

Definizione di applicazione (o funzione) fra insiemi

Intuitivamente si ha una funzione quando si riesce a stabilire un legame tra due insiemi diversi in modo che ad elementi del primo insieme corrispondano elementi del secondo insieme.

La definizione matematica e'

Dati due insiemi non vuoti **A** e **B** si chiama **applicazione univoca** (o **funzione**) di **A** in **B** una qualsiasi legge che faccia corrispondere ad ogni elemento di **A** uno ed un solo elemento di **B**

chiamando **f** l'applicazione si scrive

$$\mathbf{f : A \rightarrow B}$$

Si legge **f** e' applicazione da **A** a **B**

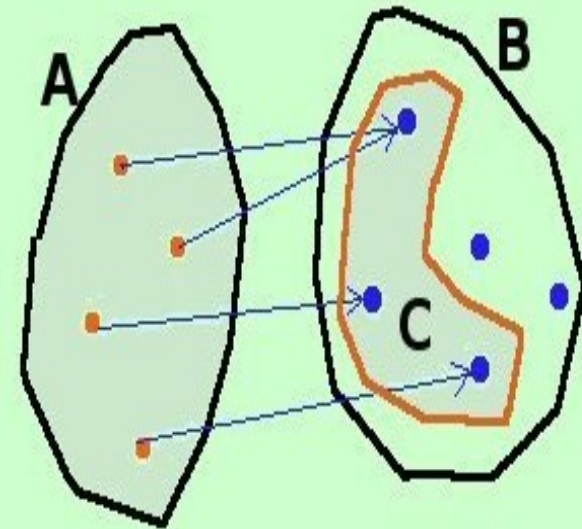
Codominio

Siccome nella definizione di funzione esauriamo l'insieme A ma non e' detto che esauriamo l'insieme B diventa importante definire quanta parte dell'insieme B entri a far parte dell'applicazione

In figura vedi che l'insieme A viene trasformato dall'applicazione nel sottoinsieme C di B

Allora chiameremo C:

- **Codominio**
- **Immagine di A mediante l'applicazione**
- **Trasformato di A**



In generale avremo la *definizione*

Dati due insiemi non vuoti **A** e **B** e l'applicazione

$f: A \rightarrow B$

si chiama **codominio dell'applicazione** l'insieme degli elementi di **B** che provengono da elementi di **A** tramite l'applicazione

Dominio

Ora per analogia consideriamo l'insieme dei valori che l'applicazione puo' assumere sull'insieme A (in pratica consideriamo l'insieme A) questo verra' definito:

- **Dominio dell'applicazione**
- **Antiimmagine**
- **Insieme di esistenza**
- **Insieme di definizione**

In generale avremo la *definizione*

Dati due insiemi non vuoti **A** e **B** e l'applicazione

f : **A** --> **B**

si chiama **dominio dell'applicazione** l'insieme degli elementi di **A** su cui agisce l'applicazione

