28. Teoremi sulle funzioni continue: teorema degli zeri, teorema di Weistrass, teorema dei valori intermedi.

Funzioni continue

Abbiamo già dato la definizione di funzione continua in un punto interno all'intervallo di definizione e di funzione continua in tutto il proprio intervallo di definizione

Definizione f continua nell'intervallo

Def. Sia f una funzione a valori reali definita in un intervallo I (limitato o illimitato).

Si dice che f è continua nel proprio intervallo di definizione I se è continua in ogni punto interno all'intervallo di definizione I:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0), \forall x_0 \in I$$

Funzioni continue

- somma o differenza di funzioni continue in un punto è ancora una funzione continua nello stesso punto
- prodotto di funzioni continue in un punto è ancora una funzione continua nello stesso punto
- rapporto di funzioni continue in un punto è ancora una funzione continua nello stesso punto
- la funzione composta di funzioni continue in un punto è ancora una funzione continua nello stesso punto

$$\Downarrow$$

Studiamo altre proprietà delle funzioni continue

Teorema di Weierstrass

Se $f(x)$ è una funzione continua in un intervallo $[a,b]$ chiuso e limitato

$$\Downarrow$$

$f(x)$ è dotata di minimo e di massimo assoluti in $[a,b]$

Cioè, esistono due punti $x_1, x_2 \in [a,b]$:

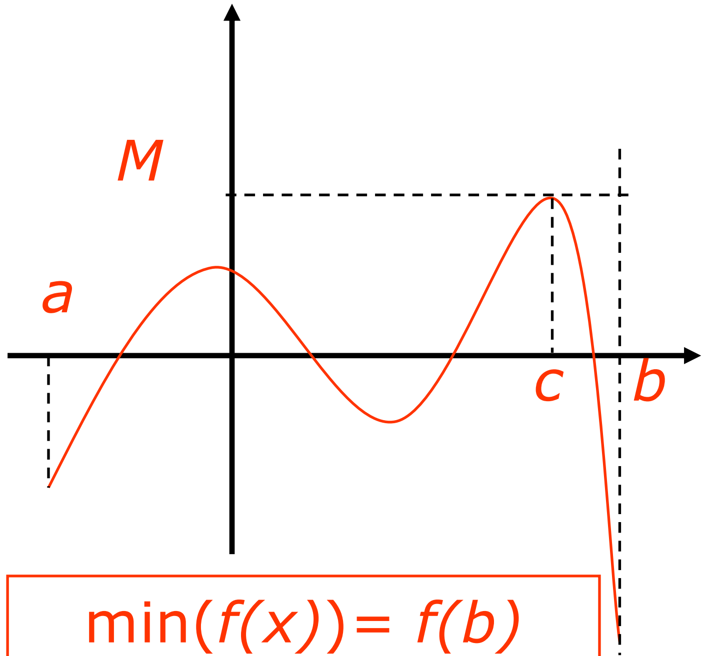
$$M = f(x_1) \geq f(x) \quad \text{e} \quad m = f(x_2) \leq f(x), \quad \forall x \in [a,b]$$

Teorema di Weierstrass

$f:[a,b]\rightarrow B$ con

$f(x)$ continua

La funzione *f(x)* assume minimo e massimo assoluto in [a,b]



min(*f(x)*)= *f(b)*
max(*f(x)*)=*M*=*f(c)*

Questo teorema dice semplicemente che il grafico di una funzione continua in un intervallo chiuso ammette un valore minimo e un valore massimo per le ordinate (*se faccio un cammino "senza salti", alla fine della giornata avrò registrato due punti di minima e massima altitudine raggiunti)*.

Massimo assoluto

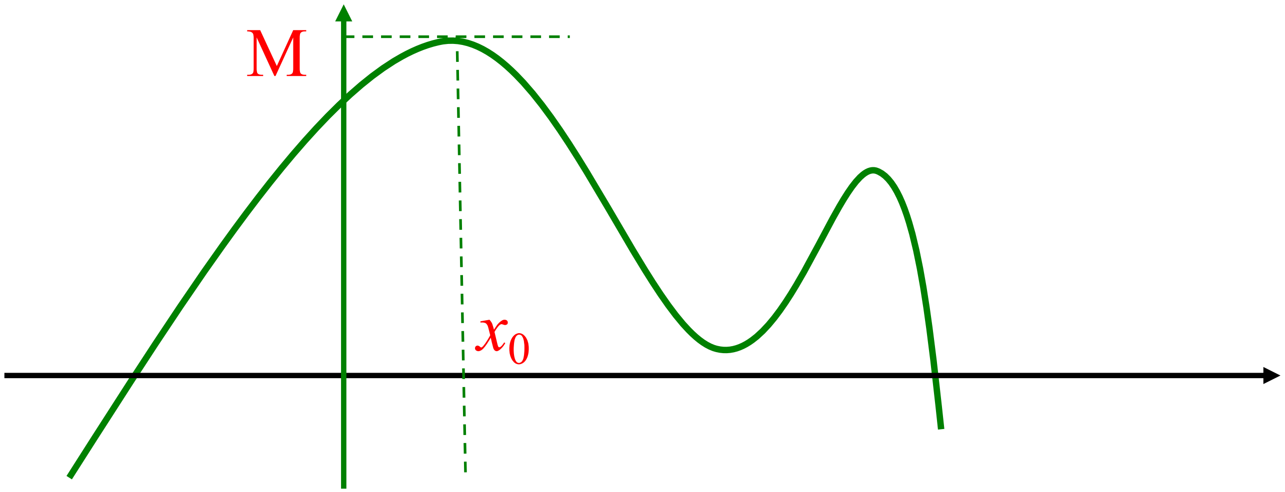
Def. Assegnata una funzione

$$f\colon A \longrightarrow B, \text{ con } A, B \subseteq R,\ A, B \neq \emptyset$$

