

# IL BILANCIO DI ENERGIA TERMICA

## I. Il flusso di calore

Il calore è una forma di energia in transito. Fissato un punto ed una superficie infinitesima passante per quel punto definiamo **flusso di calore** la quantità di calore che attraversa la superficie per unità di superficie e di tempo:

$$q = \frac{dQ}{dS} \quad (1.1)$$

Nella (1.1)  $dQ$  è la quantità di calore per unità di tempo che passa attraverso la superficie, detta anche **portata termica**, e  $dS$  è l'area della superficie infinitesima.

Il flusso di calore passante attraverso una superficie dipende, oltre che dalle dimensioni della superficie stessa, dalla direzioni in cui il calore viene trasportato rispetto alla direzione della superficie stessa.

## II. La legge di Fourier

Jean Baptiste Joseph Fourier, matematico francese, nacque ad Auxerre nel 1768 ma ben presto si allontanò dalla sua città natale per dedicarsi agli studi. La sua vita fu molto attiva sia nel campo scientifico, dato che insegnò all'Ecole Polytechnique di Parigi e diventò membro dell'Academie de Sciences, sia nel campo politico, quando, seguito Napoleone in Egitto nel 1798, ottenne diversi incarichi amministrativi. La sua ricerca si diresse inizialmente sullo studio della propagazione del calore, in seguito, verso argomenti strettamente matematici. Furono gli studi sulle serie armoniche (le serie di Fourier) che resero famoso il suo nome. Morì a Parigi nel 1830.

Per spiegare la fenomenologia relativa alla conduzione del calore, Fourier eseguì il seguente esperimento: prese un anello dalla catena di un'ancora e lo immerse per metà nel fuoco; quando la metà immersa diventò rovente lo estrasse e lo mise in una fine

sabbia isolante e ne misurò la temperatura in varie parti della circonferenza. Inizialmente la temperatura era molto elevata nella zona immersa nel fuoco mentre scendeva molto bruscamente nella parte che non era stata scaldata. Via via che il calore si trasferiva per conduzione in tutta la materia dell'anello, la temperatura si distribuiva in modo sempre più uniforme sulla circonferenza.

Fourier dimostrò quindi che il calore si trasmette **per conduzione** da zone a temperatura più alta a zone a temperatura più bassa. In termini fisico-matematici, Fourier postulò che il flusso termico conduttivo fosse proporzionale alla variazione locale di temperatura, cioè al suo gradiente. Se  $q_1$  è il flusso termico nella direzione  $x_1$ , si ha:

$$q_1 = -k \frac{\partial T}{\partial x_1} \quad (2.1)$$

Nella (2.1)  $k$  è la **conducibilità termica** e il segno meno è richiesto dalla condizione che il flusso termico (positivo) avviene nella direzione delle temperature decrescenti.

La (2.1) rappresenta una forma *scalare* della legge di Fourier, nel senso che descrive il meccanismo di trasporto conduttivo in una sola direzione dello spazio. la naturale generalizzazione della (2.1) in termini tridimensionali è:

$$\mathbf{q} = -k \nabla T \quad (2.2)$$

dove  $\mathbf{q}$  è il **vettore flusso di calore**, cioè il vettore che ha per modulo il valore scalare del flusso e per direzione proprio quella del flusso di calore. Nella

**Errore. L'origine riferimento non è stata trovata.** il simbolo  $\nabla$  indica l'operatore gradiente:

$$\nabla T = \frac{\partial T}{\partial x_1} \mathbf{e}_1 + \frac{\partial T}{\partial x_2} \mathbf{e}_2 + \frac{\partial T}{\partial x_3} \mathbf{e}_3 \quad (2.3)$$

dove  $e_1, e_2, e_3$  sono i tre versori del sistema di coordinate cartesiane ortogonali  $x_1, x_2, x_3$ .

### TRASPORTO DI CALORE CONDUTTIVO MONODIMENSIONALE

Le equazioni per il trasporto del calore conduttivo in regime stazionario assumono una forma relativamente semplice quando si riferiscono al trasporto in un'unica direzione dello spazio. I tre casi tipicamente analizzati sono quelli della geometria piana (lastra), di quella cilindrica e di quella sferica. Nei prossimi paragrafi verranno descritte le equazioni di bilancio di energia in regime stazionario, e successivamente quelle in regime stazionario.

#### III.1 Geometria piana. Conduzione senza generazione

Si consideri una lastra piana di altezza e profondità indefinite e di spessore  $\delta$ : ciò significa che, detta  $H$  l'altezza e  $W$  la profondità della lastra (che quindi è caratterizzata da una superficie  $WH$ ) si ha  $H \gg \delta$  e  $W \gg \delta$ . Supponiamo che le due pareti della lastra si trovino rispettivamente alle temperature  $T_0$  e  $T_1$ . In tali condizioni calore si trasporta lungo lo spessore della lastra dalla superficie a temperatura più alta a quella a temperatura più bassa. Ci chiediamo in questo caso quale sia la forma del profilo di temperatura all'interno della lastra, e quale sia la potenza termica che attraversa la lastra stessa.

