# 29. Funzioni discontinue. Classificazione dei punti di discontinuita.

# Punti di discontinuità

• se $f$ è definita in un intervallo $[a,b]$ escluso al più un punto $x_0$

oppure

• se $f$ non è continua in un punto $x_0$

si dice che il punto $x_0$ è un

punto singolare oppure punto di discontinuità

# Punti di discontinuità

I punti di discontinuità si dividono in tre specie:

I, II e III specie. I punti di III specie si chiamano anche punti di discontinuità eliminabile

# Riepilogo

| Punti di discontinuita | | |
|---|---|---|
| I specie | Esistono finiti il limite destro ed il limite sinistro di f ma sono diversi tra loro | $l_1 = \lim_{x \to x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \to x_0^+} f(x) = l_2$ |
| II specie | almeno uno dei due limiti destro o sinistro di f è infinito oppure non esiste. | $\lim_{x \to x_0^{\mp}} f(x) = \infty \; o$ <br> $\lim_{x \to x_0^{\mp}} f(x) = non\ esiste$ |
| III specie (discontinuità eliminabile) | se in tale punto esiste finito il limite di f | f non è definita o <br> $\lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$ |

# Punti di discontinuità di I specie

Si dice che nel punto $x_0$ una funzione $f$ ha una discontinuità di I specie se in tale punto esistono finiti il limite destro ed il limite sinistro di $f$ ma sono diversi tra loro.

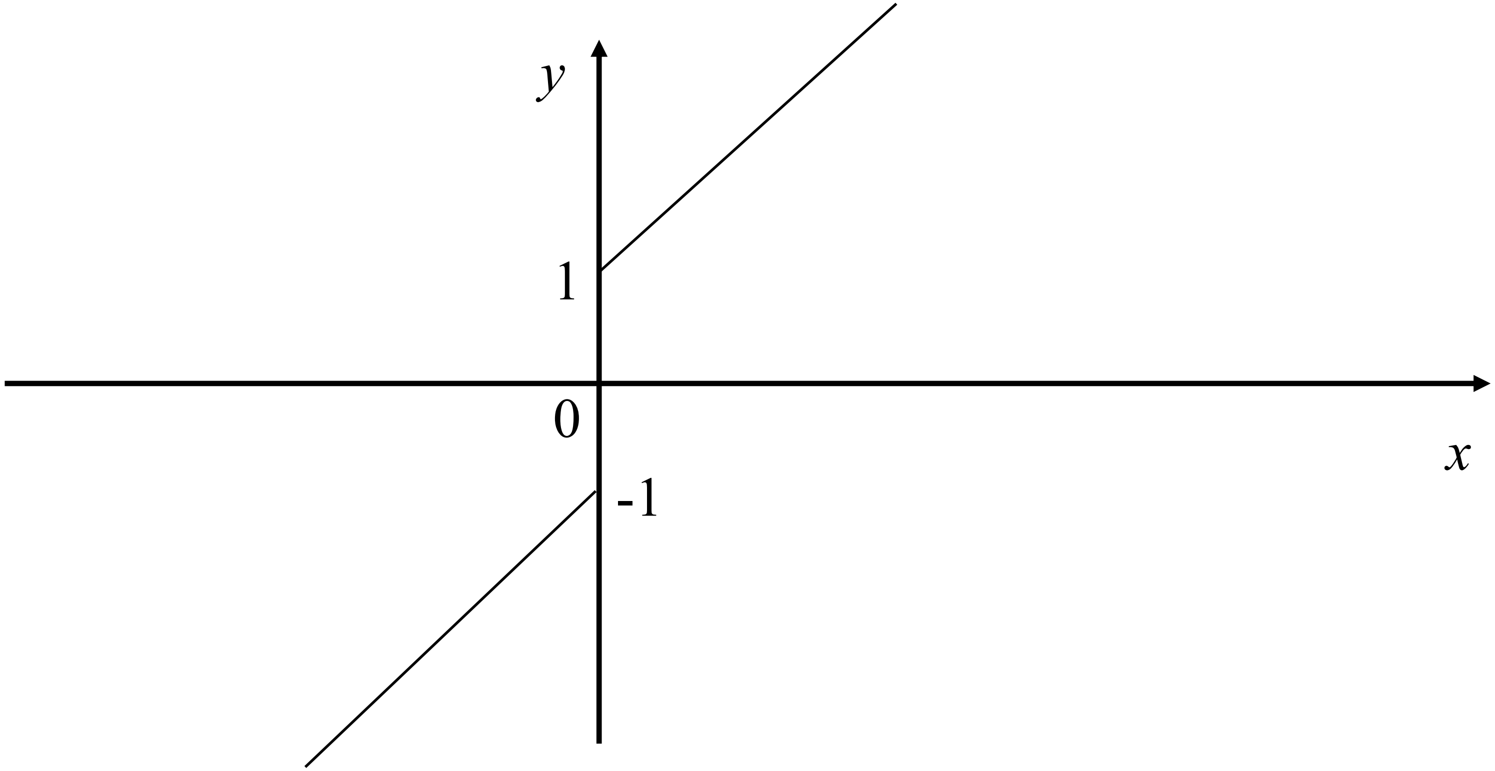
Cioè

$$l_1 = \lim_{x \to x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \to x_0^+} f(x) = l_2$$

# Punti di discontinuità di I specie

**Esempio.** La funzione $f(x) = x + \frac{|x|}{x} = \begin{cases} x+1, \text{ se } & x>0 \\ x-1, \text{ se } & x<0 \end{cases}$

presenta in $x = 0$ una discontinuità di I specie.




