

# Corso di Fisica Generale 1

## a.a. 2018/2019

*corso di laurea in Ingegneria dell'Automazione,  
Informatica, Biomedica, Telecomunicazioni ed Elettronica  
canali CIS-FER e RON-Z*

*8° lezione (25/10/2018)*

Prof. Laura VALORE

Email : [laura.valore@na.infn.it](mailto:laura.valore@na.infn.it) / [laura.valore@unina.it](mailto:laura.valore@unina.it)

Pagina web : [www.docenti.unina.it/laura.valore](http://www.docenti.unina.it/laura.valore)

Ricevimento : **appuntamento per email** – studio presso il Dipartimento di Fisica  
(Complesso Universitario di Monte Sant'Angelo, Edificio 6) – stanza 1H09

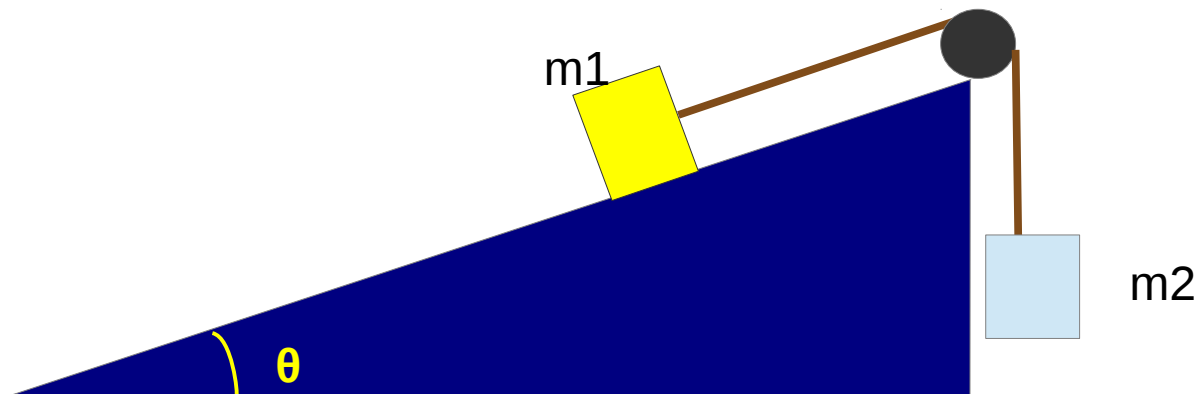
Oppure Laboratorio (Hangar) 1H11c0

# Esercitazione in aula

L'oggetto di massa  $m_1$ , inizialmente fermo, inizia a scorrere sul piano inclinato senza attrito.

1) Trovare l'accelerazione  $a$  e stabilire se l'oggetto  $m_1$  sale lungo il piano inclinato o scende.

2) Sapendo in quale direzione si muove, consideriamo adesso un coefficiente di attrito dinamico  $\mu_k = 0,10$ . Come cambia l'accelerazione?



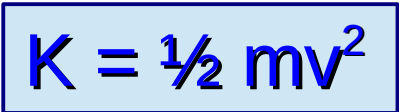
$$m_1 = 4 \text{ kg}$$

$$m_2 = 2,5 \text{ kg}$$

$$\theta = 25^\circ$$

# Energia cinetica

- L'energia cinetica è l'energia associata allo stato di moto di un corpo.
- Più veloce è un corpo, maggiore sarà la sua energia cinetica.


$$K = \frac{1}{2} mv^2$$

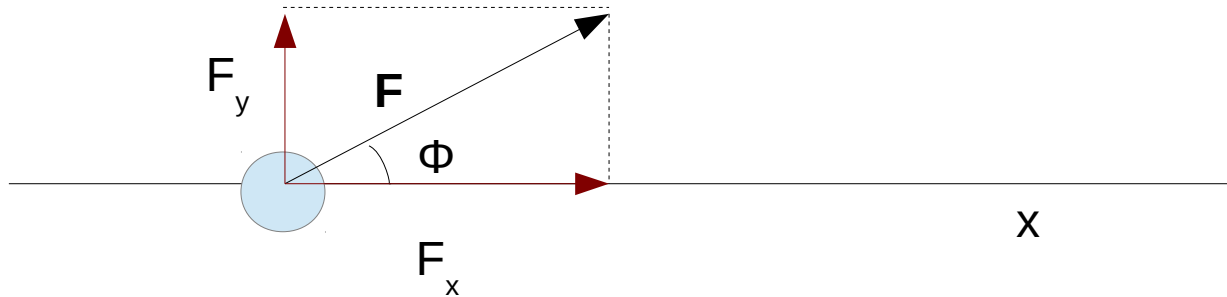
valida per velocità molto inferiori  
a quella della luce

l'unità di misura dell'energia (non solo di quella cinetica) è il joule (J) :