A tal fine introduciamo (vedi Figura 4) un sistema di coordinate cartesiano ortogonale con un asse,  $x$ , diretto lungo lo spessore della lastra. Gli altri due assi appartengono quindi al piano della lastra. Per quanto detto, ci aspettiamo che il flusso di calore sia diretto lungo lo spessore della lastra e quindi in tale direzione vi sarà una variazione di temperatura. In condizioni stazionarie, e in assenza di generazione di calore all'interno della lastra, il bilancio di energia assume la seguente forma:

$$WHq|_x - WHq|_{x+dx} = 0 \quad (3.1)$$

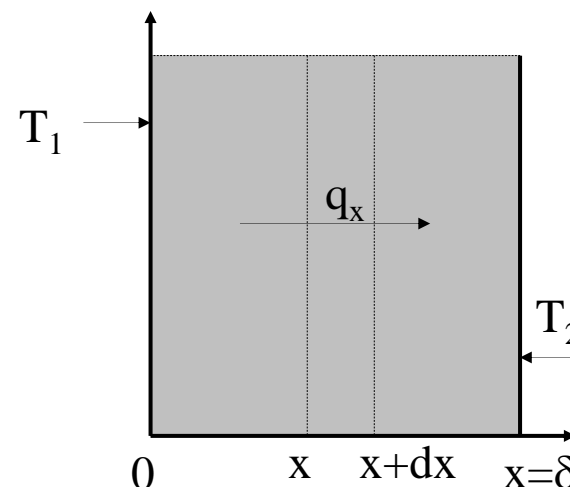


Figura 4

Introducendo l'equazione di Fourier per il trasporto di calore e dividendo per  $WHdx$ , la (3.1) diventa::

$$k \frac{d^2T}{dx^2} = 0 \quad (3.2)$$

La (3.2) è dunque una equazione differenziale del secondo ordine nella temperatura. Essa deve soddisfare le due condizioni al contorno:

$$\begin{aligned} x=0 &\rightarrow T=T_1 \\ x=\delta &\rightarrow T=T_2 \end{aligned} \quad (3.3)$$

La (3.2) è facilmente integrata con le condizioni al contorno (3.3), fornendo un profilo lineare di temperatura all'interno della lastra:

$$T(x) = T_1 + (T_2 - T_1) \frac{x}{\delta} \quad (3.4)$$

La (3.4) può anche messa nella semplicissima forma adimensionale:

$$g = \xi \quad (3.5)$$

avendo definito una temperatura adimensionale e un'ascissa adimensionale come:

$$g = \frac{T - T_1}{T_2 - T_1} \quad (3.6)$$

$$\xi = \frac{x}{\delta}$$

Dalla (3.4) è immediatamente possibile calcolare il flusso di calore che transita attraverso la lastra:

$$q = -k \frac{dT}{dx} = k \frac{(T_1 - T_2)}{\delta} \quad (3.7)$$

La (3.7) indica che il flusso di calore è costante in ogni sezione della lastra (in quanto indipendente da  $x$ ) e ha ovviamente segno positivo (cioè si trasmette da sinistra lungo la direzione delle  $x$  positive) quando  $T_1 > T_2$ .

La (3.7) permette anche di definire in maniera diversa il legame tra potenza termica e gradiente di temperatura attraverso una lastra di superficie  $S$ . Possiamo scrivere infatti la (3.7) come:

$$\Delta T = RQ = \frac{\delta}{Sk} Q \quad (3.8)$$

Il parametro  $R$ , direttamente proporzionale allo spessore della lastra e inversamente proporzionale alla conducibilità elettrica e alla superficie della lastra, prende il nome di **resistenza termica**, in quanto rappresenta la resistenza offerta dalla lastra al passaggio di calore sotto l'azione di una forza spingente data dalla differenza di temperatura  $\Delta T$ . In altri termini, a parità di  $\Delta T$  una maggiore resistenza termica determina una portata termica minore. L'analogia con altri fenomeni fisici, quali il passaggio di corrente elettrica in un conduttore dietro applicazione ai suoi estremi di una differenza di potenziale, è ovvio, e giustifica quindi il nome dato al rapporto  $\delta/q$ .