• si dice che il numero reale M è il massimo assoluto di f se M è un valore appartenente all'immagine di f e se è il più grande valore

$$M = \max f \Leftrightarrow \begin{cases} \exists x_0 \in A : f(x_0) = M \\ \forall x \in A, f(x) \leq M \end{cases}$$

x_0 punto di massimo assoluto



Minimo assoluto

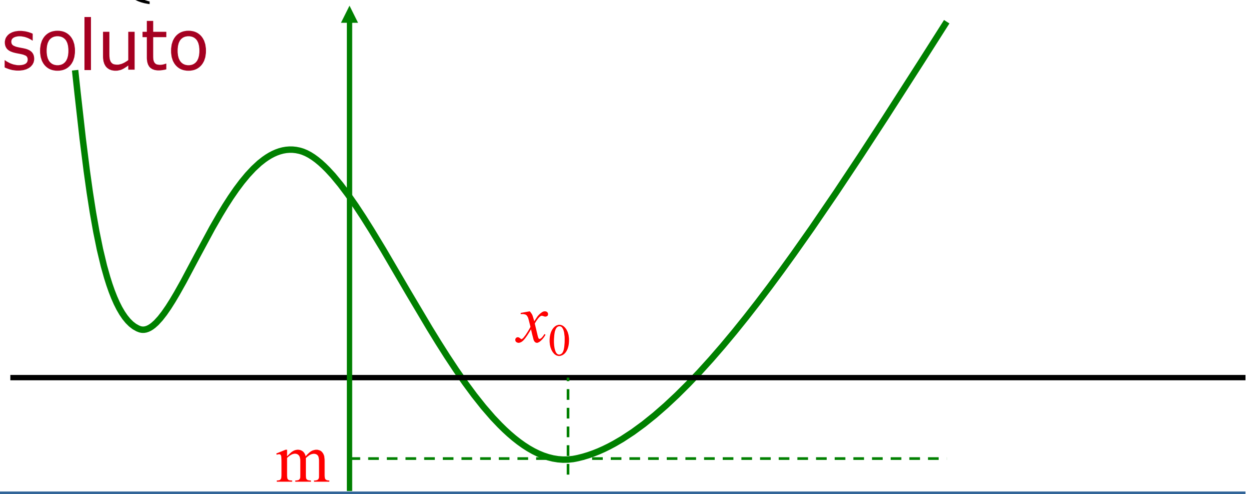
Def. Assegnata una funzione

$$f\colon A \longrightarrow B, \text{ con } A, B \subseteq R,\ A, B \neq \varnothing$$

• si dice che il numero reale m è il minimo assoluto di f se m è un valore appartenente all'immagine di f e se è il più piccolo valore

$$m = \min f \Leftrightarrow \begin{cases} \exists x_0 \in A : f(x_0) = m \\ \forall x \in A, f(x) \geq m \end{cases}$$

x_0 punto di minimo assoluto



Teorema di Weierstrass: osservazioni

Le 3 ipotesi del teorema di Weierstrass sono:

1. $[a,b]$ Intervallo limitato

2. $[a,b]$ Intervallo chiuso

3. $f(x)$ continua nell'intervallo $[a,b]$

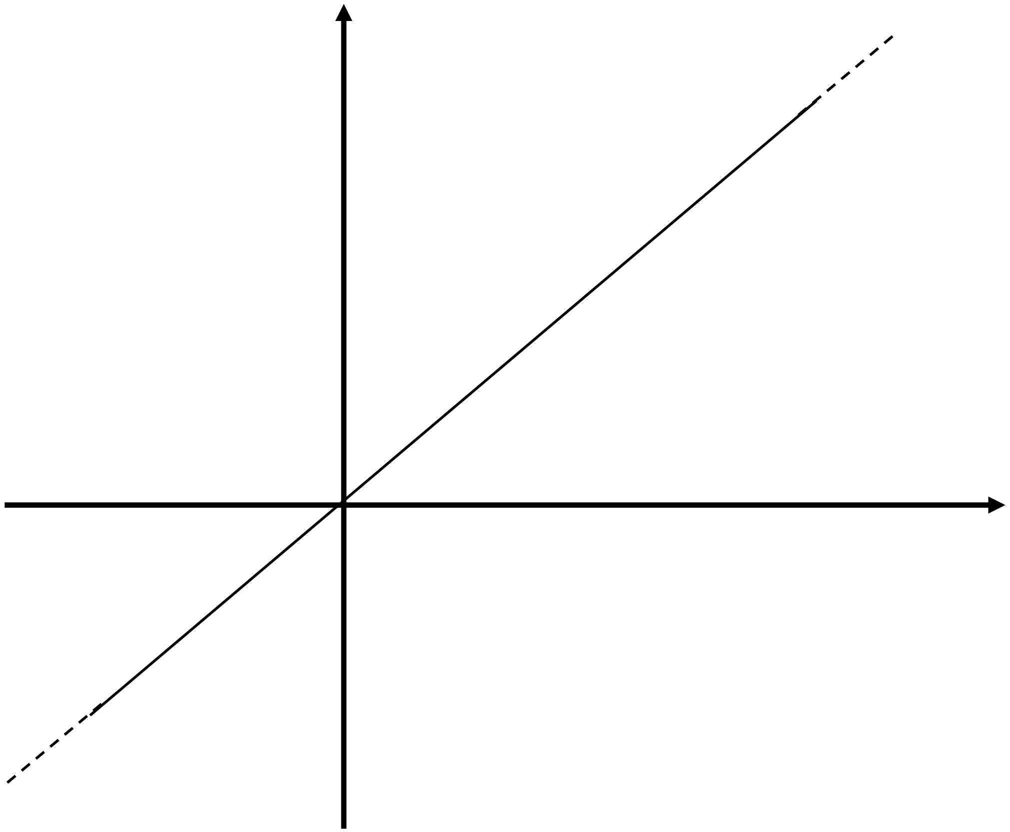
$$\Downarrow$$

Tutte necessarie?

Weierstrass: NO ipotesi intervallo limitato

Esempio. La funzione

$$f(x) = x, \ \text{in} \ \ R$$

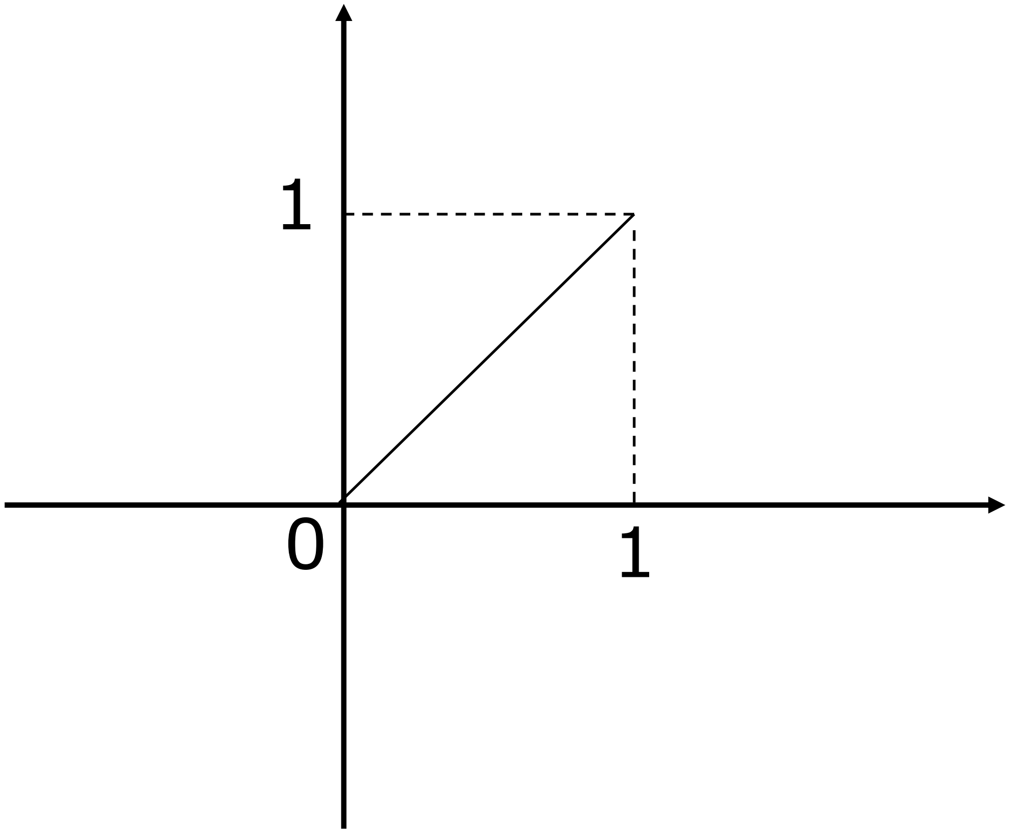


Non ammette né minimo né massimo!

