

Fondamenti di Ingegneria dei Sistemi di Trasporto

- Elementi di teoria delle code

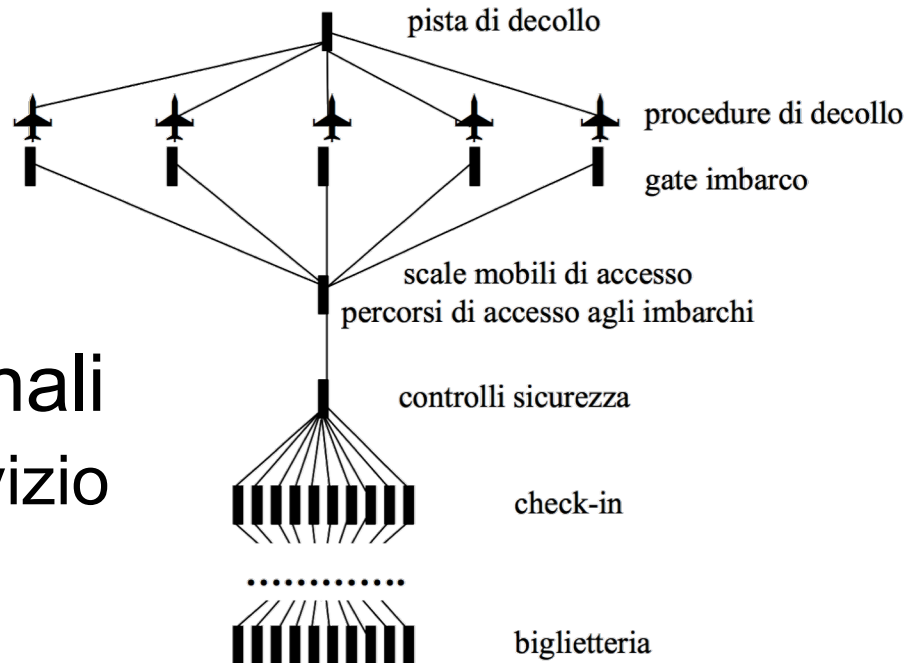
Applicazioni

■ Modellazione di punti di servizio

- ❑ Casello autostradale
- ❑ Passaggio a livello
- ❑ Gate di imbarco
- ❑ Check point
- ❑ ...

■ Modellazione di terminali

- ❑ Insieme di punti di servizio
 - In serie
 - In parallelo
 - Misti



Definizione del problema

- Ad ogni punto di servizio sono svolte attività che
 - Richiedono un certo tempo di servizio $\Rightarrow$ capacità
 - Impegnano delle risorse

- Capacità = numero massimo di utenti che è possibile servire nell'unità di tempo
 - Es.: barriera autostradale con singolo punto di servizio
 - Tempo medio di servizio $T_s = 20$ secondi a veicolo
 - Capacità $Cap = 1/T_s = 1/20$ veicoli/secondo =
 $= 3600/20 = 180$ veicoli/ora
 - N.B.: non è un concetto nuovo... nel deflusso stradale
 $Cap = 1/headway_{min}$

Definizione del problema

- Tasso (medio) degli arrivi
 - Numero di utenti medio in arrivo nell'unità di tempo
 - Es.: barriera autostradale con singolo punto di servizio
 - Intertempo di arrivo $t_a = 18$ secondi
 - Tasso degli arrivi $\alpha = 1/t_a = 1/18$ veic/sec = 200 veic/ora
 - Se $Cap = 180$ veic/h $\Rightarrow$ ogni ora la coda cresce di 20 veicoli
- Intensità di traffico (grado di saturazione)
 - Rapporto tra Tasso degli arrivi e Capacità
 - $\rho = \alpha/Cap$
 - Se $\rho > 1 \Rightarrow$ sistema sovrassaturo (e non stabile)
(formazione e sviluppo di coda)
 - Se $\rho \leq 1 \Rightarrow$ in media nessuna coda
(il che non significa che non possano esservi temporaneamente utenti in coda)

Probabilità delle code

- Anche in un sistema non sovrassaturo sono possibili code
 - Se l'intertempo degli arrivi è una variabile aleatoria
 - Es.: $t_a = 30$ secondi
 - E per semplicità il tasso di servizio è deterministico
 - Es.: $t_s = 20$ secondi