### III.2 Geometria piana. Conduzione con generazione

Analizziamo il caso in cui nella lastra vi sia una generazione di calore, che per semplicità consideriamo uniforme e pari, per unità di volume e di tempo, a  $p$ . In questo caso il bilancio di energia deve tener conto della generazione e diventa quindi:

$$WHq|_x - WHq|_{x+dx} + WHdpx = 0 \quad (3.9)$$

Dopo la consueta introduzione della legge di Fourier e la divisione per  $WHdx$  si ottiene:

$$k \frac{d^2T}{dx^2} + p = 0 \quad (3.10)$$

La (3.10) va, al solito, integrata con le condizioni al contorno(3.3).

La presenza di una derivata seconda della temperatura pari ad un termine costante implica che questa volta il profilo di temperatura sia parabolico. E infatti, una doppia integrazione della (3.10) fornisce:

$$T(x) = -\frac{p}{2k} x^2 + C_1 x + C_2 \quad (3.11)$$

applicazione delle (3.3) fornisce le due costanti di integrazione:

$$\begin{aligned} C_2 &= T_1 \\ C_1 &= \frac{T_2 - T_1}{\delta} + \frac{p}{2k} \delta \end{aligned} \quad (3.12)$$

In definitiva dunque il profilo di temperatura sarà dato da:

$$T(x) = -\frac{p}{2k} x^2 + \left( \frac{T_2 - T_1}{\delta} + \frac{p}{2k} \delta \right) x + T_1 \quad (3.13)$$

La (3.13) si presta ad alcune, interessanti, osservazioni. Prima di tutto essa può essere messa nella forma:

$$T(x) = T_1 + (T_2 - T_1) \frac{x}{\delta} + \frac{p\delta^2}{2k} \frac{x}{\delta} \left( 1 - \frac{x}{\delta} \right) \quad (3.14)$$

La (3.14) si può vedere come formata da due parti. La prima è data da:

$$T_A = T_1 + (T_2 - T_1) \frac{x}{\delta} \quad (3.15)$$

e rappresenta la soluzione, lineare, del problema senza generazione con  $T_1 \neq T_2$ . La seconda parte:

$$T_B = \frac{p\delta^2}{2k} \frac{x}{\delta} \left( 1 - \frac{x}{\delta} \right) \quad (3.16)$$

è la soluzione, parabolica, della (3.10) con le condizioni al contorno:

$$\begin{aligned} x = 0 &\rightarrow T = 0 \\ x = \delta &\rightarrow T = 0 \end{aligned} \quad (3.17)$$

Quindi la (3.14) rappresenta la soluzione “sovrapposta” di due problemi:

$$\begin{aligned} k \frac{d^2 T}{dx^2} &= 0 \\ x = 0 &\rightarrow T = T_1 \\ x = \delta &\rightarrow T = T_2 \end{aligned} \quad (3.18)$$

e

$$\begin{aligned} k \frac{d^2 T}{dx^2} + p &= 0 \\ x = 0 &\rightarrow T = 0 \\ x = \delta &\rightarrow T = 0 \end{aligned} \quad (3.19)$$

Questo principio di sovrapposizione è vero per tutte le equazioni differenziali ordinarie lineari, e rappresenta quindi anche un metodo per ottenere la soluzione del problema. In altri termini, si risolve prima il problema completo con condizioni al contorno nulle, e poi il problema omogeneo con le condizioni al contorno prescritte: la soluzione complessiva è infine data dalla somma (sovrapposizione) delle due soluzioni. Incontreremo altri esempi di questo tipo di problema.

Ritornando alla nostra soluzione, questa può essere messa nella solita forma adimensionale:

$$\vartheta = \xi + \frac{p\delta^2}{2(T_2 - T_1)k} \xi(1 - \xi) \quad (3.20)$$

dove è ancora più chiaro che la soluzione è la somma di un contributo lineare e di uno parabolico, quest'ultimo simmetrico rispetto al centro della lastra ( $\xi = \frac{1}{2}$ ). Si noti inoltre che la

soluzione dipende dall'unico gruppo adimensionale  $\frac{p\delta^2}{2(T_2 - T_1)k}$ . È facile vedere che tale gruppo è il rapporto tra il calore prodotto per generazione all'interno della lastra per unità di superficie,  $p\delta$  e quello che potrebbe essere smaltito per conduzione a causa del gradiente di temperatura tra le due superfici,  $\frac{2(T_2 - T_1)k}{\delta}$  (il fattore due è legato alla presenza di due superfici, quella di sinistra e quella di destra). Per  $\frac{p\delta^2}{2(T_2 - T_1)k} \ll 1$ , la soluzione tende al profilo lineare che si ottiene in assenza di generazione di calore. Al contrario, per  $\frac{p\delta^2}{2(T_2 - T_1)k} \gg 1$  il profilo tende a quello parabolico simmetrico:

