



**Università degli Studi di Napoli Federico II**

**Scuola Politecnica e delle Scienze di base**

Corsi di laurea in Ingegneria Aerospaziale e Ingegneria Meccanica  
SG A-Ier; Ies-Z

Anno Accademico 2018-2019

Corso di Fisica Generale - Modulo I  
Docenti: Salvatore Amoruso e Massimo Della Pietra  
Dipartimento di Fisica "Ettore Pancini"

Esempi di esercizi di Meccanica  
del punto materiale e del corpo rigido

(copia aggiornata il: 19/10/2018)

*La presente dispensa riporta un insieme di esercizi proposti agli studenti del corso sulla base degli argomenti spiegati a lezione. Essi vogliono solo essere di esempio della tipologia di esercizi che gli allievi dovrebbero essere in grado di risolvere, e non sono in alcun modo esaustivi di tutti gli esercizi che gli stessi potrebbero o dovrebbero imparare a risolvere.*

*In particolare, gli allievi sono invitati a svolgere gli esercizi del libro consigliato o dell'eventuale libro a scelta sul quale seguono gli argomenti del corso.*

*I testi degli esercizi potranno subire delle correzioni durante il corso, oppure essere aggiornati con altri esercizi o variazioni della traccia. Sulla prima pagina viene, pertanto, indicata la data di ultimo aggiornamento.*

**N.B.:** *Gli esercizi indicati in grassetto presentano degli esempi di risoluzione.*

*I docenti  
Salvatore Amoruso  
Massimo Della Pietra*

## **I. Moto in 1 dimensione**

### *A. Equazioni orarie, velocità media*

**A1.** Un punto materiale è in moto rettilineo con la legge oraria:  $x(t)=3t^3 + 2t$  (m). Determinare la velocità e l'accelerazione istantanea per  $t_1=2$  s e per  $t_2=5$  s.

#### *Esempio di svolgimento*

*La velocità istantanea misura la rapidità di variazione della posizione ed è data da:*

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = 9t^2 + 2 \text{ (m/s)}$$

*pertanto il suo valore agli istanti assegnati è:  $v(t_1)=38$  m/s e  $v(t_2)=227$  m/s.*

*L'accelerazione è data da:*

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = 18t \text{ (m/s}^2\text{)}$$

*ed il suo valore agli istanti assegnati è:  $a(t_1)=36$  m/s<sup>2</sup> e  $a(t_2)=90$  m/s<sup>2</sup>.*

**A2.** Data la legge oraria  $x(t)=at^2 + bt$ , determinare le dimensioni delle costanti a e b. Calcolare la legge oraria di velocità ed accelerazione.

**A3.** Un punto materiale si muove di moto rettilineo con accelerazione  $a(t)=2t + 4$  (m/s<sup>2</sup>). Determinare la legge oraria della velocità. Di quanto varia la velocità nell'intervallo 2-3 secondi?

**A4.** Un punto materiale si muove di moto rettilineo con velocità  $v(t)= 2t^2 + 6t + 3$  (m/s). Determinare la posizione del punto nell'istante  $t=2$  s, sapendo che la posizione al tempo  $t=0$  è  $x_0=0.5$  m.

**A5.** Determinare la legge oraria dell'accelerazione per il caso dell'esercizio precedente.

**A6.** Un punto materiale si muove di moto rettilineo con velocità  $v(t)= 4t + 3$  (m/s). Determinare lo spostamento del punto materiale dopo un secondo dall'istante iniziale  $t=0$  s.

**A7.** La posizione di un punto materiale in funzione del tempo t è data dalla legge oraria  $x(t)=10t^2-5t+4$  (m). Determinare le leggi orarie di velocità e accelerazione in funzione del tempo.

**A8.** Una moto viaggia in linea retta con una velocità media di 100 km/h per 2 ore, e poi con velocità media di 50 km/h per la successiva ora. Valutare: a) lo spostamento complessivo nelle 3 ore; b) la velocità media relativa all'intero percorso.

**A9.** Un punto materiale percorre 100 m viaggiando alla velocità di 4 m/s per i primi 50 m. Quanto deve valere la sua velocità nei rimanenti 50 m, se la velocità media relativa all'intero spostamento è 5 m/s?

**A10.** Due punti materiali A e B si muovono di moto rettilineo a velocità costante  $v_A= 5$  m/s e  $v_B=10$  m/s. All'istante  $t=0$  A precede B di 100 m. Si determini: a) la distanza percorsa dal punto A prima di essere raggiunta dal punto B; b) l'istante di tempo  $t^*$  nel quale si incontrano.

**B. Moto uniformemente accelerato.**

**B1.** Un'auto procede con velocità costante  $v=100$  km/h. Alla vista di uno stop il conducente aziona i freni, e l'accelerazione dell'auto, supposta costante, è pari a  $-5$  m/s<sup>2</sup>. Determinare lo spazio di arresto.

**B2.** Un punto materiale si muove di moto rettilineo con accelerazione costante  $a=2$  m/ s<sup>2</sup> . Sapendo che all'istante  $t_1$  la velocità vale  $v_1=1$  m/s, determinare la velocità  $v_2$  all'istante  $t_2$ , sapendo che in questo intervallo di tempo ha percorso una distanza  $d=3$  m.

*Esempio di svolgimento*

*Abbiamo come dati del problema l'accelerazione  $a$  con cui si muove il punto materiale, la velocità all'istante  $t_1$  e la distanza percorsa nell'intervallo di tempo  $t_1-t_2$ . Sappiamo che per un moto uniformemente accelerato esiste la seguente relazione fra la velocità in due configurazioni e lo spazio percorso:*

$$v^2 = v_0^2 + 2a\Delta x.$$

*Considerando  $v=v_2$ ,  $v_0=v_1$  e  $\Delta x=d$  otteniamo*

$$v_2 = \sqrt{v_1^2 + 2ad} = \sqrt{1 + 2 \times 2 \times 3} = 3.6 \text{ m/s}$$

**B3.** Un punto materiale è in moto lungo un asse rettilineo  $x$  con accelerazione  $a=4$  m/s<sup>2</sup>. All'istante  $t=0$  si trova nella posizione  $x_0=5$  m con una velocità  $v_0=1$  m/s. Quale sarà la sua velocità quando transiterà nella posizione  $x=15$  m, e quanto tempo impiegherà per raggiungere tale posizione?

**B4.** Un punto materiale si muove lungo l'asse  $x$  orientato con accelerazione costante  $a = +3.0$  m/s<sup>2</sup>. Se parte all'istante  $t=0$  con velocità nulla, si determini la sua posizione ad un istante  $t_2$  al quale la sua velocità è  $v_2 = +15.0$  m/s sapendo che all'istante  $t_1 = 4.0$  s il punto materiale si trova nella posizione  $x = -100$  m.

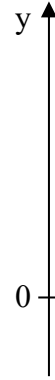
**B5.** Un punto materiale parte dallo stato di quiete muovendosi con un'accelerazione costante di  $2.0$  m/s<sup>2</sup> per i primi  $10$  s. Poi, per i successivi  $20$  s viaggia a velocità costante. Quindi rallenta con accelerazione pari a  $-30$  m/s<sup>2</sup> fino a fermarsi. Si determini: a) la distanza totale percorsa  $d$ ; b) la velocità media con la quale ha percorso la distanza  $d$ .

**B6.** Un'automobile lunga  $l = 3$  m viaggia in un tratto rettilineo alla velocità  $v_0 = 130$  km/h. Calcolare il tempo  $T$  necessario per il sorpasso di un autocarro, lungo  $L = 12$  m, che viaggia alla velocità costante  $v_1 = 90$  km/h, avendo definito tale intervallo di tempo come quello necessario all'automobile a passare dalla situazione 1) alla situazione 2) in figura. Trovare quale accelerazione costante occorre imprimere all'automobile all'inizio del sorpasso, perché il tempo di sorpasso si riduca di  $1/5$ .

**C. Moto verticale di un grave.**

**C1.** Un punto materiale viene lanciato verso l'alto, in direzione verticale, con velocità iniziale  $v_0=3$  m/s. Determinare la massima  $h$  altezza raggiunta.

*Esempio di svolgimento*



Con riferimento alla figura, il punto sarà soggetto all'accelerazione di gravità  $a = -g$ . Il suo moto sarà uniformemente accelerato, con legge oraria della velocità:

$$v(t) = v_0 + at = v_0 - gt$$

L'altezza massima sarà raggiunta allorché il punto si ferma, cioè all'istante  $t^*$  per il quale  $v(t^*) = 0$ . Dalla relazione precedente si ottiene:

$$t^* = \frac{v_0}{g}$$

La legge oraria della posizione del punto materiale è:

$$y(t) = y_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2 = v_0 t - \frac{1}{2} gt^2$$

L'altezza massima  $h$  sarà raggiunta a  $t = t^*$ , quindi

$$h = v_0 t^* - \frac{1}{2} g t^{*2} = \frac{v_0^2}{2g} = 0.46 \text{ m.}$$

C2. Un punto materiale viene lanciato con velocità  $v_0$  verso il basso in direzione verticale da un'altezza  $h$  dal suolo. Determinare la velocità  $v$  acquistata dal punto materiale nell'istante in cui raggiunge il suolo. Calcolare il valore di  $v$  per  $v_0 = 2 \text{ m/s}$  ed  $h = 10 \text{ m}$ .

C.3 Un corpo lanciato verso l'alto con velocità iniziale  $v_0$  raggiunge un'altezza  $h$ . Un secondo corpo viene lanciato verso l'alto con velocità iniziale  $2 v_0$ . Che altezza raggiunge il secondo corpo?

C4. Una pallina viene lanciata da quota iniziale  $y = 0 \text{ m}$ , con velocità iniziale  $v_0 = 10 \text{ m/s}$ . Dopo quanto tempo tornerà nella posizione  $y = 0 \text{ m}$ ? Qual è l'altezza massima raggiunta durante il suo moto?