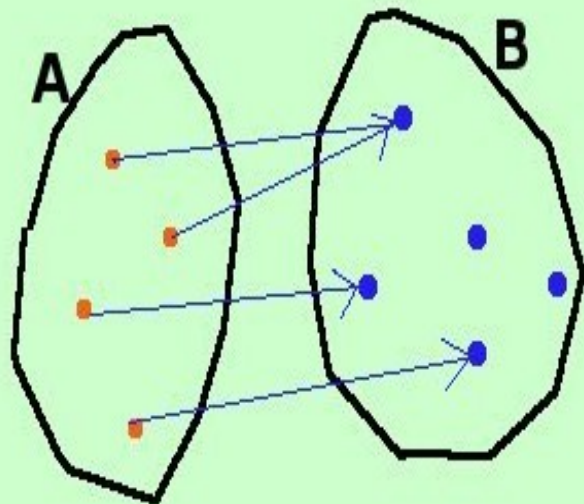
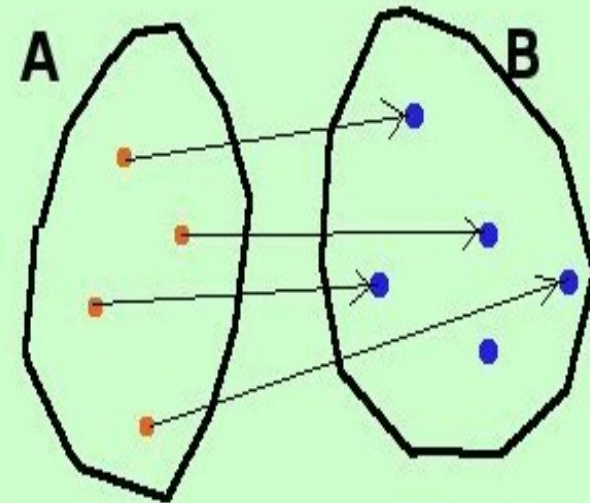
Applicazione iniettiva

Diremo che un'applicazione

$$f: A \rightarrow B$$

è iniettiva se ad ogni elemento di **A** corrisponde un elemento diverso di **B**

esempio di applicazione **iniettiva**: ogni elemento di **A** è in corrispondenza con un diverso elemento di **B**



Esempio di applicazione **non iniettiva**: esistono due elementi di **A** a cui corrisponde lo stesso elemento di **B**

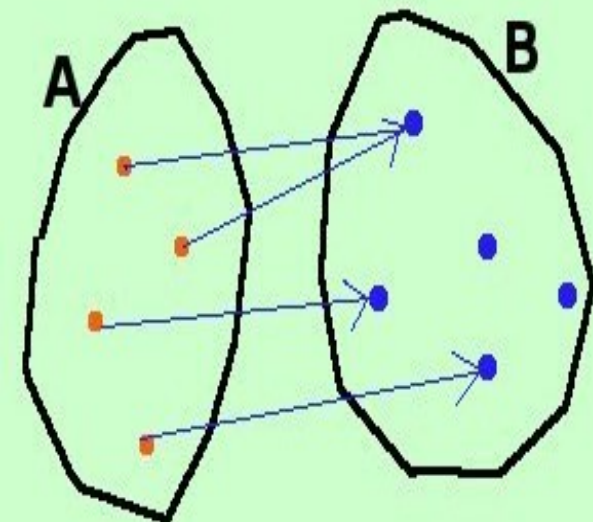
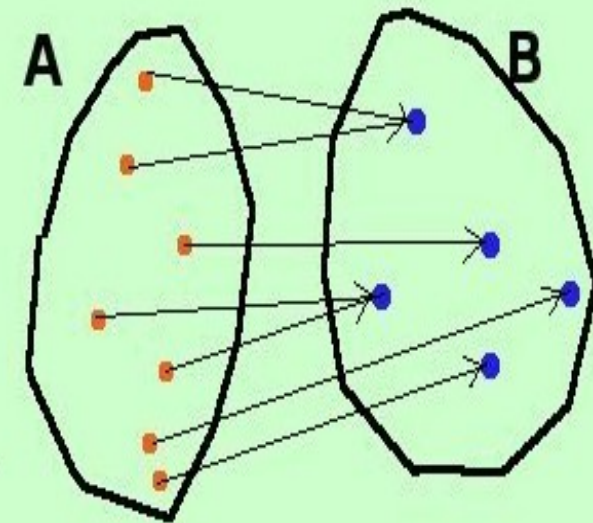
Applicazione suriettiva

Diremo che un'applicazione

$$f: A \rightarrow B$$

è suriettiva se esaurisce l'insieme B

Esempio di applicazione **suriettiva**: ogni elemento di B è collegato con almeno un elemento di A



Esempio di applicazione **non suriettiva**: esistono elementi di B non collegati ad elementi di A