$$\vartheta = \frac{p\delta^2}{2(T_2 - T_1)k} \xi(1 - \xi) \quad (3.21)$$

in quanto la differenza di temperatura tra le due superfici della lastra è trascurabile rispetto alla temperatura massima della lastra, che viene raggiunta praticamente al centro della stessa. sia il valore di generazione, anche quando le temperature ai due estremi della lastra sono uguali. In questo caso,  $T_2 = T_1$  implica che il termine lineare è sempre trascurabile rispetto a quello parabolico simmetrico. In queste condizioni è facile mostrare che il profilo di temperatura è dato da:

$$T(x) = T_1 + \frac{p\delta^2}{2k} \frac{x}{\delta} \left(1 - \frac{x}{\delta}\right) \quad (3.22)$$

Come ultimo punto di questo problema, che va visto come una vera e propria "palestra" per l'analisi della conduzione monodimensionale stazionaria, calcoliamo il flusso di calore che attraversa la lastra:

$$q = -k \frac{dT}{dx} = px - \frac{p}{2} \delta - k \frac{T_2 - T_1}{\delta} \quad (3.23)$$

Si noti che il flusso di calore in questo caso non è costante lungo la lastra, a causa della generazione di calore interna. In particolare, esso è nullo in corrispondenza del massimo relativo di temperatura:

$$q = 0 \rightarrow x = \frac{\delta}{2} + \frac{k}{p} \frac{T_2 - T_1}{\delta} \quad (3.24)$$

La (3.24) è valida purchè il valore dell'ascissa corrispondente al massimo relativo di temperatura sia compreso all'interno della lastra, cioè se e solo se:

$$0 < \frac{1}{2} + \frac{k}{p} \frac{T_2 - T_1}{\delta^2} < 1 \quad (3.25)$$

Si noti che, in corrispondenza delle due superfici estreme della lastra, il flusso di calore è dato da:

$$q(x=0) = -\frac{p}{2}\delta - k\frac{T_2 - T_1}{\delta}$$

$$q(x=\delta) = \frac{p}{2}\delta - k\frac{T_2 - T_1}{\delta}$$
(3.26)

I flussi di calore espressi dalla (3.26) devono ovviamente essere compatibili con un bilancio di energia globale sulla lastra, che può essere scritto come:

$$q|_{x=0} - q|_{x=\delta} = p\delta$$
(3.27)

La (3.27) esprime il concetto fisico che in condizioni stazionarie tutto il calore prodotto per generazione all'interno della lastra deve essere scambiato con l'esterno. E' facile riconoscere che la (3.27) è verificata in base alle (3.26).

### III.2 Geometria cilindrica. Conduzione senza generazione

Consideriamo un cilindro cavo, in cui cioè la parte solida sia compresa tra un raggio interno,  $R_0$ , e un raggio esterno,  $R_1$ , e la cui lunghezza  $L$  sia molto maggiore di  $R_1$ . In questo caso è lecito supporre che, se la parete interna e quella esterna del cilindro si trovano a due temperature diverse, calore verrà trasportato solamente in direzione radiale, cioè il vettore flusso di calore ha proprio la direzione radiale. Per poter determinare il profilo di temperatura all'interno della parete cilindrica, scegliamo come volume di controllo differenziale un "guscio" cilindrico, e cioè il volume avente come area di base la corona circolare compresa tra il generico raggio  $r$  e il raggio  $r+dr$ , e come altezza l'intera lunghezza del cilindro (vedi Figura 5).

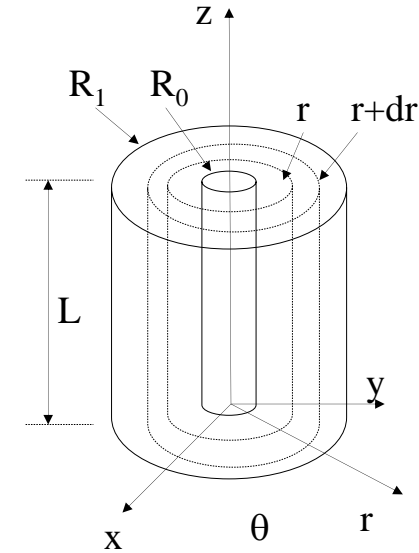


Figura 5

In maniera analoga a quanto fatto per la parete piana, possiamo scrivere un bilancio di energia su tale volume di controllo che, in condizioni stazionarie, si limiterà a sancire il concetto fisico che la somma algebrica della portata entrante attraverso una superficie (ad esempio al raggio  $r$ ) e quella uscente alla superficie a  $r+dr$  deve essere nulla:

$$2\pi r L q|_r - 2\pi r L q_r|_{r+dr} = 0$$
(3.28)