C.5 Un punto materiale cade da un'altezza  $h = 100 \text{ m}$  partendo da una condizione di quiete. Si determini: a) la velocità del punto quando avrà percorso una distanza  $h/2$ ; b) la distanza percorsa nell'ultimo secondo in cui si trova in volo.

C.6 Una biglia viene lanciata verso il basso verticalmente dalla sommità di una rupe alta  $150 \text{ m}$ . Durante l'ultimo secondo di volo prima di raggiungere il fondo percorre una distanza di  $50 \text{ m}$ . Determinare la velocità iniziale della biglia.

C.7 Un sasso viene lasciato cadere in un pozzo alto  $200 \text{ m}$ , dallo stato di quiete, all'istante  $t = 0$ . Assumendo una velocità del suono in aria  $v_s = 340 \text{ m/s}$ , determinare dopo quanto tempo si sentirà il rumore del sasso che incontra la superficie dell'acqua.

C8. Un corpo viene lasciato cadere dalla quiete da un'altezza  $h$ . Dopo  $1 \text{ s}$  dal rilascio ha coperto una distanza pari a  $h/2$ . Determinare la velocità media del corpo durante l'intero percorso.

C9. Un bambino lascia cadere, dalla quiete, una pallina blu dal balcone ad un'altezza  $h = 10 \text{ m}$  dal suolo. Dopo  $1 \text{ s}$  un altro bambino lancia verso il basso una pallina rossa dallo stesso balcone, con velocità iniziale  $v_0$ . Sapendo che le palline raggiungono il suolo allo stesso momento, si determini la velocità iniziale  $v_0$  della pallina rossa.

C10. Due oggetti cadono verticalmente da una torre a distanza di tempo di 2 s l'uno dall'altro. Si determini lo spazio che separa i due oggetti dopo che sono passati 5 s dalla caduta del primo di essi.

*D. Moto armonico semplice.*

D1. Un punto materiale si muove di moto armonico semplice con pulsazione  $\omega_0 = 2 \text{ s}^{-1}$ . Determinare il periodo del moto e l'accelerazione per  $x = -0.5 \text{ m}$ .

D2. Un punto materiale si muove di moto armonico semplice con periodo  $T = 2 \text{ s}$ . Determinare la pulsazione  $\omega_0$  e l'accelerazione per  $x = 1 \text{ m}$ .

D3. Un punto materiale si muove di moto armonico con pulsazione  $\omega = 1 \text{ s}^{-1}$  ed ampiezza  $A = 1.5 \text{ m}$ . Determinare il modulo della velocità che il punto possiede quando si trova nella posizione  $x = 30 \text{ cm}$ , sapendo che  $x_0 = 0$ . [Suggerimento: si scelga la legge oraria sinusoidale della posizione in modo che per  $t = 0$  si abbia la posizione  $x_0 = 0$ , ovvero si consideri la fase iniziale  $\phi_0 = 0$ ].

D4. Determinare l'ampiezza di un moto armonico con pulsazione  $\omega_0 = 3 \text{ s}^{-1}$  sapendo le condizioni iniziali:  $x_0 = 30 \text{ cm}$  e  $v_0 = 0.5 \text{ m/s}$ . [Suggerimento: Si consideri la legge oraria generica  $x(t) = A \sin(\omega_0 t + \phi_0)$ , e dalle condizioni indicate si determini l'ampiezza  $A$  e la fase iniziale  $\phi_0$ ].

D5. Si analizzi il risultato dell'esercizio precedente nel caso si fosse fatta la scelta  $x(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi_0)$ . Si discuta il risultato.

*E. Moto smorzato esponenzialmente.*

E1. Un punto materiale si muove di moto smorzato esponenzialmente con costante di tempo  $\tau = 5.0 \text{ s}$  e velocità iniziale  $v_0 = 50 \text{ m/s}$ . Si calcolino: 1) lo spazio complessivo percorso prima che il corpo si fermi; 2) la posizione e la velocità per  $t = 1.0 \text{ s}$ ,  $3.0 \text{ s}$ ,  $5.0 \text{ s}$  e  $10 \text{ s}$ .

E2. Un punto materiale che si muove di moto smorzato esponenzialmente con costante di tempo  $\tau = 75 \text{ s}$  percorre una distanza di  $1.8 \text{ m}$  prima di fermarsi. Si calcoli la sua velocità iniziale  $v_0$ .

E3. Si considerino i valori  $x_0$  e  $v_0$  dell'esercizio precedente e si calcoli l'accelerazione  $a$  corrispondente ad un moto uniformemente accelerato per il quale partendo con velocità  $v_0$  il corpo si arresta dopo aver percorso uno spazio  $x_0$ . I calcoli il tempo  $\Delta t$  che il corpo impiega a fermarsi. Lo si confronti con il valore di  $\tau$  dell'esercizio precedente svolgendo le relative osservazioni.

E4. Un punto materiale si muove con accelerazione  $a = -\beta v^2$  con  $\beta = 1.0 \text{ m}^{-1}$ . Si calcoli il valore della velocità e della posizione dopo un tempo  $t = 5 \text{ s}$ , se la velocità iniziale è  $v_0 = 10 \text{ m/s}$ .

**II. Vettori e loro prime proprietà.**

1. Determinare le proprietà dei vettori  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  e  $\mathbf{c}$  per i quali valgono contemporaneamente le relazioni fra vettori e loro moduli  $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{c}$  e  $a + b = c$ .

2. Dati due vettori  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$ , determinare per quale  $\mathbf{b}$  vale la proprietà  $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$ .

3. Dati 2 vettori  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  si determini in quali condizioni le due relazioni  $\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{c}$  e  $a^2+b^2=c^2$  valgono simultaneamente [Sugg.: Si consideri la regola di somma di vettori e il teorema di Carnot o dei coseni].

4. In un sistema di assi cartesiani, un vettore  $\mathbf{a}$  di modulo 10 forma un angolo  $\theta=30^\circ$  con l'asse positivo delle ascisse. Si calcolino le componenti cartesiane  $a_x$  e  $a_y$  del vettore.

*Esempio di svolgimento*

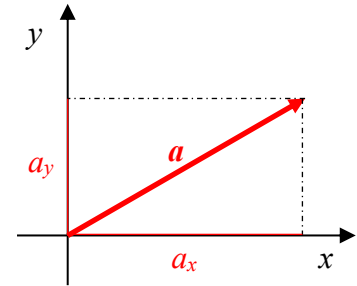
*Scomponendo il vettore lungo due assi cartesiani si ottiene*

$$a_x = a \cos \theta = 10 \cos 30^\circ = 8.7$$

$$a_y = a \sin \theta = 10 \sin 30^\circ = 5.0$$

*Il vettore in rappresentazione cartesiana è pertanto*

$$\mathbf{a} = 8.66 \mathbf{u}_x + 5 \mathbf{u}_y$$



5. In un sistema di assi cartesiani, un vettore  $\mathbf{a}$  di modulo 5 forma un angolo  $\theta=-60^\circ$  con l'asse positivo delle ascisse. Si calcolino le componenti  $a_x$  e  $a_y$  del vettore.

6. Dati due vettori  $\mathbf{v}_1=2 \mathbf{u}_x + 5 \mathbf{u}_y$  e  $\mathbf{v}_2=5 \mathbf{u}_x + 7 \mathbf{u}_y$ , si riportino in grafico su un piano  $xOy$  e si calcoli e disegni: i)  $\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2$ ; ii)  $\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2$ ; iii)  $2 \mathbf{v}_1 + 3 \mathbf{v}_2$ .

7. Per i due vettori  $\mathbf{v}_1=2 \mathbf{u}_x + 5 \mathbf{u}_y$  e  $\mathbf{v}_2=5 \mathbf{u}_x + 7 \mathbf{u}_y$ , si determini il modulo e l'angolo formato con l'asse delle ascisse.

8. Si determini  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2+\mathbf{v}_3$ , con  $\mathbf{v}_1=3 \mathbf{u}_x - 5 \mathbf{u}_y$  e  $\mathbf{v}_2=7 \mathbf{u}_x + 1 \mathbf{u}_y$ ,  $\mathbf{v}_3=2 \mathbf{u}_x$  facendone la costruzione grafica, trovando le componenti e determinando il modulo e l'angolo formato con l'asse delle ascisse.

9. Siano  $\mathbf{v}_1=-5 \mathbf{u}_x + 8 \mathbf{u}_y$  e  $\mathbf{v}_2=-3 \mathbf{u}_x - 4 \mathbf{u}_y$ ,  $\mathbf{v}_3=2 \mathbf{u}_x - 3 \mathbf{u}_y$ . Si determini modulo, direzione e verso di: i) tutti e tre i vettori; ii)  $\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2$ ; iii)  $\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2$ ; iv)  $\mathbf{v}_2-\mathbf{v}_1$ ; v)  $\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2+\mathbf{v}_3$ ; vi)  $\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2+\mathbf{v}_3$ ; vii)  $\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2-\mathbf{v}_3$ .

10. Si considerino i tre versori delle direzioni ortogonali degli spigoli di un cubo. Si scriva il vettore  $\mathbf{d}$  diretto lungo la diagonale del cubo, considerando che il suo lato misuri  $a$ , nel sistema di assi cartesiani ortogonali diretti lungo gli spigoli del cubo. Si determini il modulo del vettore  $\mathbf{d}$ .

11. Quanto vale l'angolo compreso fra i vettori di coordinate  $\mathbf{A}=(-\sqrt{3},1)$  e  $\mathbf{B}=(3/4, -\sqrt{3}/4)$  ?

**II. Moto piano**

A. *Moto curvilineo piano in coordinate intrinseche.*

A1. Un punto materiale si muove su di un piano descrivendo una traiettoria curvilinea, con legge oraria dell'ascissa curvilinea  $s(t)=3t^2 + 2t$  (m). Determinare il modulo della velocità istantanea negli istanti  $t_1=1$  s e  $t_2=5$  s.