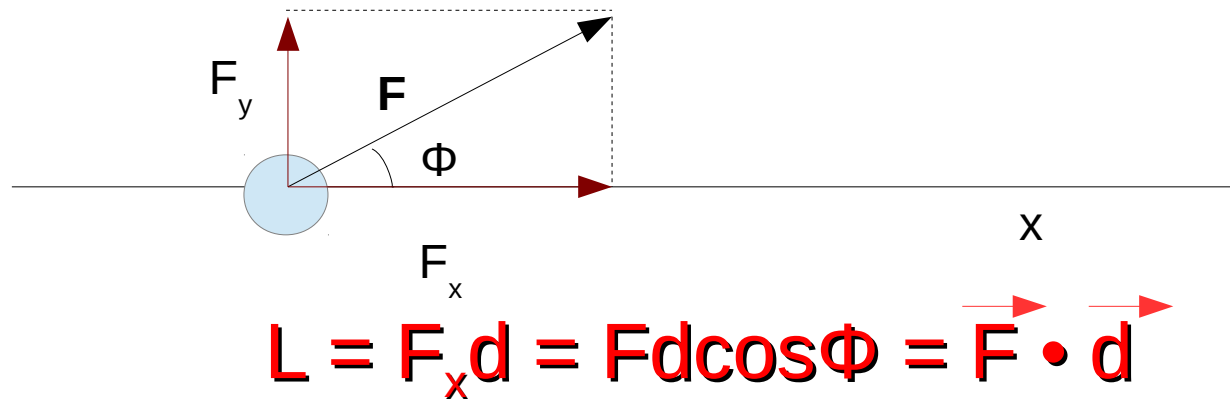
$$1 \text{ joule} = 1 \text{ J} = 1 \text{ kg m}^2/\text{s}^2$$

# Lavoro compiuto da una forza costante

Il lavoro compiuto dalla forza  $F$  per aumentare l'energia cinetica della biglia è  $L = \vec{F} \cdot \vec{d} = Fd \cos \phi$

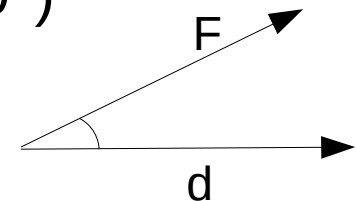


- La componente della forza che compie lavoro è solo quella lungo la direzione dello spostamento subito dal corpo.
- Il lavoro compiuto dalla componente della forza perpendicolare allo spostamento è nullo



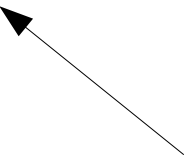
E' valida se la forza è **costante in direzione** e **verso** e se **il corpo è puntiforme** (puo' essere anche un corpo esteso ma tutti i suoi punti devono muoversi insieme)

- Il lavoro puo' essere **positivo** o **negativo** :
  - lavoro è positivo quando la componente della forza nella direzione dello spostamento è concorde con il verso dello spostamento (ovvero quando l'angolo è minore di  $90^\circ$ )
  - negativo quando è discorde (angolo tra  $90^\circ$  e  $180^\circ$ )



# Unità di misura del lavoro

- Unità di misura del lavoro : uguale all'energia cinetica
  - $1 \text{ J} = 1 \text{ kg m}^2/\text{s}^2 = 1 \text{ Nm}$

  $L = Fd\cos\Phi = \text{forza per spostamento} \rightarrow \text{Nm}$

## Lavoro totale svolto da piu' forze :

- se due o piu' forze agiscono simultaneamente su un corpo puntiforme, il lavoro totale compiuto sul corpo è la somma dei lavori svolti da ciascuna forza.

# Teorema dell'energia cinetica

L'energia cinetica finale di una particella è uguale all'energia cinetica iniziale più il lavoro totale svolto sulla particella :

$$K_f = K_i + L$$

$$\rightarrow \Delta K = K_f - K_i = L$$

E' valida qualsiasi sia il segno del lavoro :

- in caso di lavoro positivo, l'energia cinetica finale aumenta
- in caso di lavoro negativo, l'energia cinetica finale diminuisce.

# Verifica

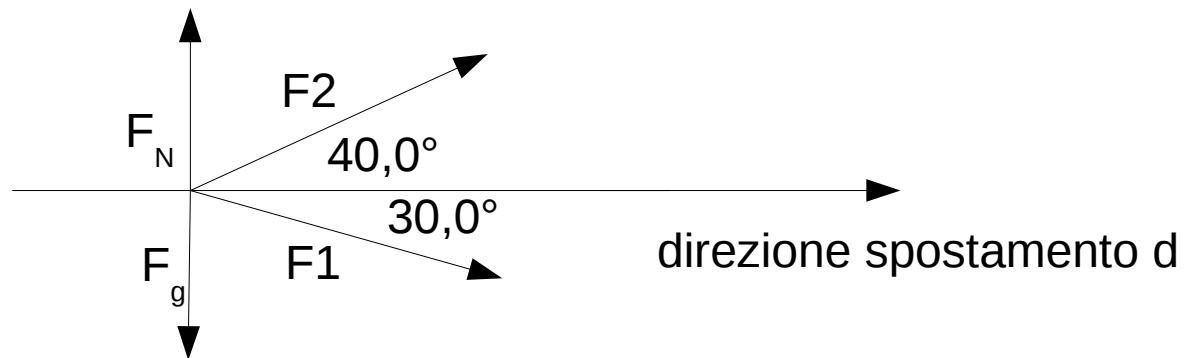
- Una particella si muove lungo l'asse  $x$ . Dite se l'energia cinetica aumenta, diminuisce o resta uguale se la velocità della particella cambia :
  - da  $-3 \text{ m/s}$  a  $-2 \text{ m/s}$
  - da  $-2 \text{ m/s}$  a  $2 \text{ m/s}$
- Nei diversi casi il lavoro compiuto sulla particella è positivo, negativo o nullo?