Weierstrass: NO ipotesi intervallo chiuso

Esempio. La funzione

$$f(x) = x, \text{ in } (0,1)$$

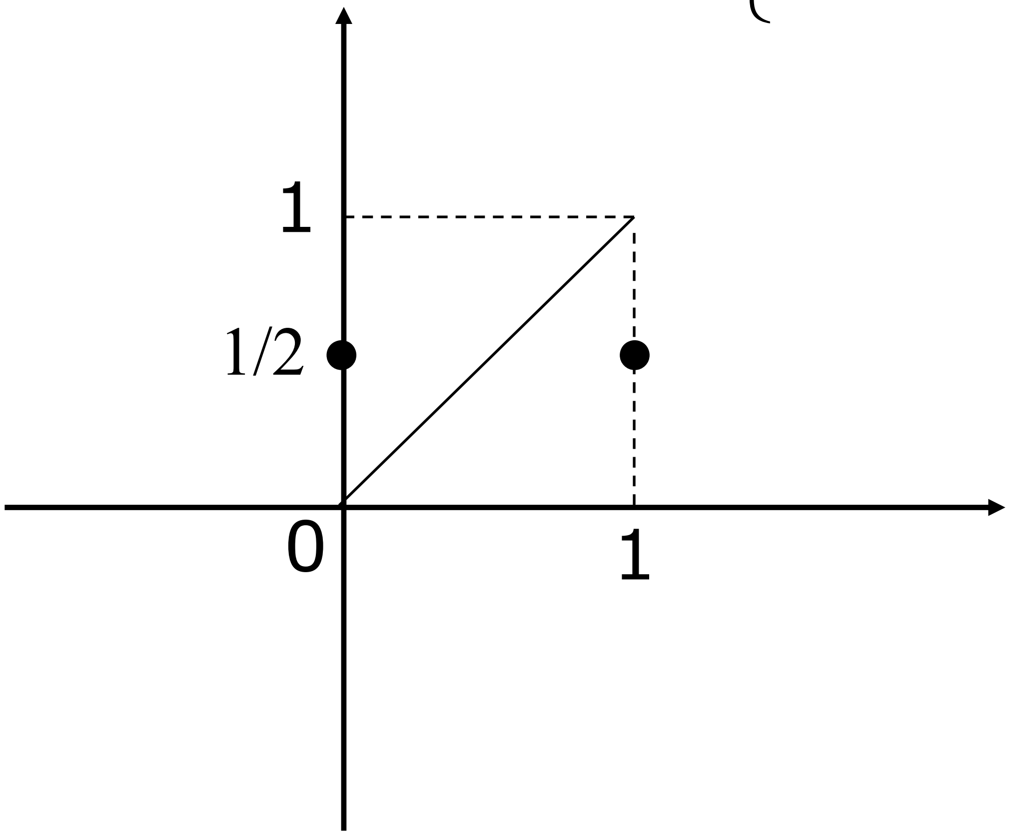


Non ammette né minimo né massimo poiché $0,1 \notin (0,1)$!

Weierstrass: NO ipotesi continuita’

Esempio. La funzione

$$f(x)=\begin{cases} x & x\in(0,1) \\ 1/2 & x=0, x=1 \end{cases}$$

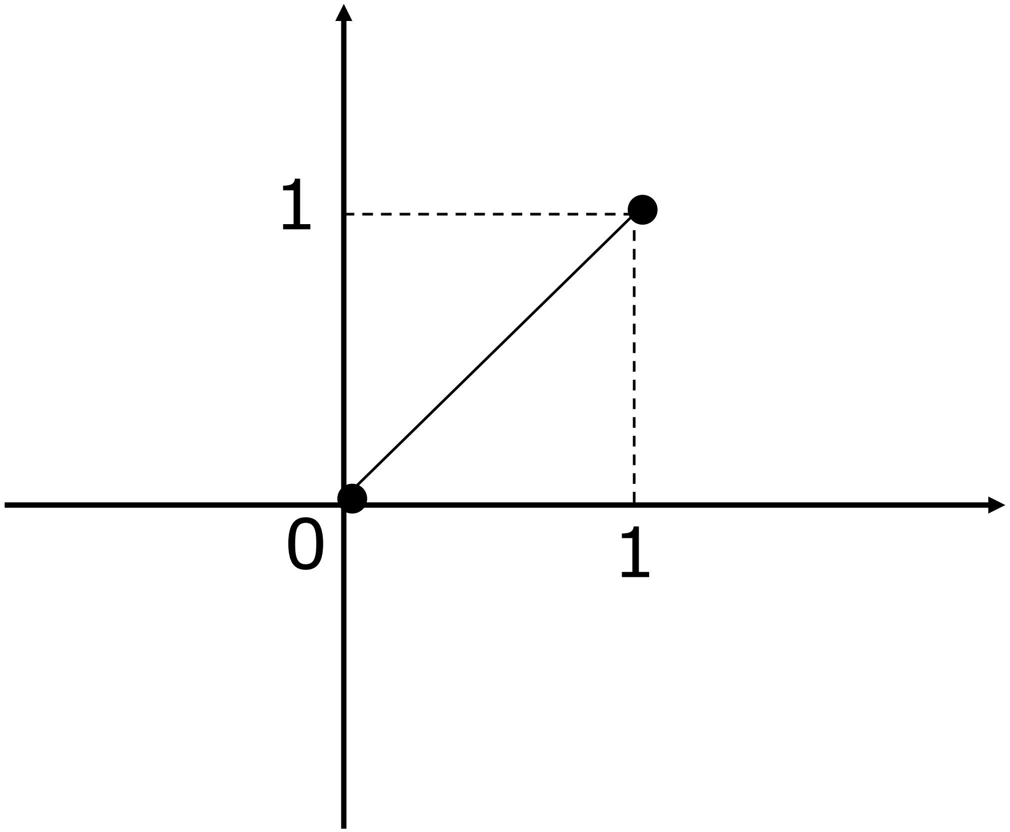


Non ammette né minimo né massimo poiché 0,1 non sono assunti dalla funzione!