Introducendo l'equazione di Fourier per il trasporto di calore e dividendo per  $2\pi dr$ , la (3.28) diventa::

$$k \frac{d}{dr} \left( r \frac{dT}{dr} \right) = 0$$
(3.29)

La (3.29) è dunque una equazione differenziale del secondo ordine nella temperatura. Essa deve soddisfare le due condizioni al contorno:

$$\begin{aligned} R = R_0 &\rightarrow T = T_0 \\ R = R_1 &\rightarrow T = T_1 \end{aligned} \quad (3.30)$$

La (3.29) viene integrata una prima volta fornendo:

$$r \frac{dT}{dr} = C_1 \quad (3.31)$$

Dividendo membro a membro per  $r$  e integrando una seconda volta si ottiene poi:

$$T(r) = C_1 \ln r + C_2 \quad (3.32)$$

Applicando le condizioni al contorno (3.30) e sviluppando la semplice algebra corrispondente si ottiene il profilo di temperatura lungo il raggio della parete cilindrica:

$$T = T_0 - \frac{T_0 - T_1}{\ln R_1/R_0} \ln r/R_0 \quad (3.33)$$

o, in termini adimensionali:

$$\vartheta = \frac{\ln \rho}{\ln R_1/R_0} \quad (3.34)$$

avendo definito, come al solito, una temperatura e un raggio adimensionale, come:

$$\begin{aligned} \vartheta &= \frac{T - T_0}{T_1 - T_0} \\ \rho &= \frac{r}{R_0} \end{aligned} \quad (3.35)$$

Il profilo di temperatura attraverso la parete del cilindro è dunque di tipo logaritmico.

Dalla (3.33) è immediatamente possibile calcolare il flusso di calore che transita attraverso la parete:

$$q = -k \frac{dT}{dr} = \frac{k}{r} \frac{T_0 - T_1}{\ln R_1/R_0} \quad (3.36)$$

La (3.36) mostra che il flusso di calore, al contrario della lastra piana, non è costante lungo la sua direzione di propagazione. Ciò è facilmente comprensibile se si considera che il calore si propaga radialmente attraverso superfici via via più grandi (in particolare superfici cilindriche la cui superficie è proporzionale al raggio). Attraverso tali superfici quella che si trasmette costante è la portata termica, cioè il prodotto del flusso per la superficie. Così, aumentando la superficie il flusso deve diminuire in modo che il loro prodotto rimanga costante.

Per quanto detto, dopo aver calcolato il flusso è immediatamente possibile determinare la portata termica come:

$$Q = q 2\pi r L = \frac{k}{r} \frac{T_0 - T_1}{\ln R_1/R_0} 2\pi r L = 2\pi L k \frac{T_0 - T_1}{\ln R_1/R_0} \quad (3.37)$$

La (3.37) ci permette anche di ricavare l'espressione della resistenza termica per una parete cilindrica. Stante la definizione (3.8), infatti, si ha in questo caso:

$$R = \frac{\Delta T}{Q} = \frac{\ln R_1/R_0}{2\pi Lk} \quad (3.38)$$

Una utile approssimazione da utilizzare nel caso di geometria cilindrica è la cosiddetta **riduzione a lastra piana**. Si assuma che la distanza la parete esterna e quella del cilindro sia piccola rispetto al raggio medio del cilindro, cioè che:

$$R_1 - R_0 = \delta \ll \frac{R_1 + R_0}{2} \quad (3.39)$$

In questo caso è possibile riscrivere tutte le equazioni precedenti in maniera semplificata. Ad esempio, la portata termica espressa dalla (3.37) può essere riscritta come:

$$Q = 2\pi Lk \frac{T_0 - T_1}{\ln R_1/R_0} = 2\pi Lk \frac{T_0 - T_1}{\ln(R_0 + \delta)/R_0} \quad (3.40)$$

Nella ipotesi (3.39) il logaritmo a denominatore può essere scritto come:

$$\ln(R_0 + \delta)/R_0 = \ln\left(1 + \frac{\delta}{R_0}\right) \cong \frac{\delta}{R_0} \quad (3.41)$$

La (3.40) diventa allora:

$$Q \cong 2\pi LR_0 \frac{k}{\delta} (T_0 - T_1) \quad (3.42)$$

La (3.42) rappresenta l'espressione della portata termica attraverso una lastra piana di spessore  $\delta$  e superficie di area  $2\pi LR_0$ , cioè pari a quella della superficie interna del cilindro.

Siccome  $R_0 \cong R_1 = R$  l'approssimazione di lastra piana per un cilindro di parete sottile può in definitiva essere scritta come:

$$Q \cong 2\pi LR \frac{k}{\delta} (T_0 - T_1) \quad (3.43)$$

Relazioni analoghe alla (3.43) sono anche facilmente ricavabili nel caso di geometria sferica (vedi sotto) ma per brevità non vengono riportate.