# Verifica

- Una particella si muove lungo l'asse x. Dite se l'energia cinetica aumenta, diminuisce o resta uguale se la velocità della particella cambia :
  - da -3 m/s a -2 m/s → diminuisce
  - da -2 m/s a 2 m/s → resta uguale
- Nei diversi casi il lavoro compiuto sulla particella è positivo, negativo o nullo?
  - nel primo negativo perché  $K_f = K_i + (-L) \rightarrow$  l'energia cinetica diminuisce
  - nel secondo nullo ( $K_f = K_i \rightarrow L = 0$ )

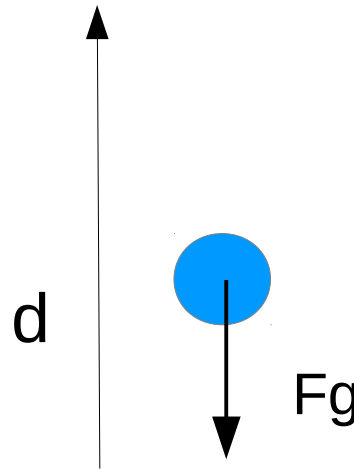
## Problema 7.2

- $m = 225 \text{ kg}$  (oggetto puntiforme)
- $d = 8.50 \text{ m}$  nel verso positivo dell'asse  $x$
- $F_1 = 12,0 \text{ N}$  ,  $30^\circ$  verso il basso rispetto all'orizzontale
- $F_2 = 10,0 \text{ N}$  ,  $40^\circ$  verso l'alto rispetto all'orizzontale
- qual è il lavoro totale svolto dalle forze in gioco?



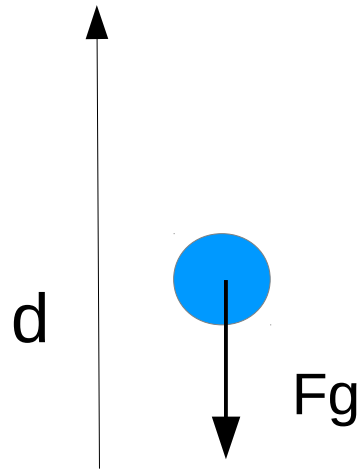
# Lavoro svolto dalla forza gravitazionale

- Consideriamo una palla da baseball lanciata in aria con una velocità iniziale  $v_0 \rightarrow K_0 = \frac{1}{2} m v_0^2$



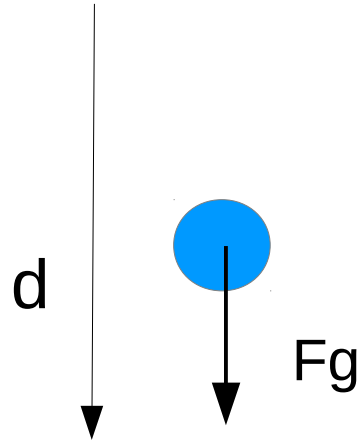
- La forza gravitazionale agisce diminuendo la velocità fino ad annullarla nel punto più alto della traiettoria :
- $\rightarrow$  l'energia cinetica sta diminuendo
- $\rightarrow$  la forza sta compiendo lavoro negativo  $\rightarrow L_g = F_g d \cos \Phi$

# Lavoro svolto dalla forza gravitazionale

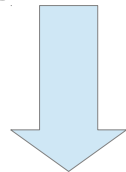


- Per un corpo in salita,  $F_g$  ha verso opposto allo spostamento  $d \rightarrow$  l'angolo  $\Phi = 180^\circ$
- $\rightarrow$  la forza sta compiendo lavoro negativo
- $\rightarrow L_g = F_g d \cos \Phi = mgd \cos(180^\circ) = -mgd$

# Lavoro svolto dalla forza gravitazionale

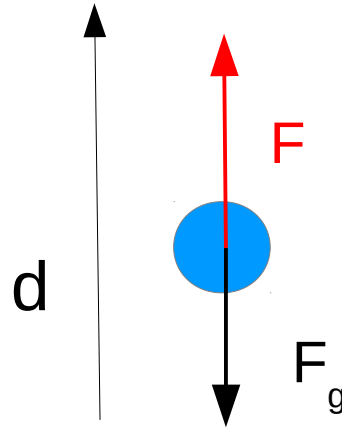


- Una volta raggiunto il culmine della traiettoria, lo spostamento  $d$  diventa concorde con il verso della forza  $F_g$   
→ l'angolo  $\Phi = 0^\circ \rightarrow \cos\Phi=1 \rightarrow$  il lavoro compiuto dalla  $F_g$  diventa positivo :  $L_g = mgd$