Corrispondenza biunivoca

Diremo che un'applicazione

$$f: A \rightarrow B$$

è una **corrispondenza biunivoca** (od un **applicazione biiettiva**) se è contemporaneamente

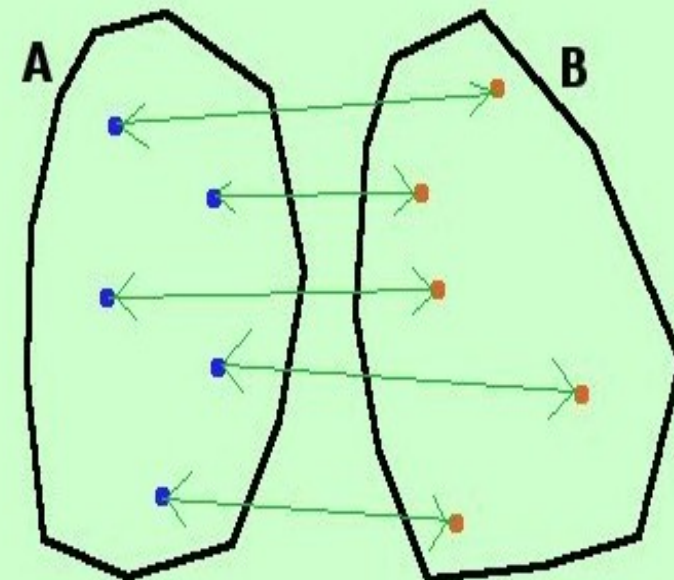
- **Iniettiva**
- **Suriettiva**

$$f: A \xrightarrow[1-1]{su} B$$

Cioè ad ogni elemento di A corrisponde un elemento di B e viene esaurito l'insieme B

In pratica significa che ad ogni elemento di A corrisponde un solo elemento di B e ad ogni elemento di B corrisponde un solo elemento di A, cioè la relazione è iniettiva sia da A a B che a rovescio da B ad A (si dice **biiettiva**)

esempio di **corrispondenza biunivoca**: ogni elemento di A è collegato con un solo elemento di B e l'insieme B viene esaurito (od anche ogni elemento di B è collegato con un solo elemento di A)