A2. Un punto materiale si muove su di un piano descrivendo una traiettoria curvilinea, con legge oraria dell'ascissa curvilinea  $s(t)=6t + 4$  (m). Determinare il modulo della accelerazione tangenziale

$a_T$  e normale (centripeta)  $a_N$  all'istante  $t=2$  s, sapendo che il raggio del cerchio osculatore vale in quell'istante  $R=1.0$  m.

A3. Un punto materiale si muove su di un piano con velocità  $\mathbf{v}= 2t \mathbf{u}_x + 5t^2 \mathbf{u}_y$  (m/s). Determinare il vettore posizione  $\mathbf{r}$  del punto all'istante  $t=1$  s, sapendo che all'istante  $t=0$  s il punto si trova nell'origine del sistema di riferimento.

A4. Un punto materiale si muove su di un piano con legge oraria  $\mathbf{r}(t)= 4t \mathbf{u}_x + 5t \mathbf{u}_y$  (m). Determinare la legge oraria del vettore velocità  $\mathbf{v}(t)$ . Calcolare, quindi, le componenti della velocità del punto all'istante  $t=1$  s.

A5. Un punto materiale viene lanciato, dal basso, lungo un piano inclinato con  $\alpha = 30^\circ$ , con velocità  $v_0=2$  m/s. Trascurando gli attriti, determinare la velocità del punto dopo che ha percorso una distanza  $d=5$  cm lungo il piano.

### B. Moto dei proiettili.

B1. Un proiettile viene sparato dall'origine di un sistema di riferimento con una velocità iniziale  $\mathbf{v}_0$ , di modulo  $v_0=2$  m/s che forma un angolo di  $30^\circ$  con la direzione orizzontale. Determinare: a) la gittata; b) il punto di massima altezza; c) il vettore velocità nel punto di impatto.

B2. Un proiettile viene sparato dall'origine di un sistema di riferimento con velocità iniziale  $\mathbf{v}_0$ , di modulo  $v_0=3$  m/s che forma un angolo di  $45^\circ$  con la direzione orizzontale. Determinare l'altezza massima  $h$  raggiunta durante il moto ed il raggio  $R$  del cerchio osculatore in questa posizione.

B3. Un proiettile viene lanciato con velocità iniziale  $\mathbf{v}_0= 3\mathbf{u}_x + 2\mathbf{u}_y$  (m/s). Determinare: a) la gittata; b) il punto di massima altezza.

B4. Un proiettile viene lanciato con velocità iniziale  $\mathbf{v}_0= 2\mathbf{u}_x + 2\mathbf{u}_y$  (m/s). Determinare il raggio del cerchio osculatore nel punto di massima altezza.

B5. Un sasso viene lanciato da una rupe a strapiombo su una vallata sottostante. Il punto di lancio si trova ad altezza  $h= 200$  m dalla base dello strapiombo. La velocità iniziale del sasso forma un angolo di  $60^\circ$  con la direzione l'orizzontale ed ha modulo 50 m/s. Determinare il punto di impatto, misurato dai piedi della rupe.

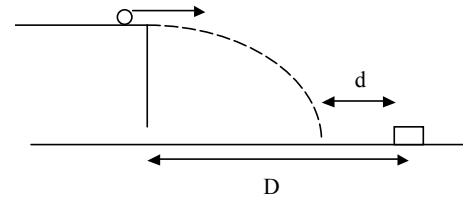
B6. Un sasso è stato lanciato orizzontalmente dalla cima di una torre alta 30 m e tocca il suolo in un punto a distanza 20 m dalla base della torre. Calcolare: a) la velocità iniziale con cui è stato lanciato il sasso; b) la velocità di impatto al suolo; c) il tempo nel quale il sasso rimane in volo.

B7. Un proiettile viene lanciato da quota zero con velocità iniziale  $\mathbf{v}_0$  di modulo 40 m/s. Si determini l'angolo di lancio  $\theta$  per il quale l'altezza massima raggiunta durante il moto risulta uguale alla gittata.

B8. Un sasso viene lanciato dall'origine di un sistema di assi cartesiani nello stesso istante in cui una mela si stacca dal ramo di un albero nel punto di coordinate  $x_0=3$  m,  $y_0=2$  m. Se la direzione di lancio del sasso è quella congiungente l'origine degli assi con il punto  $(x_0, y_0)$ , determinare il valore minimo del modulo della velocità iniziale del sasso  $v_0$  affinché colpisca la mela.

B9. Due bambini stanno facendo una gara a chi riesce a centrare una scatoletta sul pavimento con una pallina sparata da una pistola a molla montata su un tavolo orizzontale. Come mostrato in figura il

bersaglio è piazzato ad una distanza  $D = 2.20$  m in orizzontale dal bordo del tavolo. Il primo bambino comprime la molla di  $x_1 = 1.1$  cm, ma il tiro risulta corto di  $d = 27$  cm. Di quanto deve comprimere la molla il secondo bambino per fare centro? Si trascurino tutti gli attriti.



*C. Moto circolare uniforme e moto circolare vario.*

C1. Un punto materiale si muove di moto circolare uniforme su di una circonferenza di raggio  $R=1$  m, con velocità angolare  $\omega = 2$  rad/s. Determinare il modulo dell'accelerazione del punto.

C2. Un punto materiale si muove di moto circolare uniforme, con velocità angolare  $\omega= 2$  rad/s. Determinare il numero di giri percorsi dal punto nell'intervallo di tempo  $\Delta t=10$  s.

C3. Un punto materiale si muove di moto circolare uniforme su una circonferenza di raggio  $R=1.0$  m, con velocità angolare  $\omega=5$  rad/s. Determinare il periodo del moto e il modulo dell'accelerazione centripeta.

C4. Un punto materiale si muove di moto circolare vario su di una circonferenza di raggio  $R=1.5$  m. Determinare la posizione del punto sulla circonferenza dopo un tempo  $t=2$  s, sapendo che il modulo dell'accelerazione angolare vale  $\alpha=0.3$  rad/s<sup>2</sup>, e che la velocità lineare iniziale vale  $v_0= 1$  m/s.

C5. Un punto materiale si muove di moto circolare vario su di una circonferenza di raggio  $R=1.0$  m. Se il punto parte da fermo dalla posizione angolare  $\theta_0=0$ , sapendo che il modulo dell'accelerazione angolare vale  $\alpha=1$  rad/s<sup>2</sup>, determinare la sua accelerazione centripeta quando il punto transita nella posizione  $\theta=\pi/3$ .

C6. Un punto materiale si muove di moto circolare vario su di una circonferenza di raggio  $R=1.0$  m. Determinare il modulo dell'accelerazione  $a$  del punto all'istante  $t=3$  s, sapendo che il modulo dell'accelerazione tangenziale vale  $a_T=0.5$  m/s<sup>2</sup>, e che la velocità iniziale vale  $v_0= 1$  m/s.

C7. Un'auto si muove su di una pista circolare di raggio  $R=100$  m con accelerazione tangenziale  $a_T=1$  m/s<sup>2</sup>. Determinare il modulo della velocità dopo un giro, sapendo che parte da ferma.

C8. La massima accelerazione centripeta che può avere un'auto su di una pista circolare di raggio  $R=500$  m è  $a_c=3$  m/s<sup>2</sup>. Sapendo che parte da ferma con accelerazione tangenziale  $a_T=0.5$  m/s<sup>2</sup>, determinare dopo quanto tempo raggiunge l'accelerazione centripeta massima.

C9. Calcolare il numero di giri al minuto necessario affinché un punto del bordo di una piattaforma circolare di raggio  $R=1$  m sia sottoposto ad una accelerazione pari a  $8g$ , ove  $g=9.81$  m/s<sup>2</sup> è l'accelerazione di gravità.

C10. Un punto si muove su di un'orbita circolare di raggio  $R=0.4$  m con velocità angolare costante  $\omega_0= 10$  rad/s. A partire dall'istante  $t=0$  s fino all'istante  $t_1=15$  s la sua accelerazione angolare vale  $\alpha=-0.1$  rad/s<sup>2</sup>; per  $t \geq t_1$   $\alpha$  resta costante al valore  $-1.6$  rad/s<sup>2</sup> fino a che il punto si ferma. Calcolare: 1) il modulo dell'accelerazione  $a$  del punto all'istante  $t_1$ ; 2) in quale istante il punto si ferma.

C11. Un cilindro, ruota intorno al proprio asse in presenza di una coppia costante frenante. Se la velocità iniziale è 100 giri/min ed il cilindro si ferma dopo avere compiuto 10 giri, determinare il tempo necessario per fare fermare il cilindro e la velocità angolare del cilindro ad un tempo pari alla metà del tempo necessario a fermarsi.

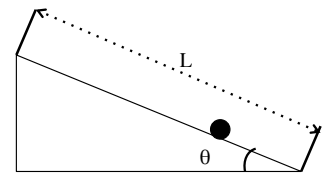
## Analisi dinamica con le leggi di Newton

### Impulso e quantità di moto

1. Un punto materiale di massa  $m=300$  g possiede inizialmente una velocità  $v_0=2$  m/s e procede con moto rettilineo uniforme contro una parete. Dopo l'urto con quest'ultima il punto materiale inverte il moto conservando il modulo della velocità. Determinare: i) la variazione di quantità di moto del punto materiale; ii) l'impulso e la forza media subita dalla sfera da parte del muro assumendo un tempo d'urto di  $10^{-2}$  s.
2. Un punto materiale subisce una variazione di velocità  $\Delta v_x=3$  m/s. Determinare la massa del punto, sapendo che è stato sottoposto ad una forza  $F_x(t) = 4t^2 + 6$  tra gli istanti  $0 - 1$  s.
3. Un punto materiale di massa  $m=300$  g, è vincolato a muoversi lungo l'asse  $x$ , sotto l'azione di una forza  $F=(3t+2) \mathbf{u}_x$  (N). Se inizialmente il punto è in quiete, determinare l'impulso e la sua velocità dopo 2 s.
4. Un punto viene posto in quiete alla cima di un piano inclinato ( $\theta=40^\circ$ ,  $h=1$ m) scabro con coefficiente di attrito  $\mu_d=0.2$ . Determinare l'impulso esercitato dal risultante delle forze sul punto materiale di massa  $m=1$  kg quando il punto avrà lasciato il piano inclinato.