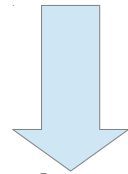


durante la salita, l'energia cinetica diminuisce,  
durante la discesa aumenta

# Lavoro compiuto per sollevare un corpo

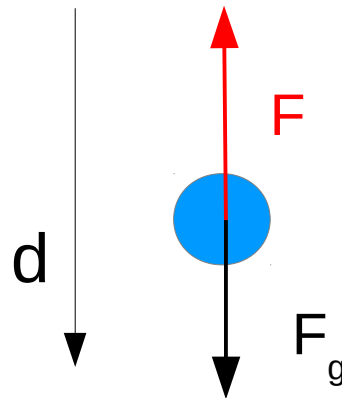


- Applichiamo una forza  $F$  per sollevare un corpo :
  - $F$  compie un lavoro positivo  $L_a$  (trasferisce energia al corpo)
  - $F_g$  compie un lavoro negativo  $L_g$  (sottrae energia al corpo)

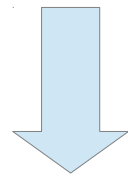


- la variazione di energia cinetica  $\Delta K$  dovuta ai due trasferimenti è :
$$K_f - K_i = L_a + (-L_g)$$

# Lavoro compiuto per abbassare un corpo

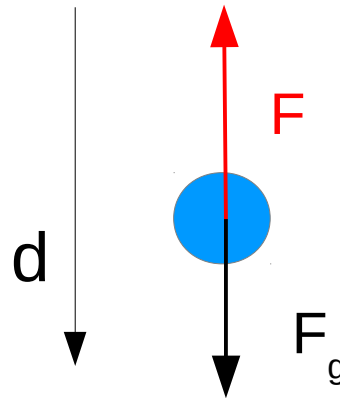


- questa volta :
  - $F$  compie un lavoro negativo  $L_a$  (sottrae energia al corpo)
  - $F_g$  compie un lavoro positivo  $L_g$  (trasferisce energia al corpo)



- la variazione di energia cinetica dovuta ai due trasferimenti è sempre :
$$K_f - K_i = -L_a + L_g$$

# Caso particolare : oggetto fermo prima e dopo il sollevamento



- se l'oggetto da sollevare (es., un libro) si trova fermo sia prima che dopo averlo sollevato (ad es, lo prendo dalla scrivania e lo poso su uno scaffale)

→ l'energia cinetica  $K_f = K_i = 0$

$$\rightarrow L_a = -L_g$$

ovvero, il lavoro compiuto dalla forza applicata per sollevare il corpo è esattamente uguale ed opposto al lavoro compiuto dalla forza di gravità. In termini di energia, vuol dire che l'energia che trasferiamo al corpo è uguale a quella sottratta dalla forza di gravità

# Integrali indefiniti

**Il calcolo dell'integrale indefinito è l'inverso dell'operazione di derivazione:** consiste cioè nella ricerca di tutte le funzioni la cui derivata sia uguale a una funzione assegnata.

data una funzione  $y = f(x) \rightarrow$  calcolare l'integrale indefinito significa cercare tutte le funzioni  $F(x)$  tali che la derivata di  $F(x)$  sia proprio  $f(x) \rightarrow F'(x) = f(x)$

Questo problema è noto come ricerca delle **primitive  $F(x)$**  di una funzione.

E' ovvio che aggiungendo una costante alla funzione  $F(x)$  e derivando si ottiene sempre la stessa  $f(x)$ , poiché la derivata di una costante è zero. Quindi :

| INTEGRALI                      |                             |
|--------------------------------|-----------------------------|
| $\int x^n dx$                  | $\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$   |
| $\int \frac{dx}{x}$            | $\ln x  + C$                |
| $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx$   | $\ln f(x)  + C$             |
| $\int e^x dx$                  | $e^x + C$                   |
| $\int a^x dx$                  | $\frac{a^x}{\ln a} + C$     |
| $\int \sin x dx$               | $-\cos x + C$               |
| $\int \cos x dx$               | $\sin x + C$                |
| $\int \operatorname{tg} x dx$  | $-\ln \cos x  + C$          |
| $\int \operatorname{ctg} x dx$ | $\ln \sin x  + C$           |
| $\int \frac{dx}{\sin^2 x}$     | $-\operatorname{ctg} x + C$ |
| $\int \frac{dx}{\cos^2 x}$     | $\operatorname{tg} x + C$   |

$$\int f(x) dx = F(x) + c$$

$$\text{visto che } d[F(x) + c]/dx = F'(x) + 0 = f(x)$$

proprietà degli integrali indefiniti :