Probabilità delle code

- Primo arrivo al secondo 32
 - Non attende
 - Esce dal sistema al secondo $32+20 = 52$
- Secondo arrivo al secondo $32+4 = 36$
 - Attende fino al secondo 52 (16 secondi)
 - Esce dal sistema al secondo $52+20 = 72$
- Terzo arrivo al secondo $36+31 = 67$
 - Attende fino al secondo 72 (5 secondi)
 - Esce dal sistema al secondo $72+20 = 92$
- Quarto arrivo al secondo $67+31 = 98$
 - Non attende
 - Esce dal sistema al secondo $98+20 = 118$
- Quinto arrivo al secondo $98+15 = 113$
 - Attende fino al secondo 118 (5 secondi)
 - Esce dal sistema al secondo $118+20 = 138$
- Sesto arrivo al secondo $113+30 = 143$
 - Non attende
 - Esce dal sistema al secondo $143 + 20 = 163$
- ...

Intertempo arrivi	
	32
	4
	31
	31
	15
	30

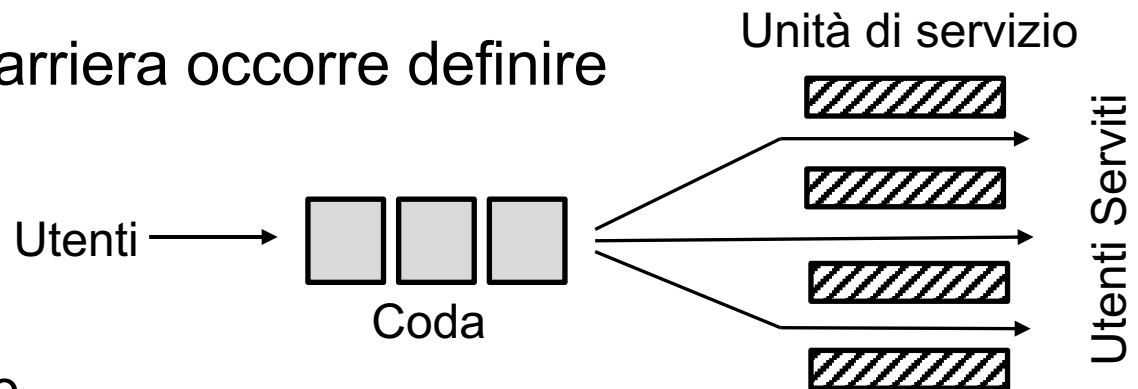


Capacità dei sistemi

- La capacità di un sistema è diversa da quella del singolo punto di servizio
 - Punti di servizio in serie
 - Capacità = minimo delle capacità
 - Punti di servizio in parallelo
 - Capacità = somma delle capacità

- Per un sistema a barriera occorre definire

- Modello degli arrivi
- Modello del servizio
- Numero di canali/unità di servizio
- Disciplina della coda



Modello degli arrivi

- Per il modello degli arrivi occorre definire
 - L'intertempo tra un istante di arrivo qualsiasi ed il successivo
 - Il numero di arrivi in un tempo prefissato t
- Sono entrambe delle variabili aleatorie (collegate tra loro)
- Il più famoso ed utilizzato dei modelli degli arrivi
 - Processo di Poisson (con parametro α)
 1. La probabilità di un arrivo nell'intervallo $[t, t+dt]$ è proporzionale all'ampiezza dell'intervallo dt secondo un coefficiente α , a meno di un infinitesimo di ordine superiore
 - $\lim_{dt \rightarrow 0} \text{Prob}[N(t, t + dt) = 1] = \alpha \, dt + O(dt)$
 2. La prob. che si verifichi più di un arrivo è un infin. di ordine sup.
 - $\lim_{dt \rightarrow 0} \text{Prob}[N(t, t + dt) > 1] = O(dt)$

Processo degli arrivi Poissoniani

- Conseguenza di 1) e 2) è che
 1. La probabilità che non si verifichi alcun arrivo è:
 - $\lim_{dt \rightarrow 0} \text{Prob}[N(t, t + dt) = 0] = 1 - \alpha dt$
- Inoltre, in un processo di Poisson si deve verificare che la probabilità di ciò che è accade in un intervallo di tempo $[t, t+dt]$ è indipendente da ciò che è accaduto precedentemente
 - Probabilità uguale alla probabilità condizionata