### Dinamica su piani inclinati lisci

1. Un punto materiale viene lanciato, dal basso, lungo un piano inclinato liscio con angolo alla base  $\theta=30^\circ$ , con velocità iniziale di modulo  $v_0=2$  m/s. Determinare lo spazio percorso salendo lungo il piano prima di fermarsi.
2. Un punto materiale viene lasciato scivolare lungo un piano inclinato liscio con angolo alla base  $\theta=30^\circ$ , da un'altezza  $h=1$  m. Determinare la velocità del punto materiale quando raggiunge la base del piano.
3. Un punto materiale viene lanciato verso il basso lungo un piano inclinato liscio con angolo alla base  $\theta=30^\circ$ , da un'altezza  $h=1$  m e con velocità iniziale di modulo  $v_0=1$  m/s. Determinare la velocità del punto materiale quando raggiunge la base del piano.
4. Una particella di massa  $m$  è vincolata a muoversi su un piano inclinato di lunghezza  $L=50$  cm, come rappresentato in figura. L'inclinazione del piano è pari a  $\theta=30^\circ$ . Ai due estremi del piano è posta una barriera su cui la particella rimbalza, senza modificare il modulo della propria velocità. Se  $v_0=3$  m/s è la velocità nel punto più basso determinare il periodo del moto periodico.



### Moto del pendolo

1. Un pendolo semplice di lunghezza  $L=1.0$  m viene abbandonato in quiete ad un angolo  $\theta=5^\circ$  rispetto alla direzione verticale. Determinare l'ampiezza e la fase del moto.
2. Un pendolo semplice di massa  $m=0.5$  kg e lunghezza  $L=1.0$  m ha una velocità in modulo pari a  $v=2.0$  m/s ad un angolo  $\theta=5^\circ$ . Determinare la tensione del filo in questa posizione.
3. Un pendolo semplice di lunghezza  $L=2.0$  m e massa  $m=1.0$  kg viene lasciato cadere da un angolo  $\theta=7^\circ$  rispetto alla direzione verticale con velocità iniziale nulla. Determinare la velocità e la tensione del filo quando passa per la posizione  $\theta=0^\circ$ .

**Forza elastica**

1. Un corpo di massa  $m=0.5$  kg è legato all'estremità di una molla di costante elastica  $k=10$  N/m, e si può muovere su un piano privo di attrito. L'altra estremità della molla è fissata al piano. Se la molla viene allungata di  $\Delta x=3$  cm rispetto alla lunghezza di riposo e il corpo viene lasciato in quiete in questa posizione, determinare l'equazione del moto del corpo e la massima velocità del corpo durante il suo moto.
2. Una molla legata al soffitto ha una costante  $k=100$  N/m. Ad essa viene attaccata una massa  $m=0.5$  kg. Determinare l'allungamento della molla  $Dx$  per la quale la massa si troverà in una situazione di equilibrio.
3. Una molla legata al soffitto ha una costante  $k=50$  N/m. Ad essa è attaccata una massa  $m=0.5$  kg. Il sistema viene lasciato libero di muoversi con la massa ferma quando la molla è alla sua lunghezza di riposo. Scrivere l'equazione della dinamica e determinare il moto della massa. Calcolare il massimo allungamento della molla, e la velocità del corpo nel punto di equilibrio del sistema.
4. Un sistema massa-molla con  $m=1.0$  kg e  $k=100$  N/m è appoggiato su un piano inclinato con angolo alla base  $\theta=30^\circ$ . L'estremità della molla è legata alla cima del piano. Determinare l'allungamento  $x_{eq}$  della molla per il quale il sistema massa-molla è in equilibrio.
5. Nel caso dell'esercizio precedente, si determini la legge del moto intorno al punto di equilibrio, se la massa viene allontanata di uno spazio  $\Delta x=2 x_{eq}$  e poi lasciata con velocità iniziale nulla.

**Attrito radente**

1. Un blocchetto di massa  $m=500$  g poggia su di un piano orizzontale scabro con coefficiente di attrito dinamico  $\mu_d=0.3$ . Si applicano al blocchetto due forze: la prima  $F_1$  di 10 N nel verso crescente dell'asse  $x$ , la seconda di 7 N nel verso opposto. Il blocchetto inizia a muoversi. Determinare in quanto tempo il blocchetto si sposta di un metro e la sua velocità in questa condizione.

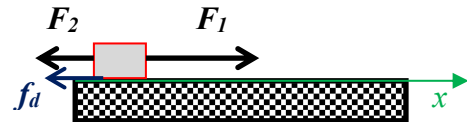
*Esempio di svolgimento*

La forza complessiva agente sul blocchetto è data dalla risultante delle due forze  $F_1$  e  $F_2$  e della forza di attrito dinamico  $f_d$ , tutte dirette lungo l'asse  $x$  in figura. Per poter definire il verso della forza di attrito dobbiamo capire come si muoverebbe il corpo in assenza di attrito. In tale condizione il corpo sarebbe soggetta alla forza  $F_1+F_2=3$   $u_x$ , diretta nel verso positivo dell'asse  $x$ . Quindi la forza di attrito dinamico sarà  $f_d = -\mu_d N u_x$ , con  $N=mg$ , diretta come in figura. La forza risultante è

$$R = F_1 + F_2 - f_d = (F_1 + F_2 - \mu_d N) u_x$$

L'accelerazione  $a$  è:

$$a = R/m = (F_1 + F_2 - \mu_d N)/m u_x = a u_x \quad \text{con } a = 3.06 \text{ m/s}^2$$



Il moto è uniformemente accelerato, allora i moduli di spostamento,  $x(t)$ , e velocità,  $v(t)$ , seguono la legge

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 = \frac{1}{2} a t^2$$

$$v(t) = v_0 + a t = a t$$

Il blocchetto si sarà spostato di un metro nel tempo  $t^*$  tale che  $x^*=x(t^*)=1$  m, ovvero

$$t^* = \sqrt{\frac{2x^*}{a}} = 0.81 \text{ s}$$

e la sua velocità sarà  $v^* = a t^* = 2.47$  m/s.

*In alternativa si poteva anche applicare la relazione valida per il moto uniformemente accelerato  $v^2 - v_0^2 = 2 a \Delta x$ , che nel caso specifico assume la forma*

$$v = \sqrt{2ax^*} = 2.47 \text{ m/s}$$

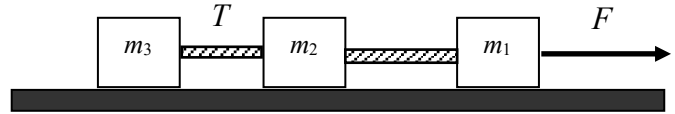
2. Un blocchetto viene lanciato con velocità  $v_0=1$  m/s su di un piano orizzontale scabro con coefficiente di attrito dinamico  $\mu_d=0.1$ . Determinare il tempo impiegato dal blocchetto a fermarsi.
3. Due blocchetti di masse  $m_1=2$  kg ed  $m_2=4$  kg si muovono, a contatto l'uno con l'altro, su di un piano orizzontale scabro sotto l'azione di una forza di modulo costante  $F=20$  N parallela al piano, applicata al blocchetto  $m_1$ . Il coefficiente d'attrito dinamico tra i blocchetti ed il piano vale  $\mu_d=0.2$ . Determinare le forze a cui sono soggetti i due blocchetti.
4. Un blocchetto di massa  $m=1$  kg è poggiato su di un piano orizzontale scabro, con coefficienti di attrito statico e dinamico  $\mu_s=0.7$  e  $\mu_d=0.4$ , rispettivamente. Si applica una forza verso il basso di intensità 15 N, che forma un angolo  $\theta=50^\circ$  con la direzione orizzontale. Si determini il modulo della reazione vincolare [Sugg.: si ricordi che la reazione vincolare comprende tutte le forze esercitate dal vincolo, quindi sia quella normale che quella d'attrito] .
5. Un blocchetto di massa 1 kg è poggiato su di un piano orizzontale scabro, con coefficienti di attrito statico e dinamico  $\mu_s=0.7$  e  $\mu_d=0.4$ , rispettivamente. Si applica una forza verso l'alto di 10 N, che forma un angolo  $\theta=50^\circ$  con la direzione orizzontale. Si determini il modulo della reazione vincolare.

### **Dinamica su piani inclinati scabri**

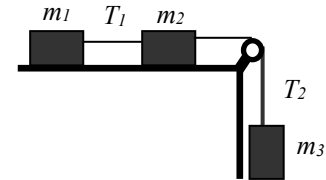
1. Un punto materiale viene lanciato, dal basso, lungo un piano inclinato con angolo alla base  $\theta=30^\circ$ , con velocità iniziale  $v_0=2$  m/s. Assumendo un coefficiente di attrito dinamico  $\mu_d=0.1$ , determinare la velocità del punto dopo che ha percorso una distanza  $d=4$  cm salendo lungo il piano.
2. Un punto materiale viene lanciato, dalla sommità di un piano inclinato con angolo alla base  $\theta=50^\circ$ , con velocità  $v_0=1$  m/s. Assumendo un coefficiente di attrito dinamico  $\mu_d=0.1$ , determinare la posizione del punto dopo 1 secondo dal lancio.
3. Dato un piano inclinato, determinare il minimo angolo del piano affinché un corpo, poggiato in quiete, cominci a scendere lungo il piano. Si assuma un coefficiente d'attrito statico  $\mu_s=0.3$ .
4. Un punto materiale scende lungo un piano inclinato ( $\theta=45^\circ$ ). Determinare il coefficiente d'attrito dinamico affinché il moto sia uniforme.
5. Un punto materiale di massa  $m=1$  kg viene lanciato, dal basso, lungo un piano inclinato con angolo alla base  $\theta=45^\circ$ , con velocità iniziale  $v_0=5$  m/s. Assumendo un coefficiente di attrito dinamico  $\mu_d=0.2$  e statico  $\mu_s=0.4$ , determinare: i) l'altezza  $h$  raggiunta dal punto nel suo moto di ascesa; ii) se il punto, dopo essersi fermato, riscende lungo il piano inclinato, e in caso affermativo dopo quanto tempo e con che velocità arriva alla base del piano inclinato nel moto di discesa.
6. Un punto materiale di massa  $m=2$  kg viene lanciato, dal basso, lungo un piano inclinato con angolo alla base  $\theta=10^\circ$ , con velocità iniziale  $v_0=2$  m/s. Assumendo un coefficiente di attrito dinamico  $\mu_d=0.1$  e statico  $\mu_s=0.3$ , determinare: i) dopo quanto tempo si ferma nel suo moto di ascesa; ii) se il punto, dopo essersi fermato, riscende lungo il piano inclinato.