$$\int f(x) + g(x) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$

$$\int k f(x) dx = k \int f(x) dx$$

# Integrali definiti e calcolo dell'area

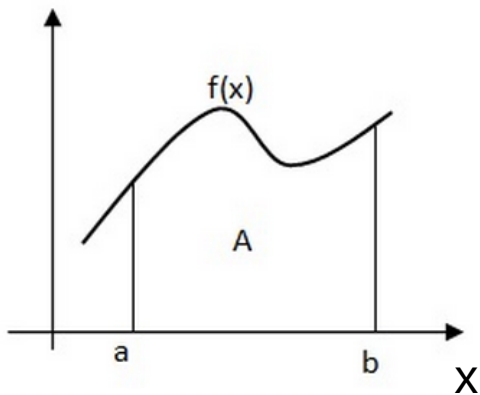
Data una funzione integranda  $f(x)$ , l'integrale definito in un certo intervallo  $[a,b]$

$$\int_a^b f(x) dx$$

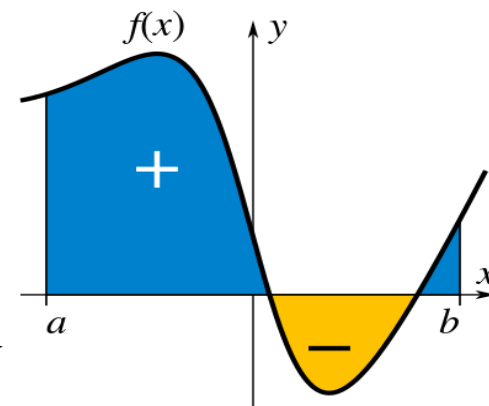
si trova calcolando l'integrale indefinito (ovvero trovando la primitiva  $F(x)$ ) negli

estremi di integrazione  $a$  e  $b \rightarrow A = \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$

L'integrale definito ha un significato geometrico preciso! E' proprio l'area  $A$  compresa tra il grafico della funzione  $f(x)$ , l'asse  $x$  e le due rette verticali  $x=a$  e  $x=b$ .



Integrale di  $f(x)$  = area sottesa dal grafico dalla funzione  $f(x)$  nel dominio  $[a,b]$ .  
Si assume che l'area abbia valore negativo quando  $f(x)$  è negativa



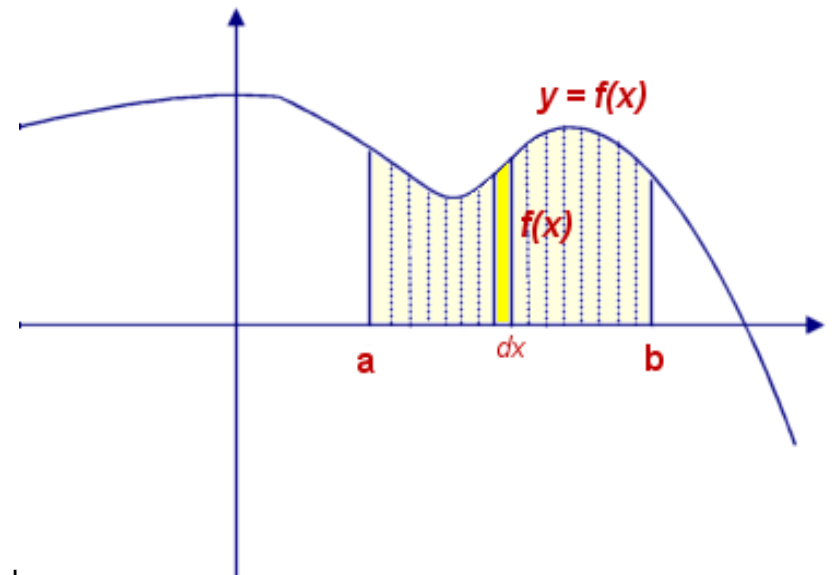
# Calcolo dell'area sottesa dalla funzione $f(x)$

Per calcolare l'area sottesa dalla funzione  $f(x)$  suddividiamo l'intervallo tra  $a$  e  $b$  in tanti intervalli infinitesimi  $dx$  : a questo punto abbiamo ottenuto infiniti rettangoli di base  $dx$  ed altezza  $f(x)$

l'area in questione può vedersi come la somma di questi infiniti rettangoli infinitesimi di altezza  $f(x)$  e base  $dx$ .

L'area totale sarà data dalla somma di tutti questi termini  $f(x)dx \rightarrow$

$$A = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum f(x)\Delta x = \int_a^b f(x)dx$$