Teorema di Weierstrass: osservazioni

Esempio. La funzione

$$f(x) = x, \text{ in } [0,1]$$



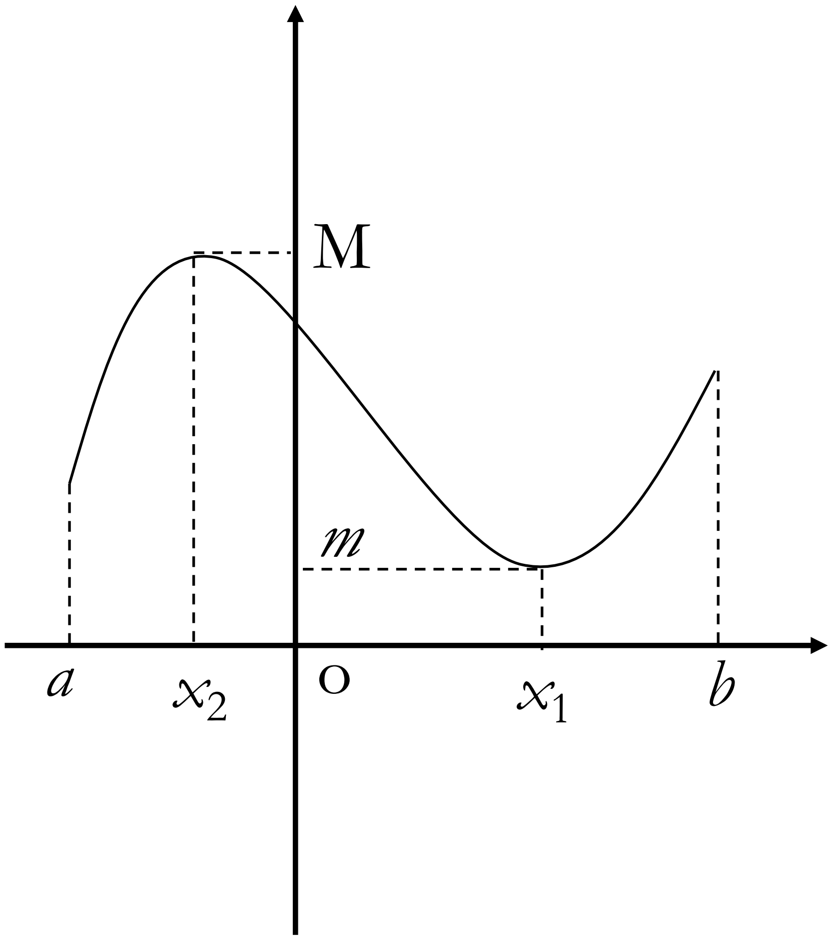
Ammette

minimo e massimo!

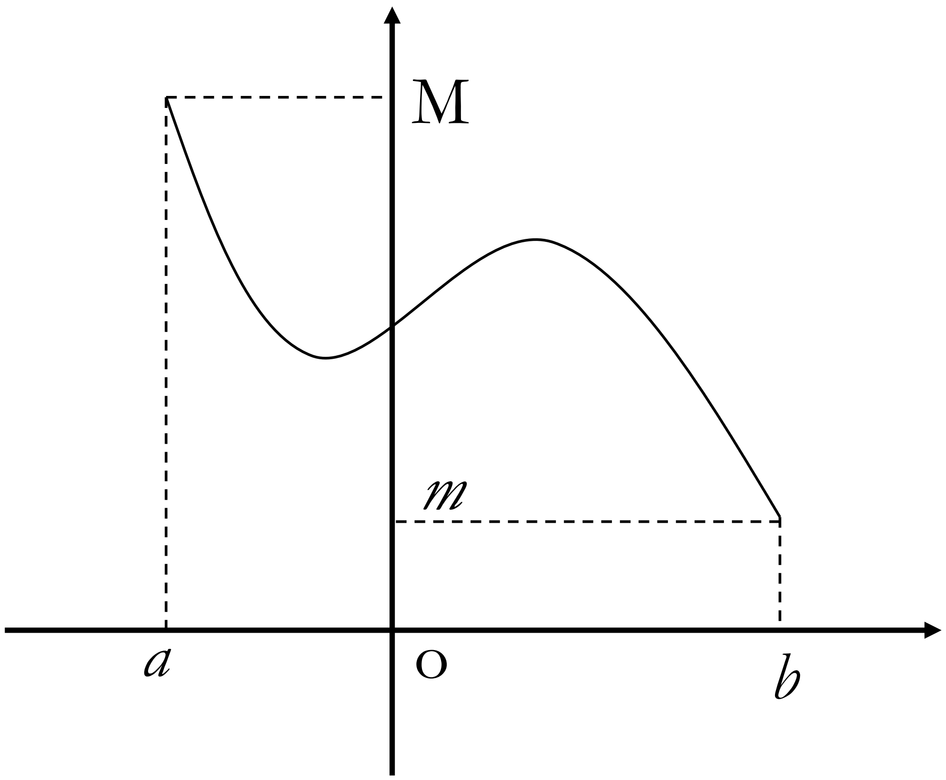
Teorema di Weierstrass: osservazioni

Il minimo ed il massimo assoluto di una funzione $f(x)$ continua in un intervallo $[a,b]$ chiuso e limitato possono essere assunti sia in punti interni all'intervallo $[a,b]$ sia agli estremi dell'intervallo $[a,b]$

Teorema di Weierstrass: osservazioni



Massimo e minimo assoluti vengono assunti in punti interni



Massimo e minimo vengono assunti agli estremi dell'intervallo

Teorema di Weierstrass: osservazioni

In particolare, se una funzione $f(x)$ è continua in un intervallo $[a,b]$ chiuso e limitato ed in tale intervallo è anche:

- strettamente crescente $\Rightarrow m = f(a) \text{ e } M = f(b)$
- strettamente decrescente $\Rightarrow m = f(b) \text{ e } M = f(a)$

$$\Downarrow$$

Funzione crescente

Def. Assegnata una funzione

$$f:\ A \longrightarrow B, \text{ con } A, B \subseteq R,\ A, B \neq \varnothing$$

