<u>Ampliamento all'infinito numerabile</u>

Tra due insiemi finiti si può stabilire una corrispondenza biunivoca solo se hanno lo stesso numero di elementi.

Passiamo a considerare l'insieme di tutti i numeri che occorrono per contare:

N

Si può ***intuire*** che N è un insieme costituito da infiniti numeri.

N è un insieme infinito

Per definizione

Un insieme si dice **infinito** quando possiede un sottoinsieme proprio ad esso equipotente.

Ad esempio:

Basta considerare la funzione

$$f : n \in N \xrightarrow[\text{applicazione biunivoca}]{} 2n \in Np$$

che lega biunivocamente ogni numero naturale con un numero pari

La definizione di infinito acquista un valore preciso, non più basato su vaghi concetti esclusivamente intuitivi.

Con questa definizione è possibile stabilire in modo esatto se ogni insieme è finito o infinito.

Consideriamo allora l' insieme dei numeri pari, ***Np*** e la moltiplicazione di 2 per 1, 2, 3 e così via…ottengo

2 x 1 = 2

2 x 2 = 4

2 x 3 = 6

……….

2 x 20 = 40

……….

2 x 100 = 200

Corrispondenze tra insiemi infiniti

Abbiamo creato una corrispondenza UNIVOCA tra ***N*** e ***Np*** che permette di associare ad ogni numero naturale il suo doppio:

$$1 \in N \xrightarrow{\text{univoca}} 2 \in Np$$

2 **4**

3 **6**

....

100 **200**

E se parto da ***Np*** *?* Posso associare a ogni numero pari la sua metà?

$2 \in Np \xrightarrow[\text{univoca}]{} 1 \in N$

4	2
6	3

………

40	20

………

200	100

………

N ed Np sono equipotenti

N ed ***Np*** sono in corrispondenza BIUNIVOCA e quindi ***N*** e ***Np*** hanno gli stessi elementi. Infatti

ad *ogni elemento di* ***N*** *corrisponde un solo elemento di* ***Np***

viceversa, ad ogni elemento di ***Np*** *corrisponde un solo elemento di* ***N***

Un insieme equipotente ad N si dice **numerabile** o che ha la potenza del numerabile.

Es:

L'insieme dei numeri dispari D è numerabile?

L'insieme degli interi Z è numerabile?

Definiamo l'applicazione

$$n \in N \xrightarrow{f} m \in D$$

$$f(n)=2n+1=m$$

Definiamo l'applicazione f

$$n \in N-\{0\} \xrightarrow{\quad f \quad} z \in Z$$

$$f(n)=\begin{cases} \dfrac{n}{2} & \text{se } \mathbf{n} \text{ pari} \\[2ex] 0-\dfrac{n-1}{2} & \text{se } \mathbf{n} \text{ dispari} \end{cases}$$

verifichiamo se è biunivoca

Costruzione dei numeri razionali Q

I motivi che hanno portato alla costruzione dei razionali **Q**, a partire dagli interi **Z**, sono analoghi a quelli che hanno spinto alla definizione degli interi.

Si tratta di trovare sempre una soluzione per l'equazione:

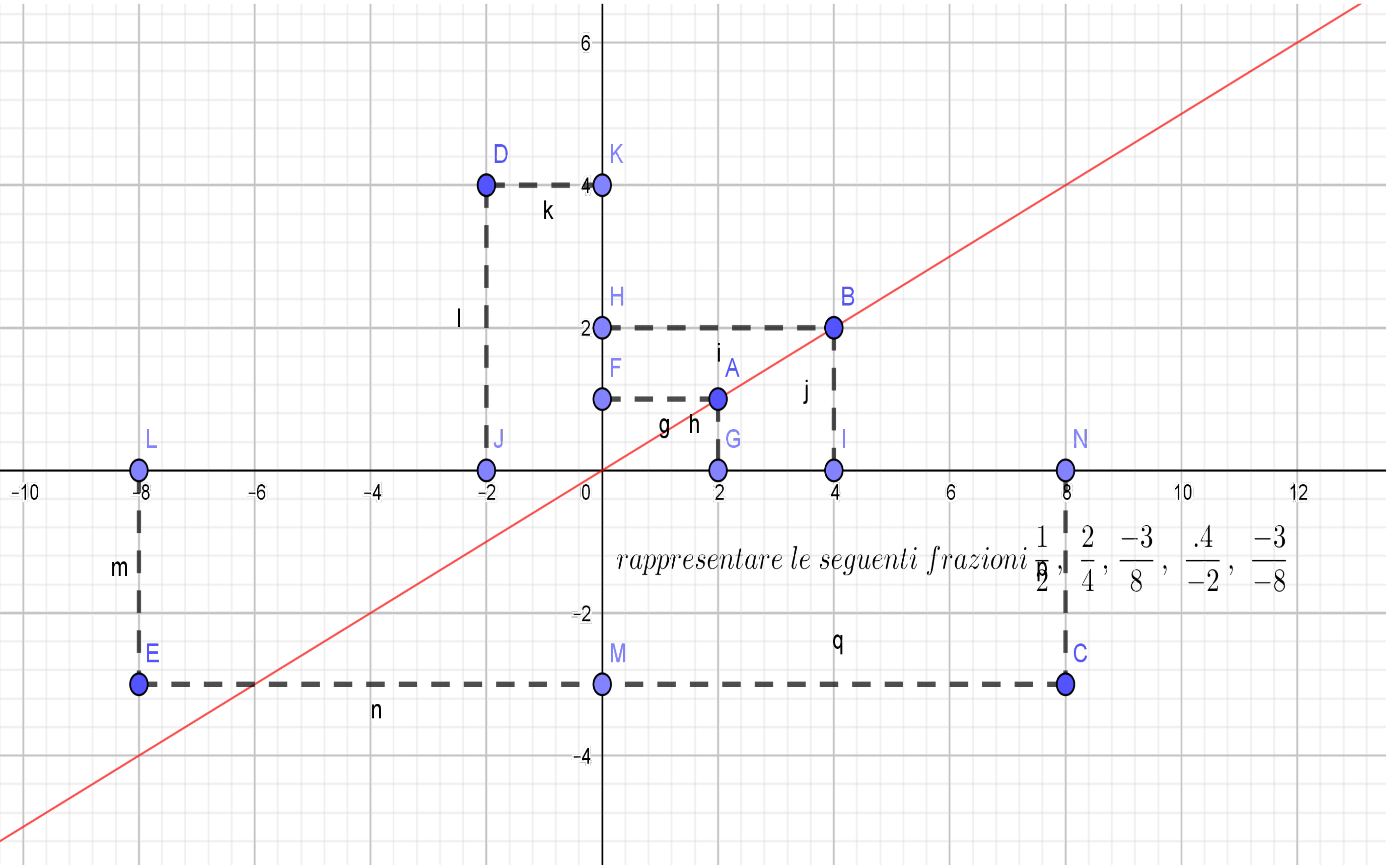
$$a \cdot x = b \text{ con } a, b \in Z$$

Costruire intuitivamente i razionali non è facile come per gli interi.
Formalmente si defisce una relazione di equivalenza su Z×(Z\0) in questo modo:

$$(m,n) \sim (p,q) \Leftrightarrow m \cdot q = n \cdot p$$

(intesa come la solita definizione di uguaglianza tra rapporti leggendo (m,n) come $\frac{m}{n}$).