**Dinamica di punti collegati tra loro.**

1. Tre blocchi collegati fra loro come in figura si muovono verso destra su un piano liscio a causa dell'azione della forza orizzontale  $F=65.0$  N applicata al blocco di massa  $m_1$ . Considerando  $m_1=31.0$  kg,  $m_2=24.0$  kg ed  $m_3=12.0$  kg, si determini l'accelerazione del sistema e la tensione  $T$  agente sulla massa  $m_3$ .



2. Tre blocchetti di massa  $m_1=m_2=10$  kg ed  $m_3=15$  kg sono collegati per mezzo di fili inestensibili come in figura. Il sistema è privo di attrito. Si determini il valore dell'accelerazione  $a$  dei blocchetti e la tensione  $T_1$  nel filo orizzontale.

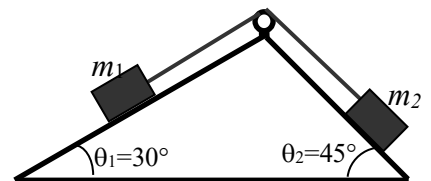


3. Due blocchetti di masse  $m_1=200$  g ed  $m_2=500$  g sono collegati da un filo inestensibile e di massa trascurabile e possono muoversi su di un piano orizzontale scabro, con coefficiente di attrito  $\mu_d=0.1$ . Il corpo  $m_1$  viene tirato da una forza di modulo costante  $F=10$  N parallela al piano; il corpo  $m_2$  viene a sua volta tirato dal corpo  $m_1$  tramite il filo che li collega. Determinare la tensione del filo.

4. Due blocchetti di masse  $m_1=500$  g ed  $m_2=300$  g sono appesi ai capi di un filo inestensibile di massa trascurabile, che passa nella gola di una carrucola di massa trascurabile. I due blocchetti vengono lasciati liberi di muoversi. Determinare il modulo dell'accelerazione dei due blocchetti.

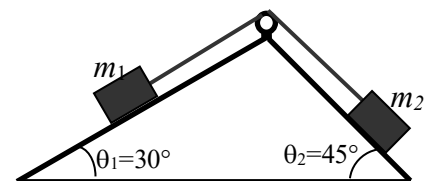
5. Due blocchi di masse  $m_1=500$  g ed  $m_2=800$  g scendono lungo un piano inclinato liscio con  $\theta=45^\circ$ , procedendo a contatto l'uno con l'altro. Il blocco  $m_1$  precede il blocco  $m_2$ . Si determinino le forze a cui sono soggetti i due blocchi.

6. Due corpi di masse  $m_1=1$  kg ed  $m_2=0.4$  kg sono collegati da un filo inestensibile e di massa trascurabile e sono disposti su due piani inclinati lisci con angoli alla base  $\theta_1=30^\circ$  e  $\theta_2=45^\circ$  (vedi figura). I due piani sono uniti per il lato verticale ed il filo passa in un piolo privo d'attrito posto alla sommità dei due piani. Determinare l'accelerazione dei due punti materiali e la tensione del filo.

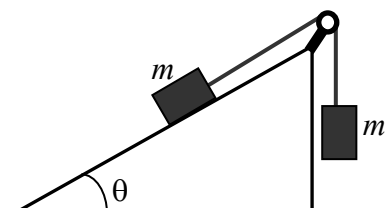


7. Un punto materiale di massa  $m_1=300$  g è posto in quiete ai piedi di un piano inclinato ( $\theta=30^\circ$ ,  $L=1.5$  m) ed è collegato tramite un filo inestensibile e di massa trascurabile ad un secondo punto materiale di massa  $m_2=500$  g attraverso una carrucola di massa trascurabile. Dopo quanto tempo il corpo di massa  $m_2$  arriva al suolo?

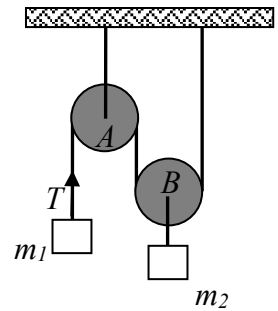
8. Nel sistema in figura, le due masse sono collegate con un filo inestensibile privo di massa che passa nella gola di un piolo senza attrito. I piani inclinati presentano un coefficiente di attrito  $\mu_d=0.15$ . Si calcoli l'accelerazione  $a$  delle masse e la tensione  $T$  del filo. Si consideri il caso  $m_1=1$  kg,  $m_2=1.5$  kg.



9. Nel sistema in figura, le due masse sono collegate con un filo inestensibile privo di massa che passa nella gola di un piolo senza attrito. Il piano inclinato presenta un coefficiente di attrito statico  $\mu_s=0.4$  e dinamico  $\mu_d=0.2$ . Si illustri cosa succede e si calcoli l'accelerazione  $a$  delle masse e la tensione  $T$  del filo. Si consideri il caso  $m=1$  kg e  $\theta=45^\circ$ .



10. Nel sistema in figura, le pulegge A e B sono prive di massa e senza attrito e le masse sono  $m_1=1.0$  kg e  $m_2=4$  kg. Si determini il valore dell'accelerazione  $a_1$  della massa  $m_1$  e la tensione del filo  $T$ .



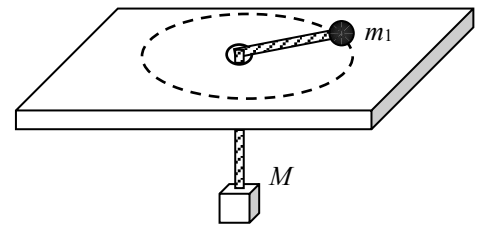
**Forze centripete**

1. Un'auto percorre una curva di raggio  $R=100$  m. Determinare la massima velocità che può avere la macchina per non uscire fuori strada, assumendo un coefficiente di attrito statico  $\mu_s=0.1$ .

2. Un corpo di massa  $m=300$  g si muove su di un piano con moto circolare uniforme, sotto l'azione di una forza di modulo costante  $F=10$  N. Se la sua velocità vale in modulo  $v=1$  m/s, determinare il raggio della traiettoria descritta dal punto.

3. Un punto materiale di massa  $m=400$  g, collegato ad un centro O da un filo, si muove su di un piano orizzontale privo di attrito, di moto circolare uniforme. Assumendo  $\omega=2$  rad/s ed un raggio  $R$  della circonferenza pari a 80 cm, determinare il modulo della tensione del filo.

4. Una palla di massa  $m_1=0.5$  kg è legata ad una fune (priva di massa) e si muove su un piano orizzontale privo di attrito. Essa descrive una circonferenza di raggio  $R=2$  m compiendo un giro completo ogni 5 s. La fune, che passa in un foro praticato nel piano (vedi figura), è legata all'altra estremità ad un corpo soggetto all'azione della forza peso. Si determini la massa  $M$  del corpo nella condizione di equilibrio dinamico considerata.



5. Un pendolo conico di lunghezza  $L=1.0$  m e massa  $m=1.0$  kg ruota su una traiettoria circolare di raggio  $R=0.2$  m. Calcolare la velocità di rotazione  $\omega$  e la tensione del filo.

**Analisi dinamica con leggi di Newton e conservazione dell'energia**

1. Un punto materiale di massa  $m=0.4$  kg è poggiato su di un piano inclinato ( $\theta=30^\circ$ ,  $h=1.0$  m) senza attrito, ed è connesso all'estremo libero di una molla a riposo, di costante elastica  $k=10.0$  N/m. Determinare il massimo allungamento della molla in seguito alla discesa del punto lungo il piano inclinato.
2. Un punto materiale di massa  $m=0.7$  kg è posto sulla sommità di un piano inclinato ( $\theta=30^\circ$ ,  $h=1.0$  m). Ai piedi del piano inclinato è posta una molla di costante elastica  $k=20$  N/m. Determinare la massima compressione della molla in seguito alla discesa del punto lungo il piano inclinato.