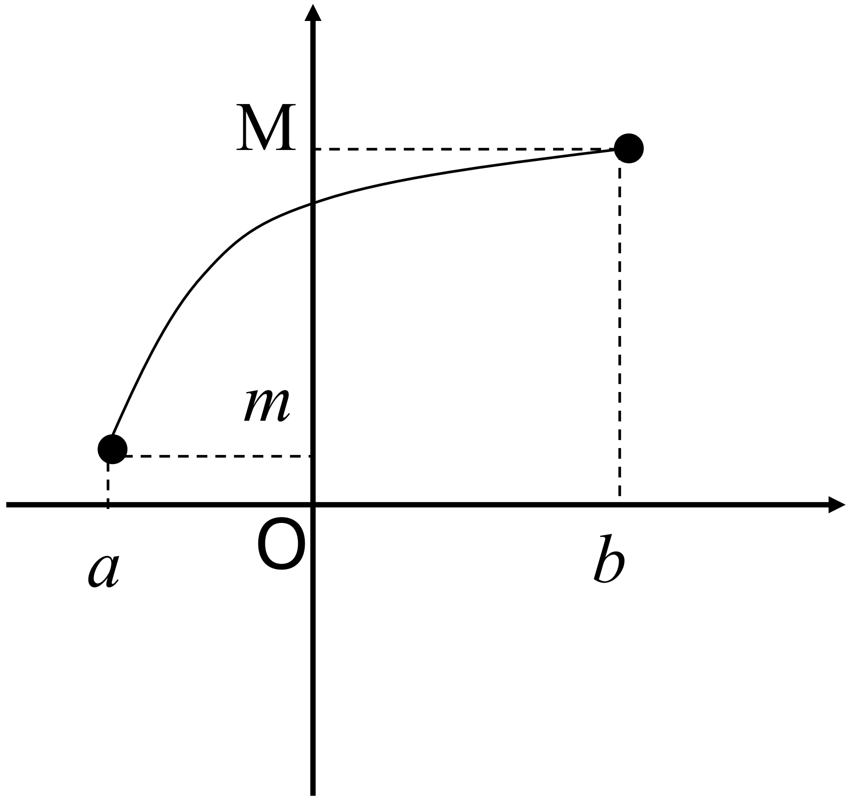
- si dice che f è strettamente crescente in A se

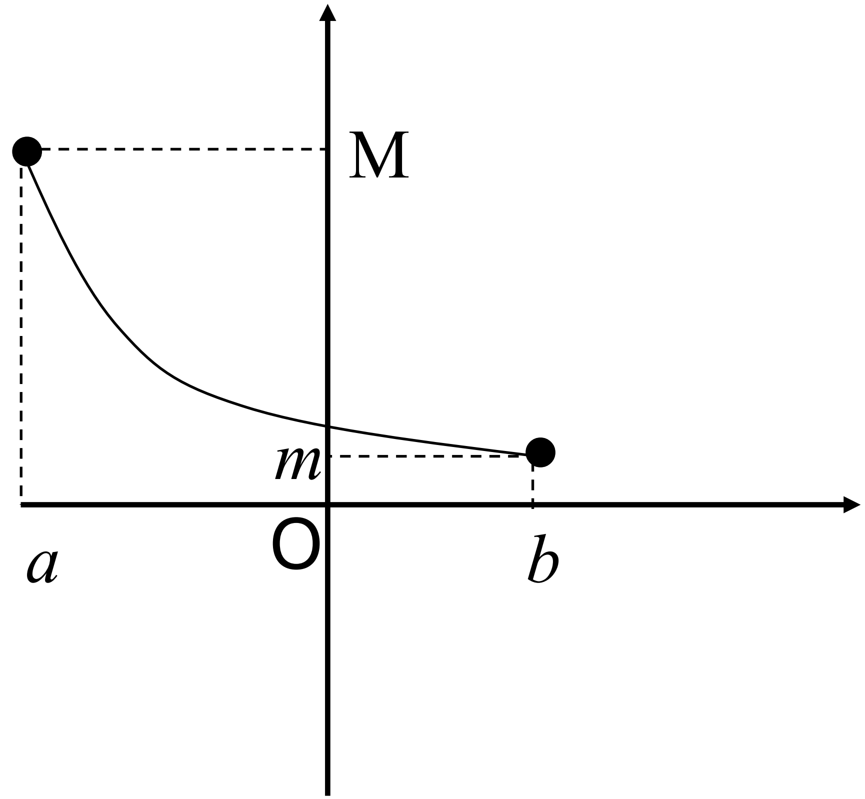
$$\forall x_1, x_2 \in A : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

- si dice che f è strettamente decrescente in A se

$$\forall x_1, x_2 \in A : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

Teorema di Weierstrass: osservazioni





La funzione è strettamente crescente e massimo e minimo vengono assunti agli estremi

La funzione è strettamente decrescente e massimo e minimo vengono assunti agli estremi