Rappresentazione grafica dei numeri razionali Q



rappresentare le seguenti frazioni $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{-3}{8}$, $\frac{.4}{-2}$, $\frac{-3}{-8}$
D
K
k
l
H
B
F
A
i
j
g
h
L
J
G
I
N
m
E
M
C
q
n

OSSERVAZIONI

- Consideriamo l'applicazione f

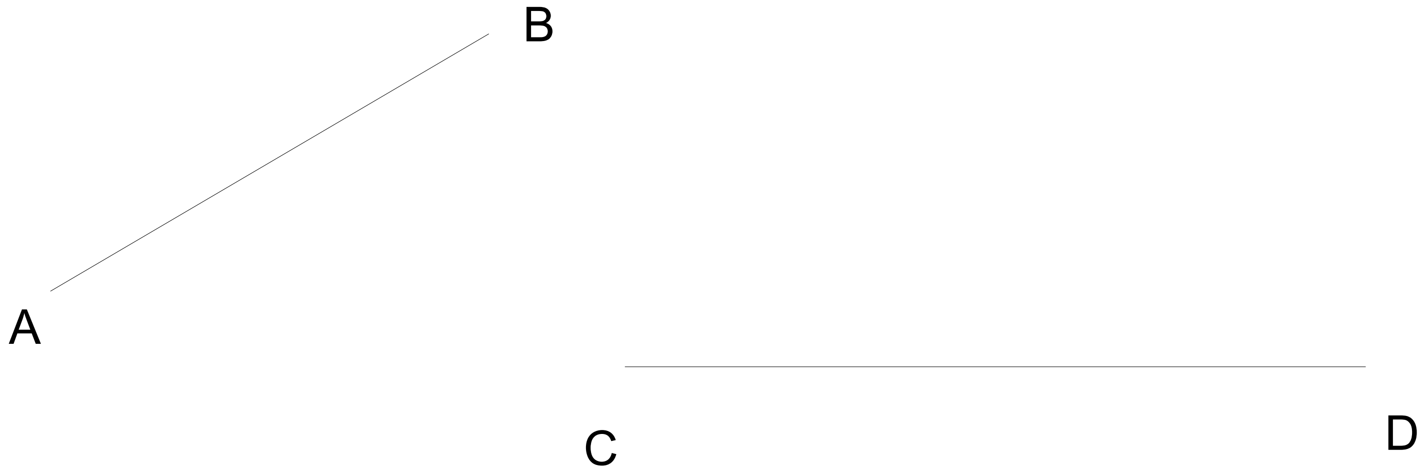
$$f: P \in \text{retta} \longrightarrow \frac{m}{n} \in Q$$

- E' biunivoca?
- Perchè? Dimostrare.
- Allora i due insiemi sono equipotenti?
- Che cosa significa, in questo caso specifico, trattandosi di due insiemi di elementi diversi?

Osservazioni

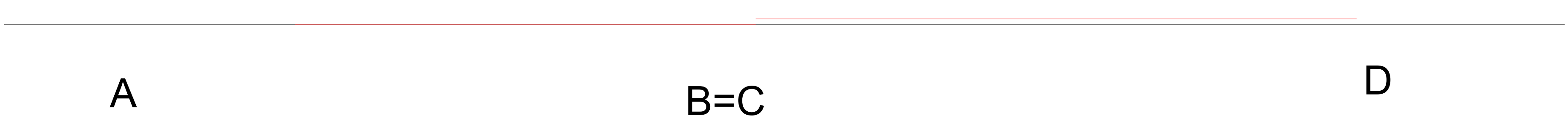
- E' possibile eseguire delle operazioni tra segmenti così come tra numeri razionali?
- Somme di segmenti

Supponiamo di voler effettuare la **SOMMA DI DUE SEGMENTI**, ***AB*** e ***CD***:



Trasportiamo i due segmenti su una retta *r* in modo che risultino **adiacenti**

Ricordiamo che si dicono **ADIACENTI SEGMENTI** due che hanno un **estremo in comune** e che **giacciono su una stessa retta**.



Ora torniamo alla nostra somma.

Il **SEGMENTO** ***AD*** è il **SEGMENTO SOMMA** di ***AB*** e ***CD***.