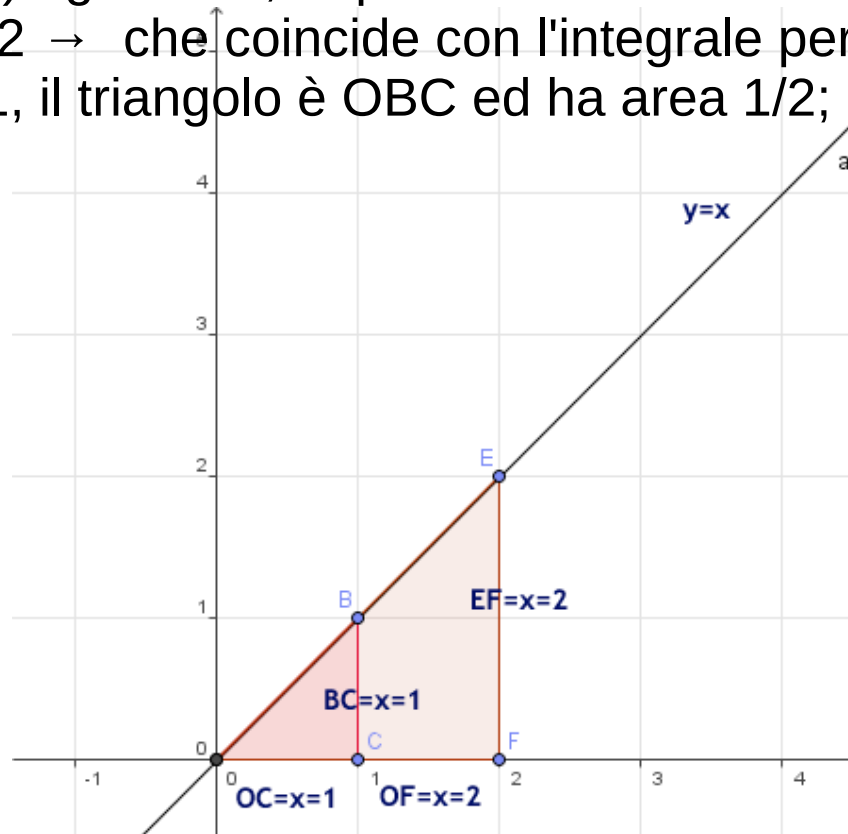
# Esempio

Consideriamo la retta  $y = x$  (bisettrice del primo quadrante) .

L'integrale di una funzione  $y = x$  è  $\rightarrow x^2/2 + c$

È immediato notare dal grafico che  $x^2/2$  è proprio l'area del triangolo compreso tra la retta e l'asse delle  $x$ , tra 0 e  $x$ . Per qualsiasi  $x$ , questo triangolo rettangolo ha infatti base e altezza (i due cateti) uguali a  $x$ , e quindi la sua area è appunto

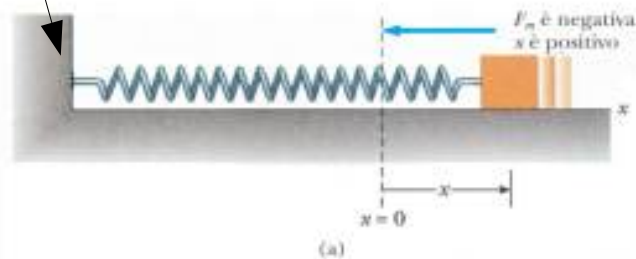
$A = (\text{base} \times \text{altezza})/2 = x^2/2 \rightarrow$  che coincide con l'integrale per  $c = 0$ . Per esempio nel disegno a lato per  $x = 1$ , il triangolo è OBC ed ha area  $1/2$ ; per  $x = 2$  il triangolo è OEF ed ha area 2.



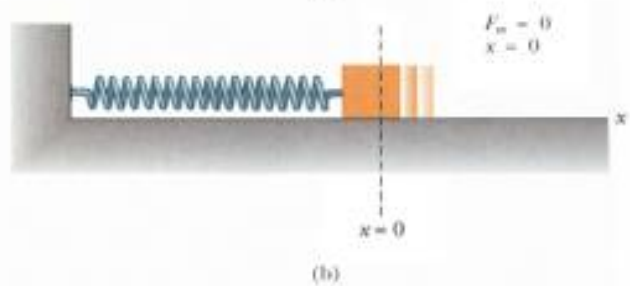
# Forza Elastica

capo fisso

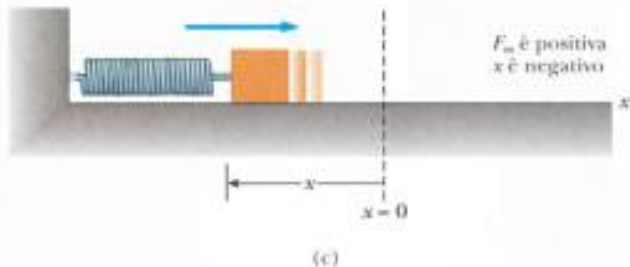
capo mobile



molla allungata : per reazione, la molla tira il blocco verso sinistra con una forza  $F$  per ripristinare lo stato di riposo



molla in stato di riposo : non è compressa né tirata



molla compressa : per reazione, la molla tira il blocco verso destra con una forza  $F$  per ripristinare lo stato di riposo

