quella per ricoprimenti.
Premettiamo la seguente definizione.

Definizione D.0.1. - *Una famiglia di aperti* $\{A_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ *di uno spazio metrico* X *è un ricoprimento se*

$$X = \bigcup_{i\in\mathcal{I}} A_i \,.$$

La famiglia $\{A_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ *con* $\mathcal{J}\subset\mathcal{I}$ *è un sottoricoprimento di* $\{A_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ *se*

$$X = \bigcup_{j\in\mathcal{J}} A_j \,.$$

Vale il seguente risultato (cfr. [5]).

Teorema D.0.1. - *Uno spazio metrico* X *completo è compatto per successioni se e solo se ogni suo ricoprimento ha un sottoricoprimento finito.*

Dimostrazione. Sia X compatto. Facciamo vedere che, comunque si fissi ε, è possibile ricoprire X con un numero finito di sfere di raggio ε.
Ragioniamo per assurdo. Fissato x_1 sia S_1 la sfera di centro x_1 e raggio ε. Esiste certamente un punto $x_2 \in X\backslash S_1$, altrimenti S_1 ricoprirebbe X. Per induzione si genera una successione di sfere $\{S_n\}$, di raggio ε tali che, se x_n è il centro di S_n,

$$x_{n+1} \notin \bigcup_{k=1}^{n} S_k \,. \tag{D.1}$$

Poiché X è compatto la successione $\{x_n\}$ ha un punto di accumulazione x. Denotata con S la sfera di centro x e raggio $\varepsilon/2$, siano h,k, due indici tali che sia $x_h, x_k \in S$. Se $h<k$ abbiamo $x_k \in S_h$ in quanto la distanza tra x_h e x_k è

minore di ε; ció è in contrasto con la (D.1). Quindi è possibile ricoprire X con un numero finito di sfere di raggio prefissato.
Fissato un intero n, consideriamo un ricoprimento finito di X costituito da sfere di raggio $1/n$. Se dal ricoprimento $\{A_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ non fosse possibile estrarne uno finito allora almeno una di tali sfere non è ricoperta da un numero finito di elementi della famiglia $\{A_i\}_{i\in\mathcal{I}}$. Denotiamo con S_n una tale sfera e scegliamo in essa un punto x_n. La successione $\{x_n\}$ in tal modo ottenuta ha un punto di accumulazione x che appartiene ad un aperto A_i del ricoprimento. Scegliamo r in modo tale che la sfera S di centro x e raggio r sia contenuta in A_i; sia n tale che la distanza tra x_n e x sia minore di $r/2$ e $1/n < r/2$. Risulta allora $S_n \subset A_i$ contro la condizione che S_n non è ricopribile con un numero finito di elementi di $\{A_i\}_{i\in\mathcal{I}}$.

Supponiamo che ora che da ogni ricoprimento di aperti di X se ne possa estrarre uno finito. Se X non fosse compatto esisterebbe una successione di punti, con sostegno infinito, priva di punti di accumulazione. Allora per ogni x esisterebbe un intorno sferico S_x di x contenente solo un numero finito di elementi della successione. La famiglia $\{S_x\}_{x\in X}$ è un ricoprimento di aperti di X. Da essa ne ne puó estrarre uno finito; ma questo comporta che il sostegno della successione è finito. Si è giunti ad un assurdo. □

Sia f una funzione continua definita in $\mathbb{R}^N$. La chiusura dell'aperto

$$\{x \,:\, f(x) \neq 0\}$$

prende il nome di supporto do f.

Proposizione D.0.1. (Partizione dell'unità) - *Sia K un compatto di $\mathbb{R}^N$ e sia*

$$\mathcal{B} = \{B_1, \cdots, B_n\} \tag{D.2}$$

un ricoprimento di K costituito da sfere di raggio $r > 0$; sia inoltre $\bar{x}_i$ il centro di B_i. Esistono n funzioni φ_i di classe C^1 tali che il supporto di φ_i è contenuto nella sfera di centro $\bar{x}_i$ e raggio $2r$ e

$$\sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x) = 1\,, \quad x \in K\,. \tag{D.3}$$

Dimostrazione. Introduciamo la seguente funzione di classe C^1 il cui supporto è l'intervallo $[-2, 2]$

$$h(s) = \begin{cases} 1 & \text{se } |s| \leq 1 \\[2ex] \dfrac{(s^2-4)^2(2s^2+1)}{27} & \text{se } 1 < |s| \leq 2 \\[2ex] 0 & \text{se } 2 < |s|\,. \end{cases}$$