Infatti: $1 = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -1$

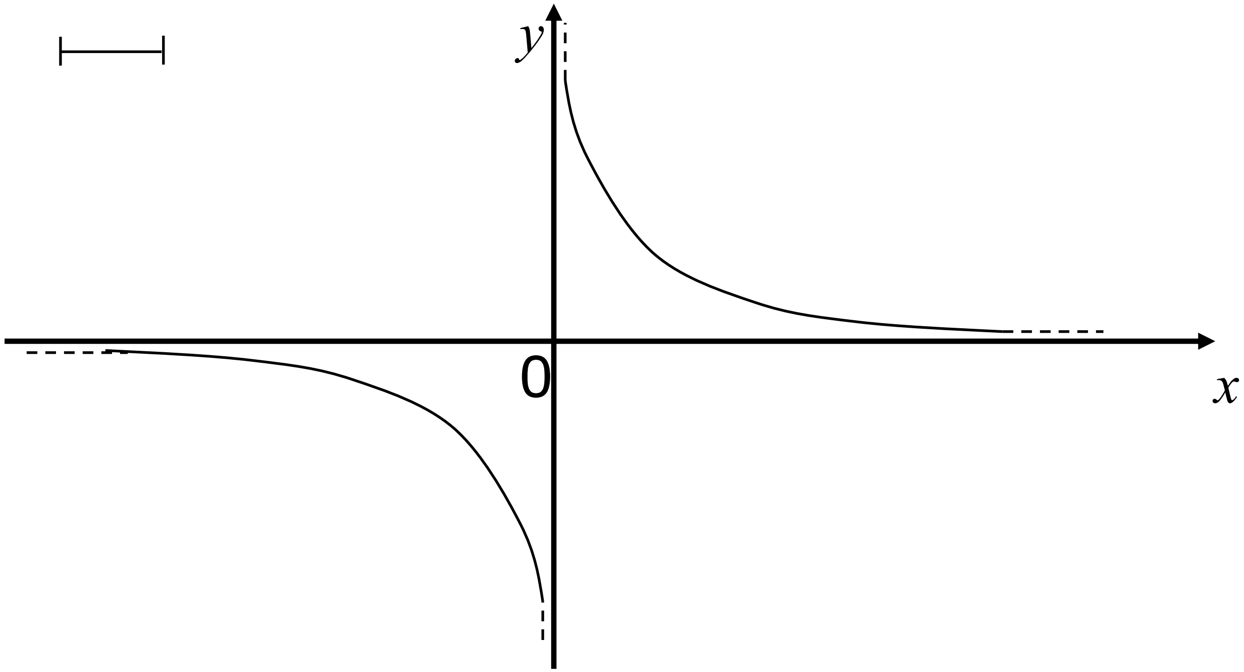
# Punti di discontinuità di II specie

Si dice che nel punto $x_0$ una funzione $f$ ha una discontinuità di II specie se in tale punto almeno uno dei due limiti destro o sinistro di $f$ è infinito oppure non esiste.

# Punti di discontinuità di II specie

Esempio. La funzione $f(x) = \dfrac{1}{x}$

presenta in $x = 0$ una discontinuità di II specie.




Infatti: $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$ e $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty$

# Punti di discontinuità di II specie

**Esempio.** La funzione $f(x) = 2^{\frac{1}{x}}$

presenta in $x = 0$ una discontinuità di II specie.

Infatti: $\lim_{x \to 0^+} 2^{\frac{1}{x}} = +\infty$ e $\lim_{x \to 0^-} 2^{\frac{1}{x}} = 0$

# Punti di discontinuità di II specie: osservazione

In definitiva, la presenza di asintoti verticali è rappresentativa di discontinuità di II specie

# Punti di discontinuità eliminabile (III specie)

Si dice che nel punto $x_0$ una funzione $f$ ha una discontinuità eliminabile se in tale punto esiste finito il limite di $f$ ma $f$ in tale punto:

non è definita

oppure

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$$

# Punti di discontinuità eliminabile (III specie)

Esempio. La funzione $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$

presenta nel punto $x = 0$ una

discontinuità eliminabile

Infatti:

- f non è definita in $x = 0 \Rightarrow \nexists\, f(0)$
- però esiste $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

# Riepilogo

| Punti di discontinuita | | |
|---|---|---|
| I specie | Esistono finiti il limite destro ed il limite sinistro di f ma sono diversi tra loro | $l_1 = \lim_{x \to x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \to x_0^+} f(x) = l_2$ |
| II specie | almeno uno dei due limiti destro o sinistro di f è infinito oppure non esiste. | $\lim_{x \to x_0^{\mp}} f(x) = \infty \; o$ <br> $\lim_{x \to x_0^{\mp}} f(x) = non\ esiste$ |
| III specie (discontinuità eliminabile) | se in tale punto esiste finito il limite di f | f non è definita o <br> $\lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$ |