Processo degli arrivi Poissoniani

- In un processo di Poisson (di tasso α)
 - Il numero di arrivi in un intervallo di tempo unitario è una v.a. discreta di Poisson
 - $p(n) = \frac{\alpha^n}{n!} e^{-\alpha}$, $E[n] = \alpha$ $\alpha = (\text{tasso, portata})$
 - Il tempo intercorrente tra due istanti di arrivo successivi è una v.a. continua Esponenziale Negativa anche essa di parametro α
 - $f(t) = \alpha e^{-\alpha t}$, $E[t] = 1/\alpha = t_a$

(gli arrivi sono completamente casuali)

Meccanismo di servizio

- Numero di canali/unità di servizio
- Tempo di servizio
 - Tempi di servizio costanti
 - Tempi di servizio variabili
 - Spesso si usa la v.a. di Erlang (con parametri k e Cap)
 - $T(k)$ = tempo necessario per servire k utenti = k/Cap
 - Somma di k variabili esp. neg. indep. di parametro Cap
 - Se $k = 1$, allora esponenziale negativa
 - Tempo di servizio medio = $1/Cap = T_s$
 - Processo delle partenze = Processo di Poisson di parametro Cap

Disciplina della coda

■ Sistemi ad un canale

- ❑ Accesso al servizio in ordine di arrivo (First In First Off – FIFO)
- ❑ L'ultimo arrivato è il primo servito (Last In First Off – LIFO)
- ❑ Accesso al servizio in ordine casuale

■ Sistemi a più canali

- ❑ Unica coda con accesso al primo canale libero
- ❑ Una coda per ogni canale
 - Con scelta libera da parte degli utenti
 - Con scelta vincolata da regole deterministiche (es.: suddivisione per lettera alfabetica)

Notazione di Kendall per le code

- $A / B / m / Ca / C$ (es.: $M/M/1/\infty/FiFo$, o $M/M/1$)
 - A = distribuzione tempi di arrivo
 - G = generica
 - D = deterministica
 - M = markoviana (esponenziale negativa)
 - E_i = Erlang di ordine i
 - B = distribuzione tempi di servizio
 - Come A
 - m = numero di server
 - K = capacità della coda
 - se $k=\infty \rightarrow$ si omette
 - C = Disciplina del servizio
 - FIFO, LIFO
 - Se FIFO $\rightarrow$ si omette

Variabili significative

- w_a^i = tempo di attesa per l'utente i-esimo
 - Tempo da ingresso nel sistema a inizio del servizio
- w_s^i = tempo di permanenza nel sistema per utente i-esimo
 - Tempo da ingresso nel sistema a fine del servizio

$$w_s^i = w_a^i + t_s^i$$

- n_a = numero medio utenti in attesa
- n_s = numero medio utenti nel sistema
- w_a = tempo medio di attesa
- w_s = tempo medio di permanenza nel sistema

Teorema di Little

- Non facciamo dimostrazioni
Valgono le relazioni

- $w_a = n_a / \alpha$

- $w_s = n_s / \alpha$

- $w_a = w_s - T_s$

- $n_a = n_s - \rho$

n_a = numero medio utenti in attesa

n_s = numero medio utenti nel sistema

w_a = tempo medio di attesa

w_s = tempo medio di permanenza nel sistema

T_s = tempo di servizio (medio)

$$(\rho = \alpha / \text{Cap})$$

Esercizio 1

■ Impianto di risalita (skilift)

- All'arrivo di uno skilift si conta lo sganciamento di 12 sciatori al minuto
- La risalita lungo lo skilift dura 15 minuti
- **Quanti ganci ha lo skilift?**
 - Tenere conto che il numero di ganci che salgono sono la metà del numero totale di ganci

■ Teorema di Little:

- $w_s = 15$ (minuti), $\alpha = 12$ (sciatori/minuto)
- $n_s = \alpha w_s = 12 \times 15 = 180$ sciatori in salita
- $n_{\text{ganci}} = 180 \times 2 = 360$

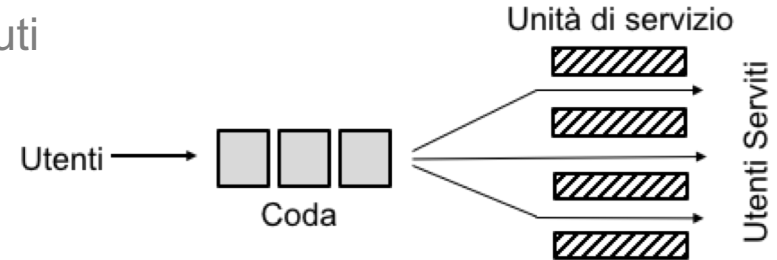
Esercizio 1 – risoluzione alternativa

■ Impianto di risalita (skilift)

- All'arrivo di uno skilift si conta lo sganciamento di 12 sciatori al minuto
- La risalita lungo lo skilift dura 15 minuti

■ Quanti ganci ha lo skilift?