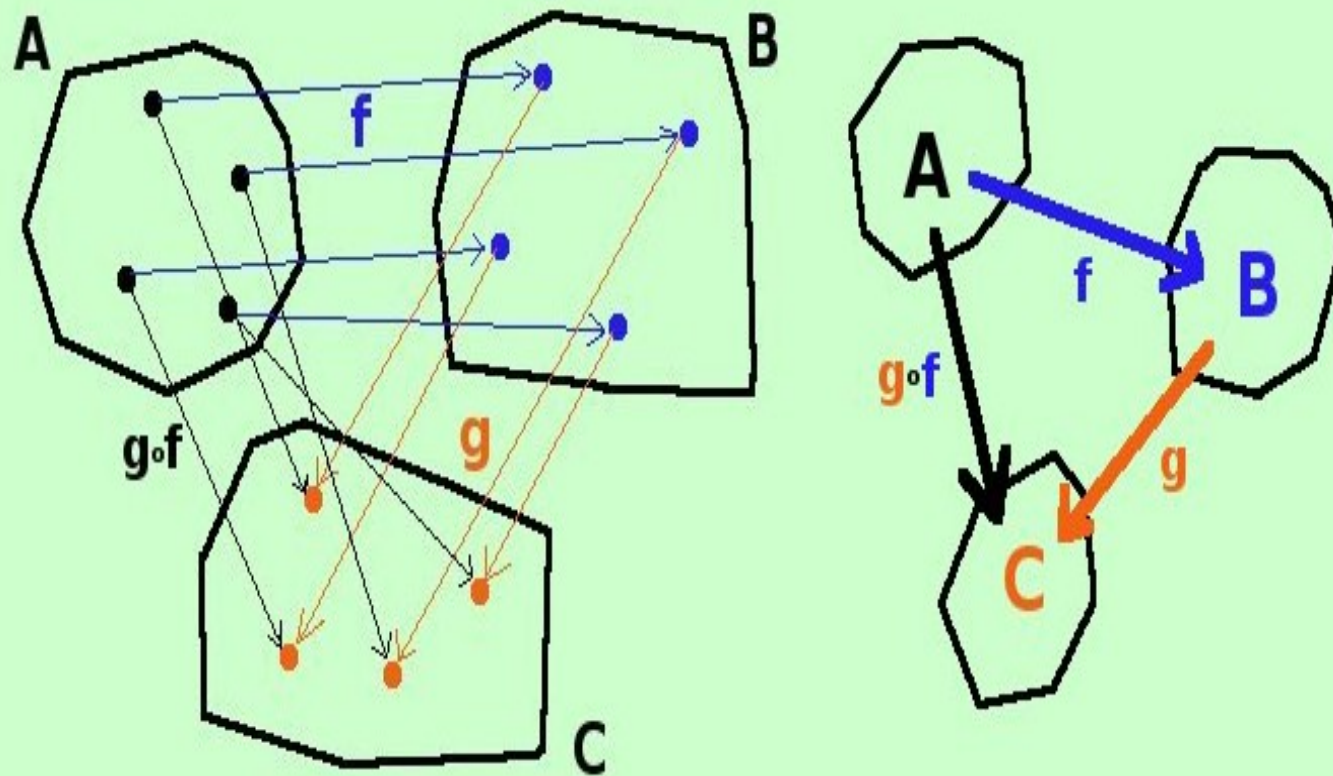
Applicazione composta

Consideriamo un'applicazione f da A a B e poi un'altra applicazione g da B a C ; allora se considero un'applicazione da A a C equivalente alle due applicazioni considerate (nel senso che fa corrispondere gli stessi elementi), essa sarà la loro composizione

L'applicazione composta si indica con il simbolo

$g \circ f$ oppure $g(f)$

prima va la g e poi la f perché l'applicazione g agisce sui termini del codominio dell'applicazione f



Applicazione inversa

Quando considero un'applicazione da A a B trasformando gli elementi di A in elementi di B viene spontaneo cercare se e' possibile trovare l'applicazione inversa che va da B ad A e ritrasforma gli elementi di B negli elementi di A di partenza

Data l'applicazione

$$f: A \rightarrow B$$

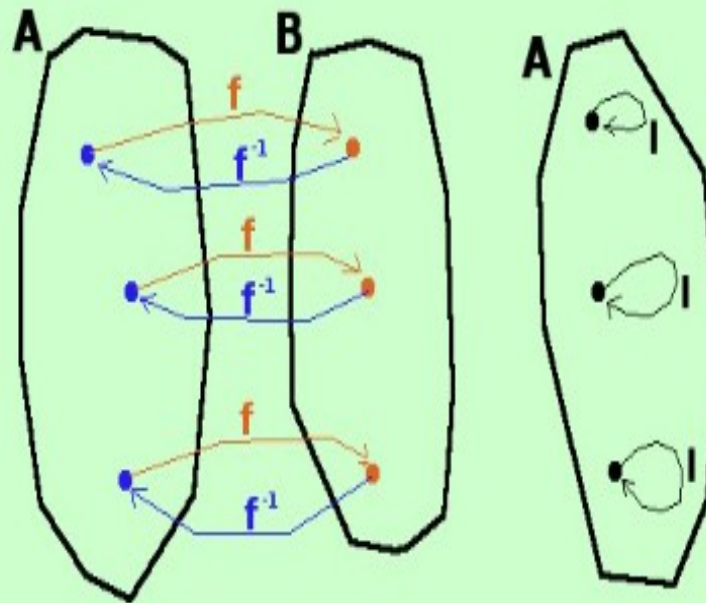
chiameremo applicazione inversa, se esiste, l'applicazione

$$f^{-1}: B \rightarrow A$$

tale che

$$f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = I$$

Essendo I l'applicazione identica che applica un insieme su se' stesso lasciando ogni elemento invariato