*Esempio di svolgimento*

*Il sistema è schematizzato in figura. Durante la discesa l'energia potenziale del corpo si trasforma progressivamente in energia cinetica, e la sua velocità aumenta. Successivamente il corpo colpisce la molla fino ad arrestarsi, in modo che l'energia cinetica del corpo sia trasformata nell'energia potenziale della molla. Non essendovi l'azione di forze dissipative, l'energia si conserva, ovvero  $E_f=E_i$ .*

*Nella condizione iniziale il corpo è fermo ad un'altezza  $h$ , allora*

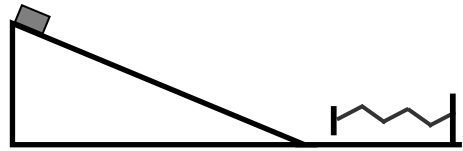
$$E_i = mgh$$

*Nella situazione finale, il corpo è di nuovo fermo a quota zero, mentre la molla è alla sua massima compressione  $\Delta x$ , quindi*

$$E_f = \frac{1}{2} k \Delta x^2$$

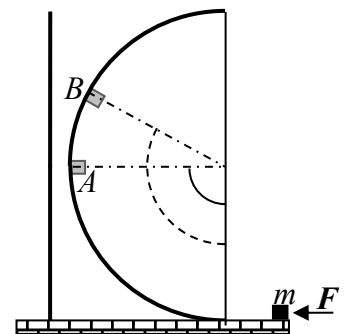
*Quindi, si ottiene*

$$\Delta x = \sqrt{\frac{2mgh}{k}} = 0.59 \text{ m}$$

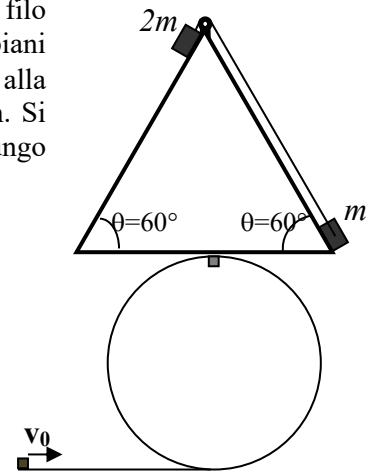


3. Risolvere l'esercizio precedente assumendo un coefficiente d'attrito dinamico  $\mu_d=0.1$  fra il punto materiale di massa  $m$  e la superficie del piano inclinato. Il piano orizzontale è liscio.
4. Un punto materiale di massa  $m=0.3$  kg viene appeso ad una molla di costante elastica  $k=10$  N/m, a riposo, disposta in direzione verticale. Determinare il massimo allungamento della molla in seguito al moto del punto.
5. Un punto materiale di massa  $m=1$  kg è poggiato (non vincolato) all'estremità di una molla di costante elastica  $k=10$  N/m, compressa di un tratto  $x=40$  cm. La molla viene lasciata libera di espandersi. Determinare l'istante in cui il punto materiale abbandona la molla ed il modulo della sua velocità. [Suggerimento: si tenga presente che il punto lascerà la molla quando il sistema massa-molla arriva ad un punto di equilibrio, e si ragioni sul moto che avrebbe in sistema massa-molla nel caso il punto materiale fosse vincolato].
6. Un punto materiale di massa  $m=0.50$  kg viene abbandonato in quiete ad un'altezza  $h=1.0$  m. Una molla di costante elastica  $k=40$  N/m è vincolata al suolo ed ha una lunghezza a riposo  $L=60$  cm. Determinare la massima compressione della molla.
7. Un punto materiale di massa  $m=0.50$  kg viene lanciato in direzione verticale con velocità  $v_0=5.0$  m/s. Ad un'altezza  $h=1$  m il punto inizia a comprimere una molla disposta verticalmente, di costante elastica  $k=10$  N/m. Determinare la massima altezza raggiunta dal punto materiale.
8. Un blocchetto di massa  $m=0.50$  Kg è sospeso da un lato ad un filo, teso in direzione verticale, e dall'altro ad una molla di costante elastica  $k=10$  N/m, allungata di un tratto  $x=30$  cm, sempre in direzione verticale. Si taglia il filo. Determinare la massima compressione della molla.

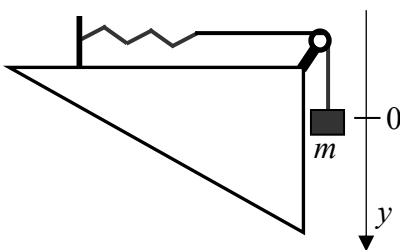
9. Un blocchetto di massa  $m=0.20$  kg è poggiato in quiete su di una molla di costante elastica  $k=10$  N/m, che giace sulla direzione verticale. Si imprime al corpo un impulso  $J=5.0$  Ns in direzione verticale verso il basso. Determinare la massima compressione della molla.
10. Un punto materiale di massa  $m=0.2$  kg si muove su di un piano orizzontale scabro ( $\mu_d=0.1$ ) con velocità  $v_0= 2$  m/s ed inizia a comprimere una molla di costante elastica  $k= 10$  N/m. Determinare la massima compressione della molla.
11. Un punto materiale viene lanciato lungo un piano inclinato ( $\theta=30^\circ$ ,  $L= 1$  m) verso l'alto a partire dalla base del piano. La sua velocità iniziale è  $v_0= 2$  m/s. Determinare se il blocchetto abbandonerà il piano inclinato.
12. Un blocchetto viene lanciato ai piedi di un piano inclinato liscio con velocità  $v_0=3$  m/s e angolo alla base di  $15^\circ$ . Il blocchetto abbandona il piano durante il suo moto. Determinare l'altezza massima raggiunta dal blocchetto durante il suo moto. Si consideri un'altezza del piano inclinato  $h=0.4$  m.
13. Un blocchetto viene lanciato dai piedi di un piano inclinato con velocità  $v_0=10$  m/s. Il piano presenta un coefficiente di attrito dinamico  $\mu_d=0.2$ . La lunghezza del piano inclinato è pari a  $L= 1$  m e l'angolo di inclinazione è  $\theta=45^\circ$ . Determinare il modulo della velocità con cui arriva al suolo il blocchetto.
14. Ad un pendolo di massa  $m=4.0$  kg e lunghezza  $L=1$  m, posto in quiete nella sua posizione di equilibrio, viene impartito un impulso pari a  $1.0$  N s. Determinare l'ampiezza del moto.
15. Un pendolo semplice di massa  $m=0.6$  kg viene abbandonato in quiete in posizione  $\theta=90^\circ$ . Determinare la massima tensione del pendolo durante il suo moto.
16. Un pendolo semplice di massa  $m=0.5$  kg e lunghezza  $L=1$  m viene abbandonato in quiete ad un angolo  $\theta=40^\circ$ . Determinare la tensione del filo per  $\theta=20^\circ$  e  $\theta=0^\circ$ .
17. Un pendolo semplice di lunghezza  $L=2$ m possiede una velocità angolare  $\omega=0.5$  rad/s per  $\theta=0^\circ$ . Determinare l'ampiezza del moto del pendolo.
18. Determinare la minima velocità che deve avere un pendolo semplice per  $\theta=0^\circ$  affinché arrivi nella posizione  $\theta=180^\circ$  con il filo teso. La lunghezza del pendolo sia  $L=1.5$ m.
19. Un punto materiale viene lanciato con velocità  $v_0$  orizzontale dal punto più basso di una guida circolare liscia di raggio  $R= 1$  m, disposta in verticale. Determinare la minima velocità  $v_0$  che deve avere il punto materiale affinché non si stacchi dalla guida durante il suo moto.
20. Un punto materiale viene abbandonato su di una calotta circolare liscia di raggio  $R$ . Determinare la posizione del distacco del punto materiale dalla calotta.
21. Al blocco di massa  $m=0.2$  kg in figura a lato, inizialmente in quiete, viene applicata la forza  $F$ , di modulo  $F=200$  N, per un tempo  $\Delta t=10^{-2}$  s. In conseguenza di ciò il blocco inizia a muoversi (in assenza di attrito) percorrendo una guida circolare di raggio  $R=1.0$  m. Si calcoli il modulo della reazione vincolare della guida nel punto A,  $N_A$ , e nel punto B,  $N_B$ , rispettivamente a  $\theta_A=90^\circ$  e  $\theta_B =120^\circ$  rispetto alla verticale.



22. Nel sistema in figura, i due corpi puntiformi sono collegati con un filo inestensibile privo di massa che passa nella gola di un piolo senza attrito. I piani inclinati presentano un coefficiente di attrito  $\mu_d=0.2$ . Il corpo di massa  $2m$  è alla sommità, e quello di massa  $m$  alla base del sistema equilatero di lato  $l=1$  m. Si calcoli la velocità  $v$  dei corpi quando questi hanno percorso una distanza  $l/2$  lungo i rispettivi piani inclinati.

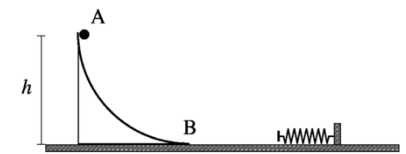


23. Un punto materiale di massa  $m=0.1$  kg viene lanciato con velocità iniziale orizzontale  $v_0$  lungo una guida circolare (vedi figura a lato), di raggio  $R=1.0$  m. Si determini il valore della minima velocità iniziale  $v_0$  della massa  $m$  affinché essa arrivi nella posizione verticale di altezza massima (vedi figura), senza staccarsi dalla guida.



24. Nel sistema in figura a lato, un punto materiale di massa  $m=1$  kg è collegato mediante un filo inestensibile privo di massa che passa nella gola di un piolo senza attrito all'estremità di una molla di costante elastica  $k=10$  N/m. Con la molla a riposo, il punto materiale si trova al livello  $y_0=0$  indicato in figura. Si determini: a) la posizione del punto materiale  $y_{eq}$  corrispondente alla configurazione di equilibrio del sistema; b) la velocità  $v$  del punto materiale nella configurazione in cui il suo dislivello rispetto alla quota  $y_0=0$  sia pari a  $2 y_{eq}$ .

25. Un punto materiale di massa  $m = 0.8$  kg, in quiete nella posizione A ad un'altezza  $h = 2.3$  m dal suolo, viene lasciato cadere lungo una guida circolare scabra (vedi figura). Giunto in B esso prosegue su un piano orizzontale liscio, finché non viene frenato da una molla di costante elastica  $k = 4 \times 10^3$  N/m. Ammettendo che la forza di attrito lungo la guida circolare abbia modulo costante pari a  $F_a = 0.2$  N, determinare la velocità in B, la massima compressione della molla  $\Delta x$  e il rapporto fra questo valore ( $\Delta x$ ) e quello che si avrebbe nel caso in cui la guida circolare fosse priva di attrito.



26. Un punto materiale viene lanciato su per un piano inclinato scabro con velocità iniziale  $v_0 = 4$  m/s. Dopo aver raggiunto la quota massima, inverte il suo moto e ritorna alla base del piano inclinato ripassando per il punto di partenza con una velocità pari a  $v_1 = 1$  m/s. Determinare la quota massima raggiunta.