Teorema dei valori intermedi

Se $f(x)$ è una funzione continua in un intervallo $[a,b]$ chiuso e limitato

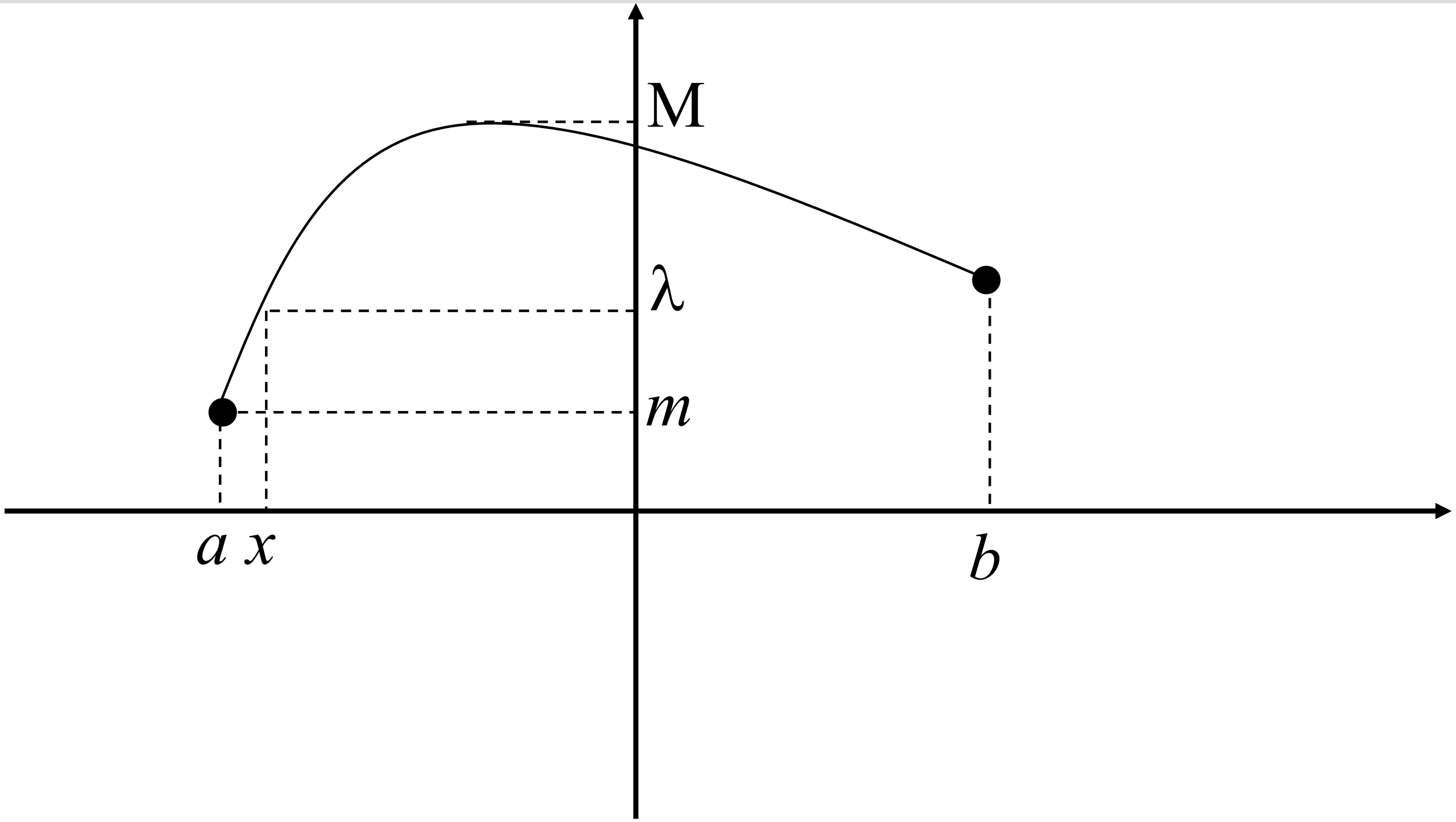
$$\Downarrow$$

$f(x)$ assume tutti i valori compresi tra il minimo ed il massimo (che esistono per il T.di W.)

Cioè: $\forall \lambda : m < \lambda < M$

$$\exists x \in [a,b] : f(x) = \lambda$$

Teorema dei valori intermedi



$$\forall \lambda : m < \lambda < M$$

$$\exists x \in [a,b] : f(x) = \lambda$$

Teorema dei valori intermedi

$$f:[a,b]\rightarrow B \quad con$$
$$f(x)\ \ continua$$

$\Rightarrow$

f(x) assume tutti i valori compresi fra min e Max

Questo teorema dice semplicemente che una funzione continua in un intervallo, se assume due valori, deve assumere tutti quelli compresi, (intermedi appunto) (*se faccio un cammino "senza salti", alla fine della giornata avrò registrato due punti di minima e massima altitudine raggiunti, e sarò necessariamente passato per tutte le altezze intermedie)*.

Teorema degli zeri

Se $f(x)$ è una funzione continua in un intervallo $[a,b]$ chiuso e limitato e se

$$f(a)\cdot f(b)<0$$

(cioè agli estremi dell'intervallo $f(x)$ assume valori di segno opposto)

$$\Downarrow$$

esiste almeno un punto $x_0 \in (a,b): f(x_0)=0$

Teorema degli zeri

- Il punto x_0 è uno <u>zero</u> della funzione f

- geometricamente x_0 è l'ascissa del punto di intersezione del grafico della funzione f con l'asse delle ascisse