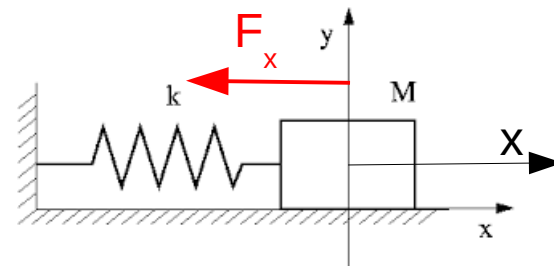
la forza  $F$  esercitata dalla molla è detta **forza di richiamo** perché tende a far tornare la molla nella posizione di riposo. La forza elastica della molla è proporzionale allo spostamento effettuato :

$$F = -kd \text{ (Legge di Hooke)}$$

$$F = -kd \text{ (Legge di Hooke)}$$

- Il segno meno indica che la forza è sempre diretta nel verso opposto rispetto allo spostamento. E' una **forza variabile**, perché modulo e verso dipendono dalla posizione.
- La costante **k** è detta **costante elastica** della molla :
  - valori di k maggiori indicano una maggiore rigidità della molla
  - a parità di spostamento la forza di richiamo è maggiore per k più grandi
- Se consideriamo lo spostamento lungo l'asse x, la legge di Hooke diventa :

$$F_x = -kx$$



# Lavoro svolto dalla forza elastica

Consideriamo :

- che la molla sia **priva di massa** (ovvero trascurabile rispetto al blocco)
  - che la molla sia **ideale**, ovvero che obbedisca perfettamente alla legge di Hooke
  - che **non ci sia attrito**
  - che il blocco sia un **corpo puntiforme**
- 
- Una volta spostata la molla dalla sua posizione di riposo, vogliamo calcolare il lavoro  $L = \mathbf{F} \cdot \mathbf{d}$  svolto dalla forza elastica .... ma :  
**l'equazione  $L = Fd \cos \varphi$  è valida solo per FORZE COSTANTI !**
- 
- La forza elastica è **VARIABILE** → come si risolve ?



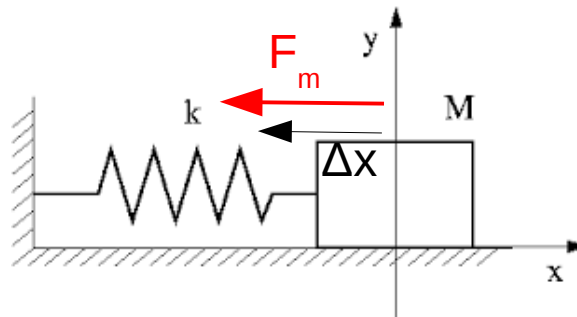
# Lavoro svolto dalla forza elastica

Dividiamo lo spostamento in tanti piccolissimi spostamenti  $\Delta x$

In questo modo, in ciascun segmento possiamo approssimare la forza elastica ad una forza costante

Calcoliamo il lavoro compiuto dalla forza elastica in ciascun segmento  $\Delta x$  :  
mentre torniamo verso la posizione di riposo,  $\mathbf{F}$  agisce nello stesso verso dello spostamento (sia che la molla sia stata estesa, sia che sia stata compressa)

- $\rightarrow \varphi = 0^\circ \rightarrow \cos\varphi = 1 \rightarrow L_1 = F_1 \Delta x_1, L_2 = F_2 \Delta x_2, \dots$



- Sommiamo tutti i contributi al lavoro relativi a ciascun segmento per ottenere il lavoro totale

$$L_{\text{tot}} = \sum (F_j \Delta x_j)$$

# Uso dell'operazione di integrazione

Riduciamo gli spostamenti  $\Delta x$  al punto da renderli **infinitesimi ( $dx$ )**: in questo modo, l'indeterminazione sull'ipotesi di forza costante nell'intervallo si riduce al minimo e possiamo introdurre l'operazione di **integrazione** :

$$L_m = \int_{x_i}^{x_f} F(x) dx$$

$$F = -kx \rightarrow L_m = \int_{x_i}^{x_f} (-kx) dx \rightarrow L_m = -k \int_{x_i}^{x_f} (x) dx$$

Ricordando che :

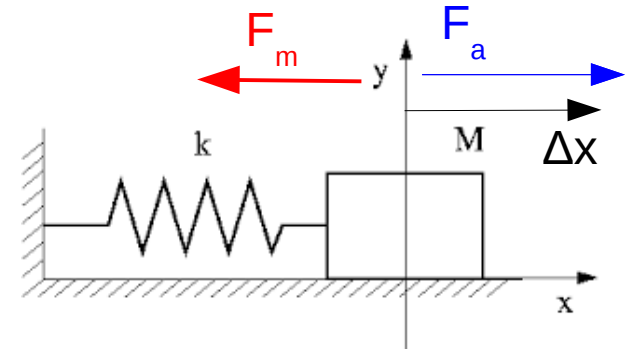
$$\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} \rightarrow L_m = -k \left( \frac{1}{2} x_f^2 \right) - \left( \frac{1}{2} x_i^2 \right) = -k/2 (x_f^2 - x_i^2)$$

$L_m = k/2 (x_i^2 - x_f^2)$  Il lavoro è positivo se  $x_i^2 - x_f^2 > 0$ , cioè se la posizione iniziale è più lontana da  $x = 0$  (che è la posizione di riposo) della posizione finale.