**ALCUNI ESERCIZI DI DINAMICA IN SISTEMI NON INERZIALI**

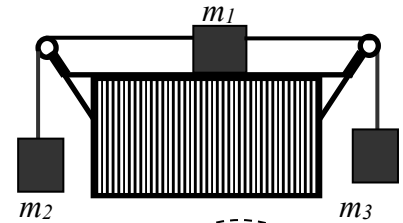
1. Un punto materiale è posto in contatto con una parete ruvida ( $\mu_s=0.1$ ) che si muove con accelerazione  $A$ . Determinare la minima accelerazione che deve avere la parete affinché il blocchetto rimanga in quiete rispetto al piano.
2. Un punto materiale è poggiato su di un piano orizzontale scabro ( $\mu_d=0.1$ ) di un carrello che si muove con accelerazione  $A=2 \text{ m/s}^2$ . Si imprime al punto materiale una velocità rispetto al carrello pari a  $v_0=1 \text{ m/s}$ , mantenendo costante l'accelerazione  $A$ . Determinare il tempo di arresto del blocchetto rispetto al carrello.
3. Un punto materiale viene lanciato dalla sommità di un piano inclinato ( $h=1, \theta=30^\circ$ ) che si muove con accelerazione  $A=1 \text{ m/s}^2$  in verso opposto al moto del punto materiale. Determinare la velocità del punto rispetto al piano inclinato quando raggiunge i piedi del piano inclinato.
4. Un punto materiale di massa  $m$  poggia sulla sommità di un piano inclinato di angolo  $\theta=30^\circ$  ed altezza  $h=1 \text{ m}$ . Al piano inclinato viene impressa un'accelerazione nel verso crescente dell'asse  $x$  pari ad  $A=2 \text{ m/s}^2$ . Determinare il tempo impiegato dal blocchetto ad arrivare ai piedi del piano inclinato e la sua velocità.
5. Nell'esercizio precedente determinare l'accelerazione  $A$  di trascinamento del piano inclinato affinché il punto materiale resti in quiete rispetto al piano inclinato.
6. Un punto materiale è poggiato sul piano orizzontale di un carrello lungo  $L=1 \text{ m}$ , alla sua estremità, in quiete rispetto al carrello. Tra il carrello ed il punto materiale l'attrito è trascurabile. Il carrello è accelerato con accelerazione  $A=2 \text{ m/s}^2$ . Determinare il tempo impiegato dal punto materiale a cadere dal carrello.
7. Un punto materiale di massa  $m=300 \text{ g}$  è poggiato sull'estremità di un carrello, in quiete rispetto al carrello. Tra il carrello ed il punto materiale l'attrito è trascurabile. Sull'altro estremo del carrello è posta una molla di costante elastica  $k=10 \text{ N/m}$  il cui estremo libero dista  $d=0.5 \text{ m}$  dal punto materiale. Il carrello è accelerato con accelerazione  $A=1 \text{ m/s}^2$ . Determinare la massima compressione della molla.
8. Risolvere l'esercizio precedente assumendo un coefficiente d'attrito dinamico  $\mu_d=0.1$  fra il punto materiale e la superficie del carrello.
9. Un cilindro cavo ruota con velocità angolare  $\omega$ , intorno al proprio asse. Un punto materiale viene posto all'interno del cilindro, a contatto con la parete. Assumendo un coefficiente d'attrito statico  $\mu_s=0.1$ , determinare la minima velocità angolare affinché il punto materiale rimanga in quiete rispetto al cilindro.
10. Nell'esercizio precedente, assumendo il doppio della velocità angolare minima, determinare il modulo della forza apparente cui è soggetto il punto materiale.

**SISTEMI DI PUNTI MATERIALI E CORPO RIGIDO**

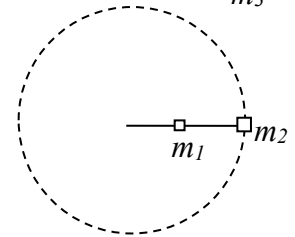
**A. Dinamica dei sistemi di punti materiali.<sup>1</sup>**

1) Due punti materiali di masse  $m_1=0.5$  kg ed  $m_2=1.0$  kg sono connessi alle estremità di una molla di costante elastica  $k=20$  N/m, compressa di una tratto  $d=0.5$  m. Si lascia la molla libera di espandersi. Determinare le velocità dei punti materiali dopo che si saranno distaccati dalla molla.

2) Un corpo di massa  $m_1=0.5$  kg è poggiato su di un piano orizzontale privo di attrito. Esso è collegato tramite due fili inestensibili e di massa trascurabile a due corpi di masse  $m_2=1.0$  kg ed  $m_3=2.0$  kg (vedi figura). Inizialmente il sistema è in quiete. Determinare lo spostamento del punto di massa  $m_1$  dopo un secondo.



3) Due corpi di masse  $m_1=0.5$  kg ed  $m_2=1.0$  kg sono collegati da fili inestensibili e di massa trascurabile come in figura. Il sistema ruota su di un piano orizzontale con velocità angolare  $\omega$ . La tensione massima raggiungibile dai fili è  $T_{max}=10$  N. Determinare la massima velocità angolare  $\omega$  affinché i fili non si spezzino, assumendo che il raggio della circonferenza sia  $R=1.0$  m e che la massa  $m_1$  si trovi alla distanza  $R/2$  dal centro.



4) Dati due punti materiali di masse  $m_1=2$  kg ed  $m_2=3$  kg a distanza  $d=1$  m tra loro, determinare le distanze del centro di massa dai punti.

5) Dati tre punti con coordinate  $P_1(1,2,1)$ ,  $P_2(6,2,4)$  e  $P_3(3,3,3)$  di masse  $m_1=2.0$  kg,  $m_2=3.0$  kg ed  $m_3=4.0$  kg, determinare le coordinate del centro di massa del sistema.

6) Determinare la posizione del centro di massa di un sistema di tre punti di eguale massa  $m=1.0$  kg, posti ai vertici di un triangolo equilatero di lato  $l=0.5$  m. Si scelga un sistema di riferimento con l'asse  $x$  passante per i punti  $P_1$  e  $P_2$ , con origine in  $P_1$ , e l'asse  $y$  nel semipiano contenente il punto  $P_3$ .

7) Un proiettile viene sparato con velocità in modulo pari a  $v_0=2$  m/s, in una direzione che forma un angolo di  $45^\circ$  rispetto alla direzione orizzontale. Raggiunto la massima quota il proiettile esplose in aria in tre frammenti. Determinare la posizione del centro di massa del sistema dopo che i frammenti hanno raggiunto il suolo. Si trascuri la resistenza dell'aria.

8) Un punto materiale di massa  $m_1=1.0$  kg viene poggiato in quiete sulla sommità di un piano inclinato ( $m_2=5.0$  kg,  $\theta=30^\circ$ ,  $h=1.0$  m). Tra il punto materiale ed il piano inclinato e quest'ultimo ed il piano orizzontale d'appoggio l'attrito è trascurabile. Si lascia il punto materiale libero di muoversi. Determinare le velocità del punto materiale e del piano inclinato dopo che il punto materiale ha abbandonato il piano inclinato.

9) Una persona di massa  $m=60$  Kg si trova all'estremità di una zattera di forma rettangolare di lunghezza  $d=2.0$  m e massa  $M=150$  Kg. Trascurando l'attrito della zattera con l'acqua, determinare la posizione finale della persona in un sistema di riferimento nel quale l'estremità sinistra della zattera all'inizio occupa l'origine dell'asse  $x$ , una volta che la persona si è portata sull'altra estremità della zattera.

<sup>1</sup> Alcuni degli esercizi possono anche essere risolti senza ricorrere necessariamente alla dinamica dei sistemi di punti materiali, ma studiando la dinamica dei singoli punti materiali come fatto per i casi in cui ci sono più punti vincolati fra loro.

10) Una tavola di lunghezza  $L=3.0$  m e massa  $M=20$  Kg poggia su di un piano orizzontale senza attrito. Una persona di massa 60 Kg cammina sulla tavola partendo dal suo estremo e portandosi nel centro della tavola stessa. Determinare lo spostamento della tavola rispetto al piano orizzontale di appoggio.

11) Nell'esercizio precedente determinare a che altezza dal suolo si situa il centro di massa del sistema tavola + persona, assumendo trascurabile lo spessore della tavola e assimilando la persona ad un'asta omogenea di altezza 1.80 m.

12) Due punti materiali di eguale massa  $m=0.5$  kg sono legati tra loro da una sbarretta di massa trascurabile e ruotano senza attrito in un piano orizzontale rispetto al centro della sbarretta. Nella situazione iniziale la sbarretta è lunga  $d=30$  cm e la velocità angolare ha il valore costante  $\omega=2.0$  rad/s. Supponiamo che la sbarretta sia telescopica e che, durante il moto, la distanza tra i punti venga ridotta a  $d'=20$  cm. Calcolare il valore finale della velocità angolare.

13) Nell'esercizio precedente si calcoli il lavoro effettuato dalle forze interne al sistema.

14) Due masse  $m_1=1.0$  kg ed  $m_2=2.0$  kg sono collegate da un filo inestensibile e di massa trascurabile che passa nella gola di una carrucola anch'essa di massa trascurabile. Si osserva che il corpo  $m_2$  si abbassa di 1.5 m. Determinare il lavoro totale effettuato sul sistema dei due punti.

## B. Dinamica del corpo rigido<sup>2</sup>

1) Un cilindro omogeneo, abbandonato in quiete sulla sommità di un piano inclinato ( $\theta=45^\circ$ ). Determinare il minimo coefficiente d'attrito affinché si abbia un moto di puro rotolamento.

2) Assumendo un coefficiente d'attrito doppio rispetto a quello determinato nell'esercizio precedente, si determini in quanto tempo il cilindro raggiunge la base del piano inclinato partendo da un'altezza  $h=1$  m.