A destra l'applicazione identica (risultato della composizione delle due applicazioni f ed f^{-1}) che trasforma ogni elemento in se' stesso

Condizione perche' un'applicazione sia invertibile e' che sia biunivoca (o, se preferisci, biiettiva)

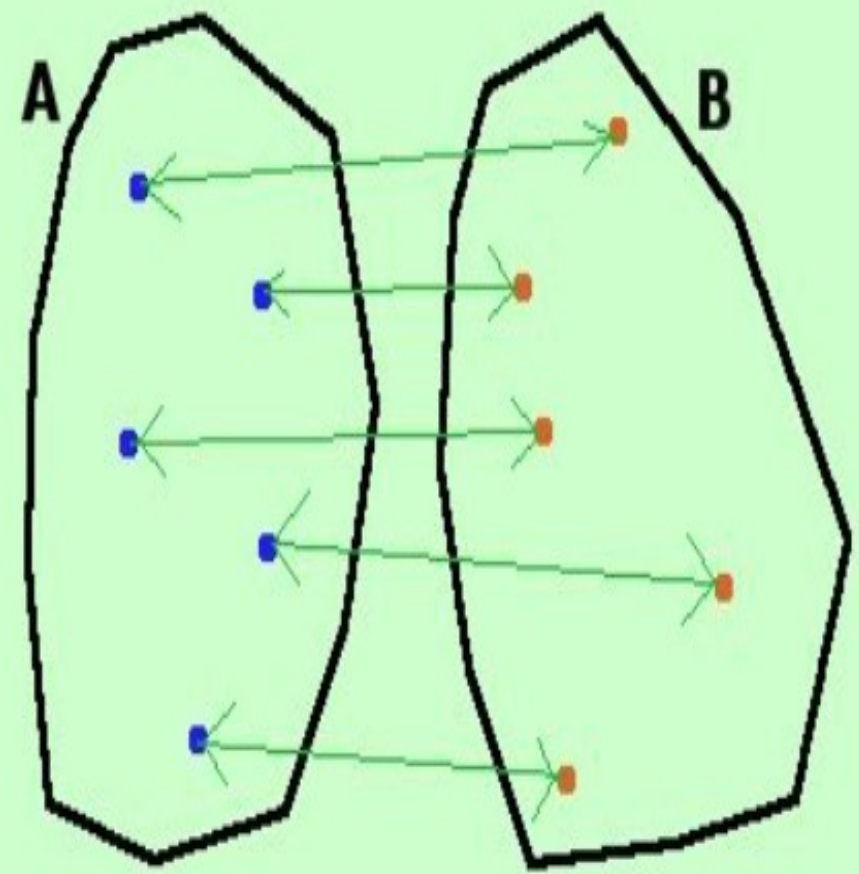
Generazione dell'insieme \mathbb{N}

Utilizzando la relazione di equivalenza e' possibile generare logicamente, mediante gli insiemi, l'insieme \mathbb{N} dei Numeri Naturali :

Per poterlo mostrare ti anticipo la nozione di corrispondenza biunivoca fra due insiemi

Una corrispondenza biunivoca fra due insiemi si ha quando ad ogni elemento del primo insieme corrisponde uno ed un solo elemento del secondo insieme e viceversa

Considero l'insieme di tutti gli insiemi e considero la relazione "e' in corrispondenza biunivoca"
la relazione e' di equivalenza: infatti e' contemporaneamente