Sia

$$g_i(x) = h\left(\frac{\|x - \bar{x}_i\|}{r}\right)$$

dove $\|\cdot\|$ denota la norma euclidea di $\mathbb{R}^N$. Il supporto di g_i è la sfera di centro $\bar{x}_i$ e raggio $2r$. Poniamo

$$\varphi_1 = g_1\,, \quad \varphi_2 = g_2(1 - g_1)\,, \cdots\,, \quad \varphi_n = g_n \prod_{i=1}^{n-1}(1 - g_i)\,.$$

Ovviamente il supporto di φ_n è contenuto nella sfera di centro $\bar{x}_i$ e raggio $2r$. Dimostriamo che

$$\sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x) = 1 - \prod_{i=1}^{n}(1 - g_i(x))\,. \tag{D.4}$$

Se $2 \leq k \leq n$ si ha

$$\varphi_k = \prod_{i=1}^{k-1}(1 - g_i(x)) - \prod_{i=1}^{k}(1 - g_i(x))$$

e quindi

$$\begin{aligned}
\varphi_i &= g_1 \\
\varphi_2 &= (1 - g_1) - \prod_{i=1}^{2}(1 - g_i(x)) \\
\ldots & \\
\varphi_n &= \prod_{i=1}^{n-1}(1 - g_i(x)) - \prod_{i=1}^{n}(1 - g_i(x))\,.
\end{aligned}$$

Sommando tutti i termini si ottiene la (D.4).
Dalla (D.4) si ottiene la (D.3). Infatti un generico elemento x di K appartiene ad almeno una delle sfere B_i del ricoprimento (D.2) e quindi $g_i(x) = 1$.
Concludiamo osservando che solo per semplicità abbiamo supposto che le sfere del ricoprimento (D.2) abbiano tutte lo stesso raggio. $\square$

Appendice E

Il teorema della divergenza

Sia Ω un dominio regolare di $\mathbb{R}^N$

$$\mathbf{u} = (X_1, \cdots, X_N) \tag{E.1}$$

un campo vettoriale a componenti di classe $C^0(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega)$.
La funzione

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial X_i}{\partial x_i} \tag{E.2}$$

è nota come divergenza del campo.

Proposizione E.0.1. - *La divergenza è invariante per trasformazioni ortogonali.*

Dimostrazione. Procediamo con un cambio di variabili mediante una trasformazione

$$x \longrightarrow y = \mathbf{A}\, x$$

con $\mathbf{A} = (a_{ij})$ matrice ortogonale.
Ricordiamo che l'ortogonalità di $\mathbf{A}$ comporta che

$$\sum_{i=1}^{N} a_{ij} a_{ih} = \delta_{jh} = \begin{cases} 1 & \text{se } j = h \\ 0 & \text{se } j \neq h \end{cases} \tag{E.3}$$

dove δ_{jh} è il simbolo di Kronecher (3.30).
A seguito di tale trasformazione $\mathbf{u}$ si muta in un campo $\mathbf{v}$ le cui componenti sono

$$Y_i = \sum_{k=1}^{N} a_{ik}\, X_k\, .$$

Poiché $x = {}^t\mathbf{A}\, y$, ovvero $x_j = \sum_{h=1}^N a_{hj} y_h$ si ha

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{v} &= \sum_{i=1}^N \frac{\partial Y_i}{\partial y_i} = \sum_{i,k=1}^N a_{ik} \left(\sum_{j=1}^N a_{ij} \frac{\partial X_k}{\partial x_j} \right) = \sum_{j,k=1}^N \left(\sum_{i=1}^N a_{ij} a_{ik} \right) \frac{\partial X_k}{\partial x_j} \\ & \quad \text{(per la (E.3))} \\ &= \sum_{j,k=1}^N \delta_{jk} \frac{\partial X_k}{\partial x_j} = \sum_{j=1}^N \frac{\partial X_j}{\partial x_j} = \operatorname{div} \mathbf{u} \end{aligned}$$

cioè l'asserto. □

Vogliamo qui proporre una dimostrazione del seguente risultato (teorema della divergenza)

$$\int_\Omega \operatorname{div} \mathbf{u}\, dx = \int_{\partial\Omega} < \mathbf{u}, \boldsymbol{\nu} > \, d\sigma\,; \tag{E.4}$$

$\boldsymbol{\nu} = (\nu_i)$ come al solito denota il versore normale esterno alla frontiera di Ω. Seguiamo lo schema proposto in [2]; esso prevede vari risultati intermedi.