### III.3 Geometria cilindrica. Conduzione con generazione

Come nel caso di una lastra piana, anche nella geometria cilindrica è utile considerare il caso in cui alla conduzione si accompagni, in condizioni stazionarie, anche la generazione di calore. Tra i tanti casi possibili, analizziamo quello di un cilindro **pieno** nel quale si generi uniformemente una quantità di calore per unità di volume e di tempo pari a  $p$ , mentre allo stesso tempo la superficie esterna del cilindro ( $r=R$ ) venga mantenuta alla temperatura costante  $T_0$ . In perfetta analogia con la lastra piana, è facile mostrare che l'equazione di bilancio di energia diventa:

$$k \frac{d}{dr} \left( r \frac{dT}{dr} \right) + pr = 0 \quad (3.44)$$

In questo caso una delle due condizioni al contorno è quella che fissa la temperatura alla parete esterna del cilindro:

$$r = R \rightarrow T = T_0 \quad (3.45)$$

Per determinare l'altra condizione, consideriamo il volume di controllo differenziale costituito dal cilindro posto proprio intorno all'asse di simmetria e di raggio  $dr$ . Ci rendiamo subito conto che,

avendo tale volume di controllo una sola superficie (quella al raggio  $dr$ ), vi potrà essere un solo termine di ingresso o di uscita di calore (a seconda del verso del flusso). In ogni caso il bilancio di energia viene quindi scritto come:

$$2\pi drLq|_{r=dr} + p\pi(dr)^2 L = 0 \quad (3.46)$$

La (3.46), per  $dr$  che tende a zero, è quindi la somma di due infinitesimi. Tuttavia il termine di generazione, essendo proporzionale al volume del cilindro differenziale, è un infinitesimo di ordine superiore rispetto al termine di flusso, proporzionale alla superficie. Ciò significa che, per  $dr$  tendente a zero, la (3.46) diventa:

$$2\pi Lq = 0 \quad (3.47)$$

La (3.47) può essere soddisfatta se e solo se il termine di flusso al centro del cilindro è nullo. Esprimendo il flusso attraverso la legge di Fourier si ricava quindi la seconda condizione al contorno:

$$r = 0 \rightarrow \frac{dT}{dr} = 0 \quad (3.48)$$

Si noti che la (3.48), valida sempre al centro di una geometria cilindrica o sferica, in condizioni stazionarie o transitorie, sancisce la presenza di un estremo relativo (massimo o minimo) di temperatura al centro del cilindro.

Possiamo ora integrare la (3.44). Una prima integrazione fornisce:

$$r \frac{dT}{dr} = -\frac{p}{k} \frac{r^2}{2} + C_1 \quad (3.49)$$

L'applicazione della condizione al contorno (3.48) fornisce immediatamente  $C_1=0$ . Integrando una seconda volta si ha:

$$T(r) = -\frac{p}{k} \frac{r^2}{4} + C_2 \quad (3.50)$$

con la seconda costante di integrazione facilmente ottenuta applicando la (3.45):

$$C_2 = T_0 + \frac{p}{k} \frac{R^2}{4} \quad (3.51)$$

da cui:

$$T(r) = T_0 + \frac{p}{k} \frac{R^2}{4} \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right] \quad (3.52)$$

Il profilo di temperatura è quindi parabolico con il massimo al centro.

In maniera analoga al caso della lastra piana la (3.52) può essere adimensionalizzata. In questo particolare caso, si noti che la temperatura al centro è pari a:

$$T_1 = T_0 + \frac{p}{k} \frac{R^2}{4} \quad (3.53)$$

per cui è possibile definire una temperatura adimensionale come:

$$\vartheta = \frac{T - T_0}{T_1 - T_0} = 4k \frac{T - T_0}{pR^2} \quad (3.54)$$

Definendo inoltre un raggio adimensionale come:

$$\rho = \frac{r}{R} \quad (3.55)$$

si ha il profilo di temperatura adimensionale nella semplicissima forma:

$$\vartheta = 1 - \rho^2 \quad (3.56)$$

### III.4. Conduzione in geometria sferica

Considerazioni del tutto analoghe a quelle già fatte per la geometria piana e per quella cilindrica possono essere ripetute nel caso di geometria sferica. Per questo motivo i risultati per tale geometria verranno passati in rassegna più rapidamente.