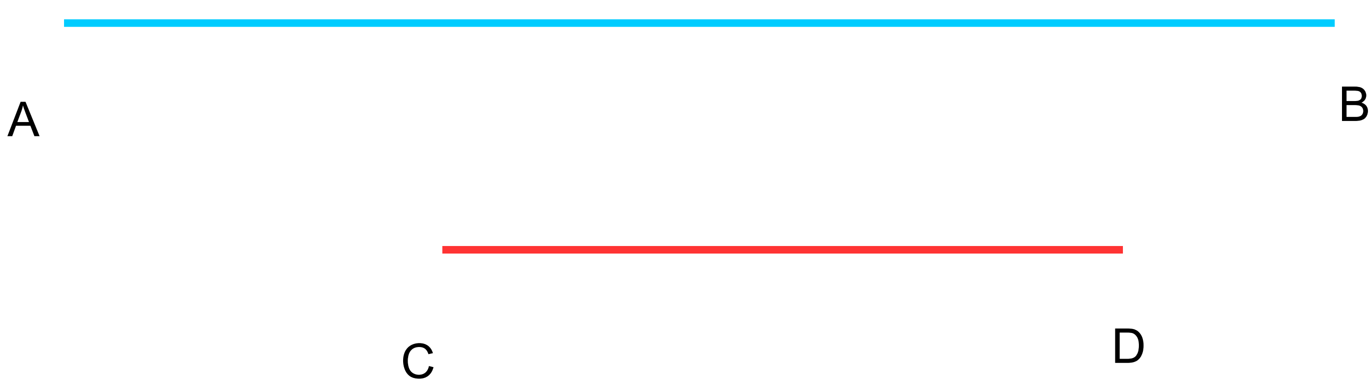
Pertanto possiamo scrivere:

$$AB + CD = AD.$$

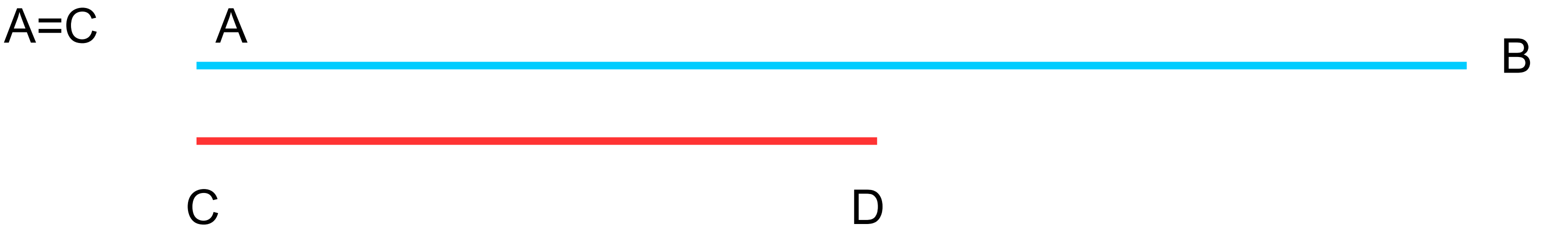
La lunghezza del segmento ***AD*** è uguale alla somma delle lunghezze del segmento ***AB*** e del segmento ***CD***.

Differenza di segmenti

Supponiamo di voler effettuare la **DIFFERENZA DI DUE SEGMENTI** **non uguali**, *AB* e *CD*:

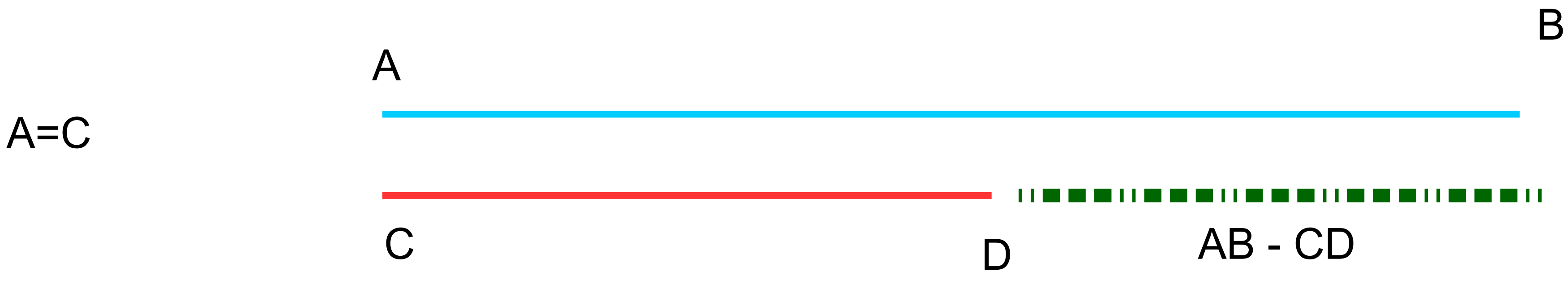


Trasportiamo uno dei due segmenti in modo da farli **SOVRAPPORRE** in maniera tale che uno dei loro **ESTREMI COINCIDA**.



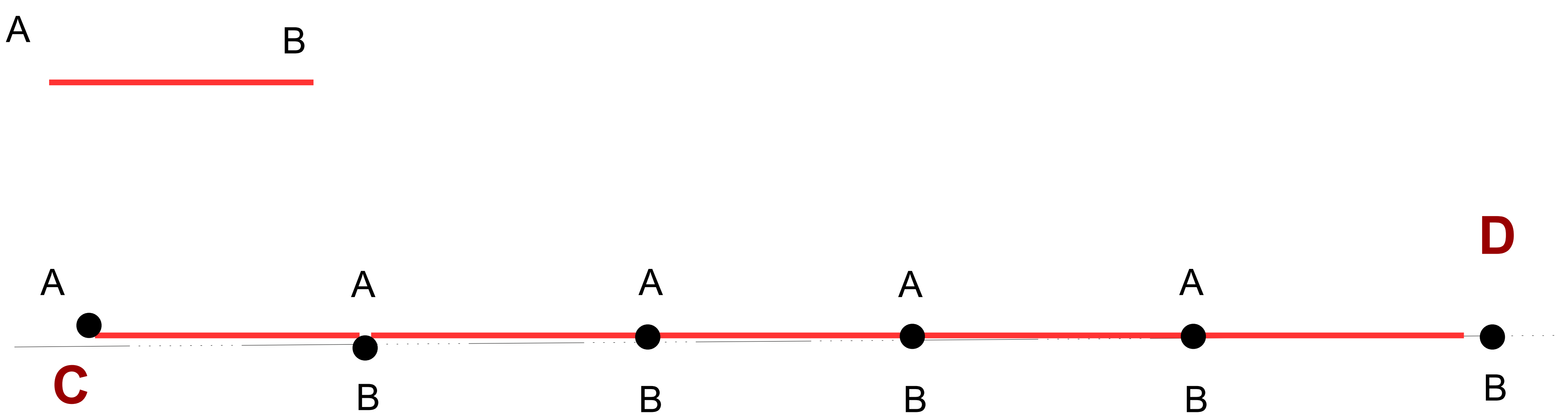
Notiamo che il segmento ***CD*** è minore rispetto al segmento ***AB*** pertanto l'estremo ***D*** è interno rispetto al segmento ***AB***.

Possiamo così individuare un nuovo segmento, che nell'immagine sottostante abbiamo indicato in VERDE.



Multipli e sottomultipli di un segmento

Sommiamo tra loro più segmenti uguali ad ***AB***, ad esempio sommiamo tra loro 5 segmenti uguali ad ***AB***. Avremo:



Il **SEGMENTO** ***CD*** è pari a 5 volte il segmento ***AB***. Quindi possiamo dire che ***CD*** è **MULTIPLO** di ***AB*** secondo il numero 5 e possiamo scrivere:

$$CD = 5AB$$

Allo stesso modo possiamo dire che ***AB*** è la 5° parte di ***CD***. Quindi possiamo dire che ***AB*** è **SOTTOMULTIPLO** di ***CD*** secondo il numero 5 e possiamo scrivere:

$$AB = 1/5CD$$