Lemma E.0.1. - *Se i supporti delle componenti X_i di $\mathbf{u}$ sono contenuti in una sfera aperta $B \subset A$ allora*

$$\int_A \operatorname{div} \mathbf{u}\, dx = 0\,. \tag{E.5}$$

Dimostrazione. Prolunghiamo le funzioni X_i su tutto $\mathbb{R}^N$ ponendole uguali a zero al di fuori di B; si ottengono in tal modo N funzioni di classe $C^1(\mathbb{R}^N)$. Per il teorema fondamentale del calcolo integrale si ha allora

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial X_i}{\partial x_i}\, dx_i = 0\,. \tag{E.6}$$

Indichiamo con $\hat{x}_i$ l'elemento di $\mathbb{R}^{N-1}$ che si ottiene cancellando la i-ma componente di x. Per una nota formula di riduzione e per la (E.6) abbiamo

$$\int_A \frac{\partial X_i}{\partial x_i}\, dx = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\partial X_i}{\partial x_i}\, dx \int_{\mathbb{R}^{N-1}} d\hat{x}_i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial X_i}{\partial x_i}\, dx_i = 0$$

e quindi la (E.5). □

Consideriamo il cilindroide

$$C_i = \begin{cases} \hat{x}_i \in T_i \\ 0 \le x_i \le \varphi(\hat{x}_i) \end{cases} \tag{E.7}$$

con T_i dominio regolare dell'iperpiano $x_i = 0$ e φ funzione non negativa di classe $C^1(T)$. Indichiamo con Σ la superficie rappresentata dal grafico di φ.

Lemma E.0.2. - *Se X_i, definita in C_i, si annulla per $x_i = 0$ si ha*

$$\int_{C_i} \frac{\partial X_i}{\partial x_i}\, dx = \int_\Sigma X_i \nu_i \, d\sigma$$

dove ν_i è la i-ma componente del versore normale esterno $\boldsymbol{\nu}$.

Dimostrazione. Per semplicità di esposizione sia $i = N$. Indichiamo con C il cilindroide (E.7) e con T il dominio in cui φ è definita.
Per una nota formula di riduzione si ha

$$\int_C \frac{\partial X_N}{\partial x_N}\, dx = \int_T d\hat{x}_N \int_0^{\varphi(\hat{x}_N)} \frac{\partial X_N}{\partial x_N}\, dx_N \, .$$

D'altra parte, poiché per ipotesi $X_N(\hat{x}_N, 0) = 0$, si ha

$$\int_0^{\varphi(\hat{x}_N)} \frac{\partial X_N}{\partial x_N}\, dx_N = X_N(\hat{x}_N, \varphi(\hat{x}_N))\, .$$

Abbiamo quindi

$$\int_C \frac{\partial X_N}{\partial x_N}\, dx = \int_T X_N(\hat{x}_N, \varphi(\hat{x}_N))\, d\hat{x}_N \, .$$

Poiché

$$\nu_N = \frac{1}{\sqrt{1 + \|\nabla\varphi\|^2}}$$

dove

$$\|\nabla\varphi\|^2 = \sum_{i=1}^{N-1} \varphi_{x_i}^2 \, ,$$

si ha

$$\int_T X_N(\hat{x}_N, \varphi(\hat{x}_N)\, d\hat{x}_N = \int_\Sigma X_N \, \nu_N \, d\sigma \, .$$

Abbiamo pertanto l'asserto. $\square$

Lemma E.0.3. - *Sia $\bar{x}$ un punto appartenente alla chiusura di Ω. Esiste un intorno sferico U di $\bar{x}$ tale che*

(E.8) $$\int_\Omega \operatorname{div} \mathbf{u}\, d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} < \mathbf{u}, \boldsymbol{\nu} > \, d\sigma$$

per ogni campo vettoriale **u** *nullo al di fuori di U.*

Dimostrazione. Se $\bar{x}$ è un punto interno a Ω sia U un qualsiasi intorno sferico di $\bar{x}$ contenuto in Ω: basta allora applicare il lemma E.0.1.
Consideriamo ora il caso $\bar{x} \in \partial\Omega$. Ricorrendo eventualmente ad una traslazione ed una rotazione si puó fare in modo che sia positiva ogni componente di $\bar{x}$ e del vettore $\nabla\Psi(\bar{x})$, normale alla frontiera.Ovviamente tale cambio di variabili non