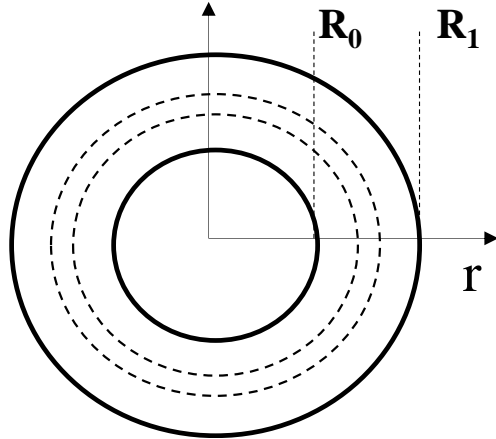


Figura 6

Nel caso del trasporto di calore conduttivo in geometria sferica il bilancio di energia va scritto su un guscio sferico di spessore  $dr$  (vedi Figura 6). L'equazione di bilancio, nella sua forma più generale che include anche un termine di generazione di calore, diventa:

$$k \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dT}{dr} \right) + pr^2 = 0 \quad (3.57)$$

Nel caso di assenza di generazione ( $p=0$ ) e di cavità sferica con le seguenti condizioni al contorno:

$$\begin{aligned} R = R_0 &\rightarrow T = T_0 \\ R = R_1 &\rightarrow T = T_1 \end{aligned} \quad (3.58)$$

l'integrazione della (3.57) porta al seguente profilo di temperatura:

$$T - T_0 = (T_1 - T_0) \frac{R_0 R_1}{R_1 - R_0} \left( \frac{1}{R_0} - \frac{1}{r} \right) \quad (3.59)$$

In totale analogia al trasporto in geometria cilindrica è facile mostrare che la potenza termica trasportata, indipendente dal raggio  $r$ , è data da:

$$Q = 4\pi k R_0 R_1 \frac{T_0 - T_1}{R_1 - R_0} \quad (3.60)$$

mentre il flusso di calore, inversamente proporzionale alla superficie attraverso la quale transita, è dato da:

$$q = -k \frac{dT}{dr} = k \frac{(T_1 - T_0)}{r^2} \frac{R_0 R_1}{R_1 - R_0} \quad (3.61)$$

e che quindi la resistenza termica è data in questo caso da:

$$R = \frac{\Delta T}{Q} = \frac{1}{4\pi k} \frac{R_1 - R_0}{R_0 R_1} \quad (3.62)$$

Il caso con generazione termica in una sfera piena porta a equazioni concettualmente simili alle (3.44)-(3.56) della sezione precedente, e sono lasciate al lettore come facile esercizio.

#### IV. Pareti composte. Conduzione in serie e in parallelo

Come già discusso nelle sezioni precedenti, il trasporto di calore in regime stazionario senza generazione permette di definire il concetto di resistenza termica, cioè del coefficiente di proporzionalità tra la portata termica e la differenza di temperatura agli estremi della geometria. Allo stesso modo è stata sottolineata l'analogia tra il trasporto di calore sotto l'azione di una differenza di temperatura e, ad esempio, il trasporto di corrente elettrica sotto l'azione di una differenza di potenziale. Ancora in totale analogia si può introdurre anche il concetto di **resistenza composta**.

Si consideri (Figura 7) una parete piana costituita da due strati di materiale diverso. Il primo, di spessore  $\delta_1$ , è caratterizzato da una conducibilità termica  $k_1$ , mentre  $\delta_2$  e  $k_2$  sono i corrispondenti parametri per il secondo materiale. La lastra è sottoposta ai suoi estremi (cioè all'ascissa  $x=0$  e  $x=\delta_1+\delta_2$ ) a due valori diversi di temperatura,  $T_1$  e  $T_2$ , mentre indichiamo con  $T_3$  la temperatura all'interfaccia tra le due lastre.

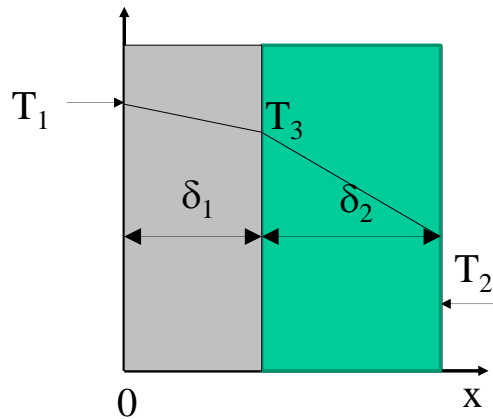


Figura 7

In queste condizioni il flusso di calore si trasmette **in serie** attraverso le due lastre e, in virtù della geometria piana, risulta costante in entrambi i materiali, mentre diversi sono i due salti termici. Si può quindi scrivere:

$$\begin{aligned} T_1 - T_3 &= \Delta T_1 = q \frac{\delta_1}{k_1} \\ T_3 - T_2 &= \Delta T_2 = q \frac{\delta_2}{k_2} \end{aligned} \quad (4.1)$$