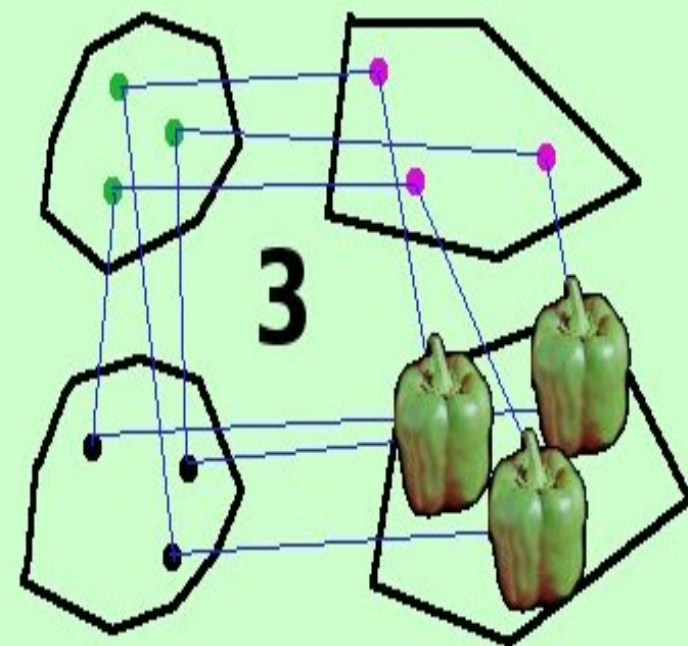


- **Riflessiva:** ogni insieme e è in corrispondenza biunivoca con se' stesso
- **Simmetrica:** Se l'insieme A è in corrispondenza biunivoca con l'insieme B allora anche l'insieme B è in corrispondenza biunivoca con l'insieme A
- **Transitiva:** Se l'insieme A è in corrispondenza biunivoca con l'insieme B e l'insieme B è in corrispondenza biunivoca con l'insieme C allora segue che l'insieme A è in corrispondenza biunivoca con l'insieme C

Questa relazione divide l'insieme di tutti gli insiemi in gruppi (classi) tali che tutti gli elementi della stessa classe hanno la stessa quantità di elementi (cardinalità) e quindi l'insieme quoziente, essendo formato da tutti gli insiemi con lo stesso numero di elementi può essere rappresentato da un numero cioè otteniamo l'insieme \mathbf{N} dei numeri naturali:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7,

quindi, ad esempio, il numero 3 rappresenterà la classe formata da tutti gli insiemi composti da 3 elementi



Insieme infinito

Ora, con la corrispondenza biunivoca fra insiemi possiamo riuscire a definire l'**insieme infinito**

Definizione:

Diremo che un insieme e' **infinito** se e' possibile porlo in corrispondenza biunivoca con una sua parte

Esempio: considero l'insieme N dei Numeri Naturali

$$N = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

e considero l'insieme dei numeri naturali pari

$$N_2 = \{2, 4, 6, 8, 10, \dots\}$$

I due insiemi sono in corrispondenza biunivoca perche' ad ogni numero in N corrisponde il suo doppio in N_2 e ad ogni numero in N_2 corrisponde la sua meta' in N

$$N \longleftrightarrow N_2$$

$$1 \longleftrightarrow 2$$

$$2 \longleftrightarrow 4$$

$$3 \longleftrightarrow 6$$

$$4 \longleftrightarrow 8$$

$$5 \longleftrightarrow 10$$

$$\dots \longleftrightarrow \dots$$

$$\dots \longleftrightarrow \dots$$

Quindi l'insieme N , essendo in corrispondenza biunivoca con una sua parte, e' un insieme **infinito**

Potevo metter in corrispondenza biunivoca i numeri di N con i loro tripli oppure con i loro multipli per 10... eccetera

Quante di poter mettere in corrispondenza biunivoca un insieme infinito con una sua parte e' la prima fra le tante proprieta' sorprendenti dell'infinito, vedrai che, procedendo ci sara' di molto peggio