- Tenere conto che il numero di ganci che salgono sono la metà del numero totale di ganci



■ La capacità del sistema può essere considerata la somma della capacità di n canali di servizio (i ganci utilizzati dagli utenti per salire)

- $Cap_T = n \text{ } Cap_i = 12 \text{ (sciatori /minuto)}$
- $Cap_i = 1/T_s = 1/15 \text{ (sciatori/minuto)}$
- $n = Cap_T / Cap_i = 12 \times 15 = 180$
- $n_ganci = 180 \times 2 = 360$

Esercizio 2

- Skilift come in esercizio 1... Inoltre:
 - La discesa fino al termine della pista richiede 10 minuti
 - Il numero totale di sciatori sulle piste è di 500
 - Quanto si attende in media alla base dello skilift?
- Teorema di Little:
 - Guardando alla discesa
 - $w'_s = 10$ (minuti)
 - $\alpha' = 12$ (sciatori/minuto)
scendono tanti sciatori quanti se ne sganciano in cima allo skilift
 - $n'_s = \alpha' w'_s = 12 \times 10 = 120$
 - Guardando al sistema complessivo salita + discesa
 - $n_s =$ numero utenti nel sistema = 500
 - Numero utenti serviti contemporaneamente (in salita o discesa) = $180 + 120 = 300$
 - $n_a =$ numero utenti in coda = $500 - 300 = 200$
 - Da teom. di Little $w_a = n_a / \alpha = 200 / 12 = 16.67$ minuti

Sistemi M/M/1

- Si può dimostrare che la probabilità di avere n utenti nel sistema è:

- $p(n) = p_0 e^n$

- $\sum_{n=0}^{\infty} p(n) = \sum_{n=0}^{\infty} p_0 e^n = p_0 \sum_{n=0}^{\infty} e^n = 1$

- Se $\rho < 1 \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} e^n = \frac{1}{1-e} \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} p(n) = 1 = \frac{1}{1-e} p_0$

- $p_0 = 1 - e$

- Per sistemi non saturi ($e < 1$)
 $p(n) = (1 - e) e^n$

- Numero medio utenti nel sistema

- $n_s = \sum_{n=0}^{\infty} n p(n) = (1 - e) \sum_{n=0}^{\infty} n e^n = \frac{e}{1-e}$

- $(\sum_{n=0}^{\infty} n e^n = \frac{e}{(1-e)^2})$

Sistemi M/M/1

- Numero medio utenti nel sistema

- $n_s = \frac{\rho}{1-\rho}$

- Da teorema di Little

- Numero medio di utenti in attesa

- $n_a = n_s - \rho = \frac{\rho}{1-\rho} - \rho = \frac{\rho - \rho(1-\rho)}{1-\rho} = \frac{\rho^2}{1-\rho}$

- Tempo medio di permanenza nel sistema

- $w_s = n_s / \alpha = \frac{\rho}{\alpha(1-\rho)}$

- Tempo medio di permanenza in attesa

- $w_a = n_a / \alpha = \frac{\rho^2}{\alpha(1-\rho)}$

$$w_a = n_a / \alpha$$

$$w_s = n_s / \alpha$$

$$w_a = w_s - T_s$$

$$n_a = n_s - \rho \quad (\rho = \alpha / \text{Cap})$$

Sistemi M/M/1

- Funzione di distribuzione F_n del numero di utenti nel sistema

- $F_n(r) = P[n \leq r] = \sum_{n=0}^r p(n) = (1 - \rho) \sum_{n=0}^r \rho^n = 1 - \rho^{r+1}$

- Probabilità di avere più di n utenti in attesa

- $P[n_a > n] = P[n_s > n+1] = \rho^{n+2}$

- Probabilità di attendere

- $p_a = P[n_s > 1] = \rho^2$