Sommando le (4.1) membro a membro la temperatura di interfaccia scompare e si ottiene:

$$T_1 - T_2 = q \left( \frac{\delta_1}{k_1} + \frac{\delta_2}{k_2} \right) = q(R_1 + R_2) \quad (4.2)$$

La (1.2), estendibile immediatamente al caso di un qualunque numero di strati costituenti la parete composta, dimostra che nel caso di conduzione del calore in serie, in geometria piana, la resistenza complessiva (o **equivalente**) del sistema è pari alla somma delle resistenze in serie:

$$R_{eq} = \sum_i R_i = \sum_i \frac{\delta_i}{k_i} \quad (4.3)$$

Supponiamo adesso (Figura 8) che la parete, sia costituita dai due materiali questa volta disposti in **parallelo**, cioè un materiale espone una frazione  $x_i$  della superficie complessiva  $S$  alle due temperature estreme, mentre entrambi i materiali occupano l'intero spessore  $\delta$  della lastra. In questo caso il flusso di calore si ripartisce tra le due pareti sotto la spinta dello stesso gradiente di

temperatura. Per una superficie complessiva unitaria si può quindi scrivere:

$$q = q_1 + q_2 = \left( x_1 \frac{k_1}{\delta} + x_2 \frac{k_2}{\delta} \right) (T_1 - T_2) = \frac{\Delta T}{\delta} (x_1 k_1 + x_2 k_2) \quad (4.4)$$

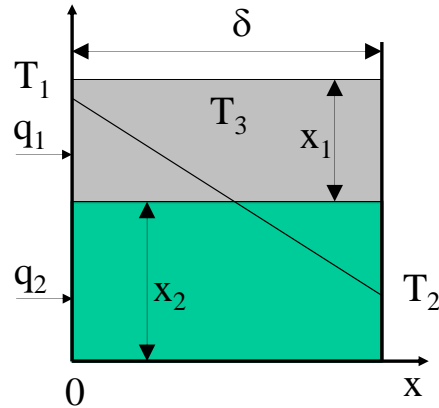


Figura 8

In base alla (4.4) si può quindi concludere che nel caso di trasporto in parallelo sono le conducibilità a sommarsi (pesate delle loro frazioni), o meglio che la resistenza equivalente si compone secondo la seguente legge:

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{\delta} \sum_i x_i k_i \quad (4.5)$$

I risultati ottenuti per la parete piana possono essere facilmente estesi, con le dovute differenze, anche alle altre geometrie monodimensionali. Ad esempio, si consideri la parete cilindrica di Figura 9, composta da due materiali di conducibilità termica  $k_1$  e  $k_2$ , il primo compreso tra il raggio  $R_0$  (alla temperatura  $T_0$ ) e il

raggio  $R_1$  (alla temperatura  $T_1$ ), il secondo compreso tra il raggio  $R_1$  e il raggio  $R_2$  (alla temperatura  $T_2$ ). In analogia con quanto già scritto per la lastra piana possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} T_0 - T_1 &= \Delta T_1 = QR_1 = Q \frac{\ln R_1/R_0}{2\pi Lk_1} \\ T_1 - T_2 &= \Delta T_2 = QR_2 = Q \frac{\ln R_1/R_2}{2\pi Lk_2} \end{aligned} \quad (4.6)$$

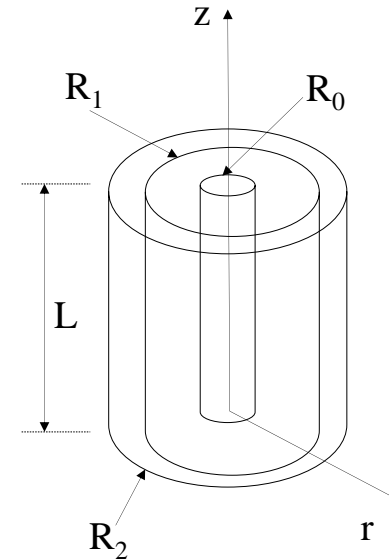


Figura 9

Sommando membro a membro le (4.6) si ottiene:

$$\Delta T = T_0 - T_2 = Q \left( \frac{\ln R_1/R_0}{2\pi Lk_1} + \frac{\ln R_1/R_2}{2\pi Lk_2} \right) \quad (4.7)$$

da cui la resistenza equivalente:

$$R_{eq} = R_1 + R_2 = \frac{1}{2\pi L} \left( \frac{\ln R_1/R_0}{k_1} + \frac{\ln R_1/R_2}{k_2} \right) \quad (4.8)$$

Analoghe espressioni possono essere trovate per la resistenza in parallelo in geometria cilindrica e per la geometria sferica. La loro derivazione è lasciata al lettore.