**Il lavoro della forza elastica è dunque positivo se ci si avvicina alla posizione di riposo, negativo se ci si allontana.**

# Lavoro svolto da una forza applicata

- Applichiamo una forza  $F_a$  per spostare il blocco
- Durante lo spostamento, la forza  $F_a$  compie il lavoro  $L_a$  (positivo) e la forza di richiamo  $F_m$  compie il lavoro  $L_m$  (negativo, ci si sta allontanando dalla posizione di riposo)
- La variazione di energia cinetica sarà :  $\Delta K = K_f - K_i = L_a + L_m$
- Se il blocco parte da fermo e termina di nuovo fermo,  $\Delta K = 0$  e quindi  $L_a = - L_m$



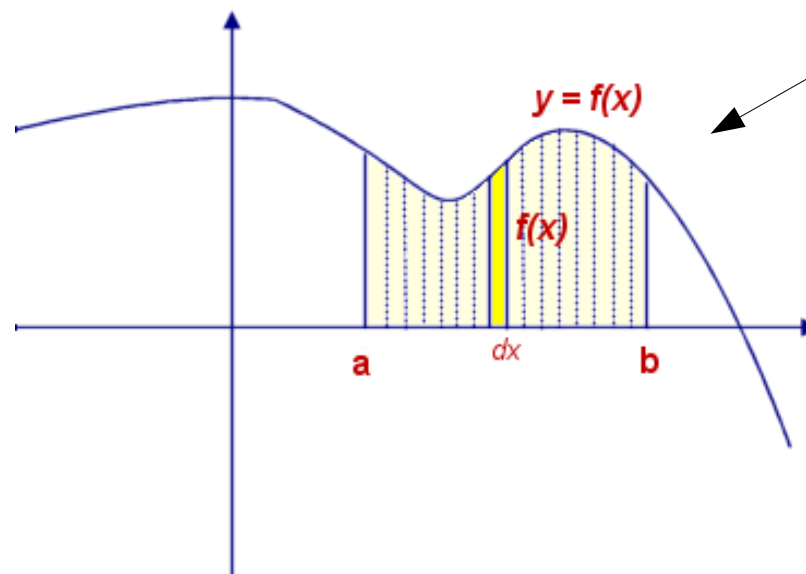
possiamo dire che il lavoro sviluppato sul blocco dalla forza applicata è l'opposto del lavoro svolto dalla forza elastica sulla molla per farla tornare nella posizione di riposo.

# Lavoro svolto da una generica forza variabile caso unidimensionale

In generale, possiamo calcolare il lavoro svolto da una qualsiasi forza  $F(x)$  che sia variabile in funzione della posizione applicando l'operazione di integrazione descritta per la forza elastica :

suddividiamo lo spostamento in tanti piccoli intervalli  $dx$  e la forza puo' essere considerata costante all'interno di ciascun intervallo infinitesimo.

$$L = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum \bar{F}_j \Delta x \rightarrow L_m = \int_{x_i}^{x_f} F(x) dx$$



il lavoro è dato dall'area  
sottesa dalla curva

# Lavoro svolto da una generica forza variabile caso tridimensionale

Consideriamo una particella sulla quale agisce una forza :

$\mathbf{F} = F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j} + F_z \mathbf{k}$  tale che ciascuna componente dipenda dalla posizione della particella.

Poniamo inoltre che ciascuna componente dipenda solo dalla componente associata della posizione, ovvero  $F_x$  solo da  $x$  ( e non da  $y$  e da  $z$ ),  $F_y$  solo da  $y$  (e non da  $x$  o da  $z$  ) ed  $F_z$  solo da  $z$  (e non da  $x$  o  $y$ )

Sia la posizione della particella  $\vec{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$  .

Lo spostamento infinitesimo sarà  $d\mathbf{r} = (dx)\mathbf{i} + (dy)\mathbf{j} + (dz)\mathbf{k} \rightarrow$

il lavoro infinitesimo sarà  $dL = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F_x dx + F_y dy + F_z dz$

Quindi il lavoro sviluppato da  $\mathbf{F}$  durante lo spostamento da  $\mathbf{r}_i$  ad  $\mathbf{r}_f$  sarà :

$$L = \int_{r_i}^{r_f} dL = \int_{x_i}^{x_f} F_x dx + \int_{y_i}^{y_f} F_y dy + \int_{z_i}^{z_f} F_z dz$$

## Problema 7.2 (forze costanti)

- $m = 225 \text{ kg}$  (oggetto puntiforme)
- $d = 8.50 \text{ m}$  nel verso positivo dell'asse  $x$
- $F_1 = 12,0 \text{ N}$  ,  $30^\circ$  verso il basso rispetto all'orizzontale
- $F_2 = 10,0 \text{ N}$  ,  $40^\circ$  verso l'alto rispetto all'orizzontale
- qual è il lavoro totale svolto dalle forze in gioco?