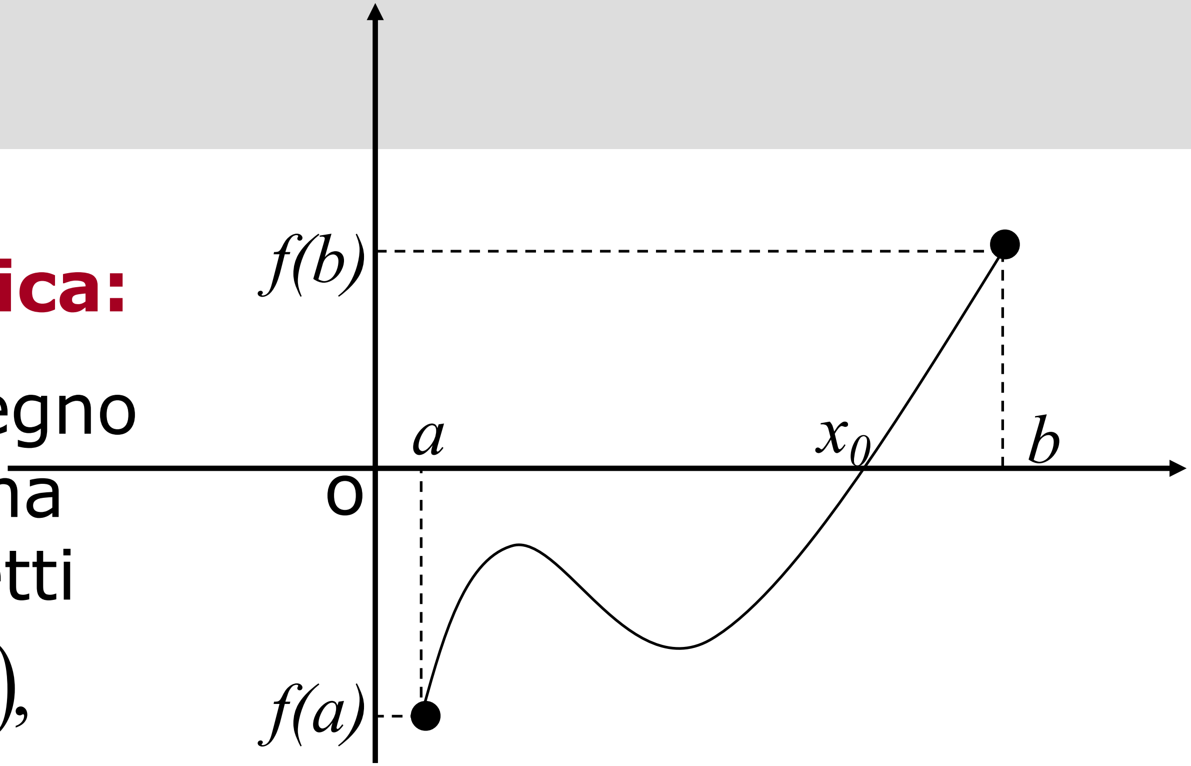
Teorema degli zeri

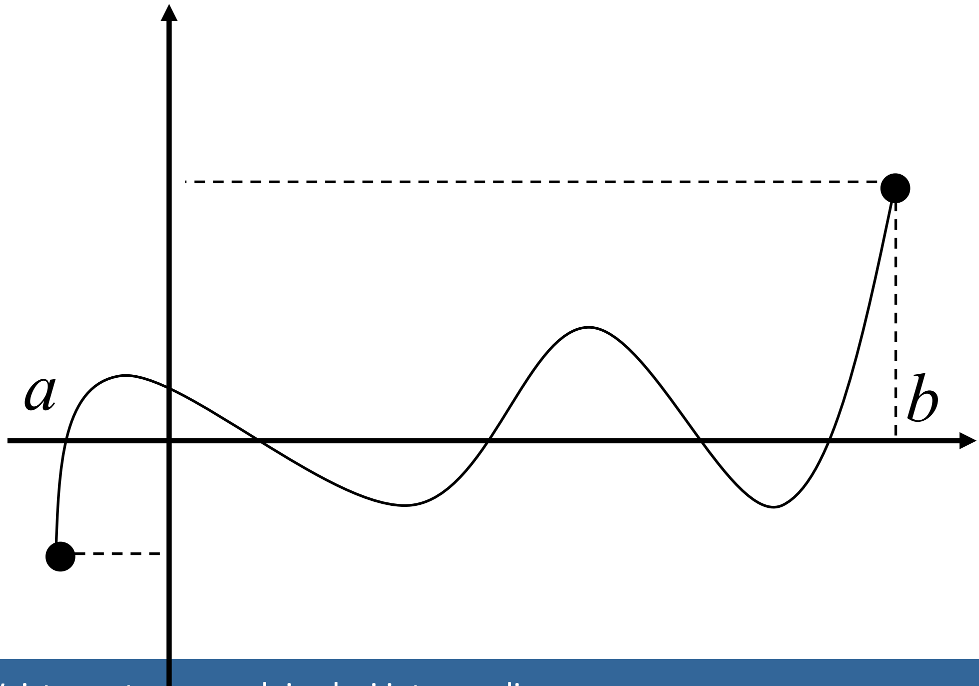
Interpretazione grafica:

Se $f(a)$ ed $f(b)$ hanno segno opposto e se $f(x)$ è una funzione continua, detti

$$P_1(a, f(a)) \text{ e } P_2(b, f(b)),$$

il grafico di f deve necessariamente collegare P_1 e P_2 con una linea continua e quindi deve necessariamente attraversare l'asse delle x almeno una volta





Teorema degli zeri: calcolo delle radici

La funzione $f(x)=e^x+x$

ammette radici (zeri) nell'intervallo [-5,0]?

I punti $x_1=-5,\ x_2=0$ appartengono al dominio

$$f(-5)=e^{-5}-5<0$$
$$f(0)=1>0$$

Per il teorema degli zeri

esiste almeno un punto $x_0\in\left(-5,0\right): f(x_0)=0$