3) Una sfera viene lanciata dai piedi di un piano inclinato ( $\theta=30^\circ$ ,  $h=1$  m) con velocità  $v_0=2.0$  m/s. Determinare il minimo coefficiente d'attrito affinché si abbia un moto di puro rotolamento. Assumendo questo coefficiente d'attrito determinare il tempo impiegato dalla sfera a percorrere una distanza pari ad  $L/2$ , con  $L=2$  m lunghezza del piano inclinato.

4) Un disco omogeneo di massa  $m=1.0$  kg e raggio  $R=50$  cm, ha una velocità angolare iniziale pari a  $\omega=5.0$  rad/s. Assumendo un momento d'attrito sull'asse in modulo pari a  $M_O=10$  Nm, determinare il numero di giri effettuato dal disco prima di fermarsi (O è il polo sull'asse di rotazione).

5) Su di un disco omogeneo di massa  $m=1.0$  kg e raggio  $R=1.0$  m, a contatto con il suolo viene applicato un momento pari a  $M_O=7.0$  Nm (O è il polo sull'asse di rotazione passante per il centro di massa). Assumendo un moto di puro rotolamento, si determini lo spazio percorso in 5 secondi.

6) Su di un disco omogeneo, a contatto con il suolo, viene applicata una forza costante di modulo  $F=15.0$  N nel suo centro di massa. Assumendo un moto di puro rotolamento, si determini il modulo della forza d'attrito statico a cui è soggetto il disco.

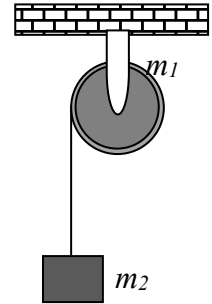
---

<sup>2</sup> Per i momenti di inerzia si veda la tabella nel testo e si consideri, ove necessario, il teorema di Huygens-Steiner.

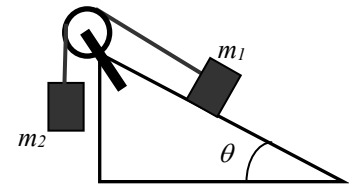
7) Nell'esercizio precedente si determini il massimo valore della forza  $F$  affinché il disco abbia un moto di puro rotolamento. Si assuma un coefficiente d'attrito statico  $\mu_s$  pari a 0.3.

8) Un'asta di massa  $m=1.0$  kg e lunghezza  $L=1.0$  m, vincolata a ruotare intorno ad un asse orizzontale, viene abbandonata in quiete in posizione  $\theta=90^\circ$ . Determinare la velocità del centro di massa quando l'asta passa per la posizione verticale.

9) Due corpi di masse  $m_1=3$  kg ed  $m_2=1$  kg sono appesi ai capi di un filo inestensibile e di massa trascurabile che passa su una carrucola di massa  $m_3=5$  kg e raggio  $R=0.5$  m. Determinare il modulo dell'accelerazione dei corpi e la tensione dei fili.



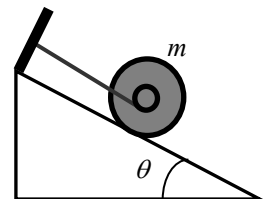
10) Un disco omogeneo di massa  $m_1=3.0$  kg è incernierato ad un asse orizzontale attorno al quale può ruotare senza attrito, vedi figura. Sul cilindro è avvolto un filo inestensibile, di massa trascurabile, alla cui estremità libera è fissato un corpo di massa  $m_2=1.0$  kg. Il corpo, lasciato libero sotto l'azione della forza peso scende lungo la verticale. Si determini il tempo impiegato dal corpo a scendere di un tratto  $h$  pari a 50 cm.



11) Un corpo di massa  $m_1=1.0$  kg è posto su un piano inclinato ( $\theta=30^\circ$ ) ed è collegato ad un filo inestensibile di massa trascurabile che passa nella gola di una carrucola di massa  $m_3=5.0$  kg posta alla sommità del piano inclinato. All'altro capo del filo è appeso un secondo corpo di massa  $m_2=3.0$  kg. Determinare di quanto si è abbassato il corpo  $m_2$  dopo un secondo.

12) Un cilindro di massa  $m_1=6.0$  kg e raggio  $R$  è posto in quiete ai piedi di un piano inclinato scabro con angolo  $\theta=30^\circ$ ; all'asse del cilindro è collegato un filo che passa attraverso la gola di un piolo (privo di attrito) posta alla sommità del piano inclinato. All'altro capo del filo è appesa una massa  $m_2=8.0$  kg. Il filo è inizialmente teso. Si lascia il sistema libero di muoversi; il cilindro  $m_1$  si muove con un moto di puro rotolamento. Determinare l'accelerazione del corpo  $m_2$ .

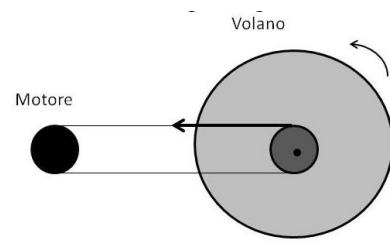
13) Nel sistema in figura, il cilindro di massa  $m=1.0$  kg e raggio  $R$  è collegato ad un filo inestensibile tramite un piccolo tamburo di raggio  $R/4$  e massa trascurabile. Il cilindro rotola verso il basso lungo il piano inclinato, privo di attrito, con angolo alla base  $\theta=10^\circ$ . Si calcoli l'accelerazione  $a_{cm}$  del cilindro e la tensione  $T$  del filo.



14) Un anello di materiale omogeneo, avente raggio 7.0 cm e massa 1.5 kg, parte da fermo e rotola, senza scivolare, per una distanza di 3.7 m lungo un tetto spiovente che ha un'inclinazione rispetto all'orizzontale di  $20^\circ$ . Qual è la velocità angolare dell'anello quando cade dal tetto? Dove impatterà al suolo il centro di massa se il tetto è alto  $H = 10$  m? (il momento di inerzia dell'anello sottile è pari a  $MR^2$ , dove  $M$  è la massa dell'anello e  $R$  è il raggio).

15) Un motore elettrico fa girare un volano mediante una catena come in figura. Il volano è un cilindro omogeneo di diametro 80 cm e massa 10 kg che ruota intorno al suo asse. La ruota dentata alla quale

è connessa la catena ha massa trascurabile ma diametro 20 cm. Partendo da fermo il volano raggiunge, con accelerazione costante, sotto l'azione del motore, la velocità angolare di 10 rad/s dopo avere effettuato 4 giri; e la tensione nel punto più alto della fascia è 100 N. Determinare: l'accelerazione angolare del moto, il valore della tensione nel punto più basso della catena ed il lavoro compiuto dal motore nei 4 giri e la potenza media da esso erogata. (Il momento di inerzia di un cilindro intorno ad un asse passante per il suo centro di massa è pari a  $\frac{1}{2} MR^2$ ).

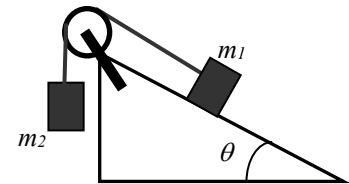


### C. Statica del corpo rigido<sup>3</sup>

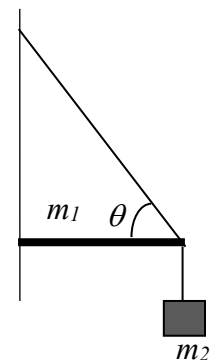
1) Un'asta di massa  $m=10$  kg è poggiata su due supporti  $P_1$  e  $P_2$  che distano  $d_1=0.4$  m e  $d_2=1$  m dal centro di massa dell'asta. Determinare le reazioni  $F_1$  ed  $F_2$  dei due supporti.

2) Un'asta di massa  $m=2.0$  kg è appoggiata con un estremo ad un muro verticale e con l'altro estremo al suolo. L'attrito sul muro sia trascurabile, mentre sul suolo ci sia attrito. Determinare il modulo della reazione esplicita dal suolo, assumendo che l'asta formi un angolo  $\theta=45^\circ$  con la direzione verticale.

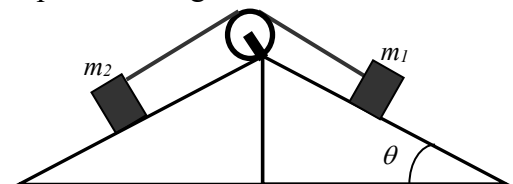
3) Nel sistema in figura  $m_1=1.0$  kg è posto su un piano inclinato ( $\theta=30^\circ$ ) ed è collegato ad un filo inestensibile di massa trascurabile che passa nella gola di una carrucola di massa  $m_3=5.0$  kg posta alla sommità del piano inclinato. All'altro capo del filo è appeso un secondo corpo di massa  $m_2=3.0$  kg. Determinare il valore del minimo coefficiente di attrito statico  $\mu_s$  fra piano ed  $m_1$  affinché il sistema sia in equilibrio.



4) Un'asta di massa  $m_1=5.0$  kg e lunghezza  $l=3.0$  m sorregge una massa  $m_2=10$  kg, come in figura ( $\theta=45^\circ$ ). L'asta è vincolata alla parete mediante un perno in modo da non scivolare. Determinare la tensione del filo che regge l'asta  $T$  e il modulo della forza di reazione  $R$  esercitata dal perno.



5) Nel sistema in figura  $m_1=2.0$  kg e  $m_2=4.0$  kg sono poste su una struttura con piani inclinati ( $\theta=30^\circ$ ) ed collegate ad un filo inestensibile di massa trascurabile che passa nella gola di una carrucola di massa  $m_3=10$  kg posta alla sommità del piano inclinato. Determinare il valore del minimo coefficiente di attrito statico  $\mu_s$  fra piano ed corpi  $m_1$  ed il piano affinché il sistema sia in equilibrio. Si consideri che  $m_2$  si trova su un piano liscio.



<sup>3</sup> Per i momenti di inerzia si veda la tabella nel testo e si consideri, ove necessario, il teorema di Huygens-Steiner.