ha effetti sui valori assunti dai due integrali in (E.8) in quanto sia la divergenza (cfr. proposizione E.0.1) sia il prodotto scalare sono invarianti.
Facciamo vedere che esiste un intorno U_N di $\bar{x}$ tale che

$$\int_\Omega \frac{\partial X_N}{\partial x_N}\, dx = \int_{\partial\Omega} X_N \nu_N \, d\sigma \tag{E.9}$$

con X_N a supporto compatto contenuto in U_N.
Essendo $\Psi_{x_N}(\bar{x}) > 0$, per il teorema di Dini sulle funzioni implicite è possibile determinare un intorno sferico di $\bar{x}$ tale che la porzione della frontierain esso contenuta si rappresenti come grafico di una funzione positiva φ di $\hat{x}_N$ e che la parte sottostante tale grafico sia contenuta in Ω. Possiamo cioè fare in modo che l'intersezione di tale intorno con Ω sia contenuta nel cilindroide (E.7) relativo a φ. Si puó allora applicare il lemma E.0.2 per ottenere la (E.9).
Se al posto della variabile x_N si considera un'altra variabile x_i si ragiona allo stesso modo; si ottiene quindi un intorno U_i di $\bar{x}$ tale che

$$\int_\Omega \frac{\partial X_i}{\partial x_i}\, dx = \int_{\partial\Omega} X_i \nu_i \, d\sigma$$

se X_i ha supporto contenuto in U_i.
Se U è l'intersezione degli intorni sferici U_i si ottiene la (E.8) a patto che il campo vettoriale sia a supporto compatto contenuto in U. □

Siamo ora in grado di dimostrare la (E.4).

Dimostrazione. Ricopriamo la chiusura di Ω con un numero finito

$$\{U_1, \cdots, U_n\}$$

di sfere; si puó fare in modo che esse siano interne a Ω oppure che i loro centri siano punti di $\partial\Omega$.
Sia $\{\varphi_j\}$ una partizione dell'unità relativa a tale ricoprimento (cfr. proposizione D.0.1 dell'Appendice A). È possibile applicare a $\varphi_j \mathbf{u}$, a seconda dei casi, o il lemma E.0.1 o il lemma E.0.2. Si ha pertanto

$$\int_{\partial\Omega} < \varphi_j \mathbf{u}, \boldsymbol{\nu} > \, d\sigma = \int_\Omega \operatorname{div}(\varphi_j \mathbf{u})\, dx\,.$$

D'altra parte

$$\begin{aligned}\int_\Omega \operatorname{div}(\varphi_j \mathbf{u})\, dx &= \sum_{i=1}^N \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\varphi_j\, X_i\right)\, dx \\ &= \int_\Omega \varphi_j \operatorname{div} \mathbf{u}\, dx + \sum_{i=1}^N \int_\Omega X_i \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\, dx\,.\end{aligned}$$

Poiché $\sum_j \varphi_j \equiv 1$ sulla chiusura di Ω abbiamo

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Omega} < \mathbf{u}, \boldsymbol{\nu} > \, d\sigma &= \sum_{j=1}^{n} \int_{\partial\Omega} < \varphi_j \mathbf{u}, \boldsymbol{\nu} > \, d\sigma \\ &= \int_{\Omega} \left(\sum_{j=1}^{n} \varphi_j \right) \operatorname{div} \mathbf{u} \, dx + \sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega} X_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_{j=1}^{n} \varphi_j \right) \, dx \\ &= \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{u} \, dx\end{aligned}$$

cioè l'asserto. □

Concludiamo riportando il seguente risultato equivalente al teorema della divergenza.

Teorema E.0.1. - *Sia u una funzione di classe $C^0(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega)$ con Ω dominio regolare; allora*

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \, dx = \int_{\partial\Omega} u \, \nu_i \, d\sigma \, . \tag{E.10}$$

Le (E.10) sono anche note come formule di Gauss-Green.

Bibliografia

[1] Barozzi G.C., Matematica per l'Ingegneria dell'Informazione, Zanichelli

[2] Fleming W., Functions of Several Variables, Springer-Verlag

[3] Giaquinta M. - Modica G., Note di metodi matematici per ingegneria informatica, Pitagora

[4] Gilbarg D. - Trudinger N.S., Elliptic Partial Differential Equations of Second Order, Springer-Verlag

[5] Giusti E., Analisi Matematica 2, Boringhieri

[6] Greco D., Complementi di Analisi, Liguori Editore

[7] Rudin W., Analisi reale e complessa, Boringhieri

[8] Stein E.M. - Shakarchi R., Complex Analysis, Princeton University Press