Appunti per il corso di Analisi Matematica I

Serie numeriche

Indice

1 Definizione e primi esempi

Definizione 1.1. Sia a_n una successione numerica. Allora la successione

$$
\begin{aligned}
&S_1 = a_1\\
&S_2 = a_1 + a_2\\
&S_3 = a_1 + a_2 + a_3\\
&\dots\\
&S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k\\
&\dots
\end{aligned}
$$

prende il nome di *serie numerica*. Il termine S_n è detto somma parziale n-esima. Se il limite di S_n esiste, diremo che la serie è regolare. Se tale limite è finito, allora diremo che la serie è convergente e chiameremo il limite *somma* della serie. Si pone

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots .$$

In tal caso la quantità

$$R_n = S - S_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$$

prende il nome di *resto n-esimo*.
Se $S_n \to +\infty$, diremo che la serie diverge positivamente, e in tal caso scriveremo

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k = +\infty.$$

Analogamente, se $S_n \to -\infty$ diremo che la serie diverge negativamente e scriveremo

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k = -\infty.$$

Infine, se S_n non ammette limite diremo che la serie è oscillante.

Per motivi di praticità, con il simbolo

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$$

ci riferiremo sia alla serie che alla sua somma.

In generale, il calcolo di una somma di una serie non è un'operazione semplice. Il nostro obiettivo principale è quello di studiarne il carattere, ossia verificare se, data una serie, questa è convergente, divergente o oscillante. Vediamo alcuni esempi importanti di serie numeriche.

1.1 La serie geometrica

Definizione 1.2. Fissato $x \in \mathbb{R}$, la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots$$

prende il nome di serie geometrica di ragione x.

Detta

$$S_n = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n, \qquad n \geq 0,$$

è immediato verificare che per $x = 1$ la serie diverge, in quanto in tal caso $S_n = n + 1$; inoltre se $x \neq 1$ si ha

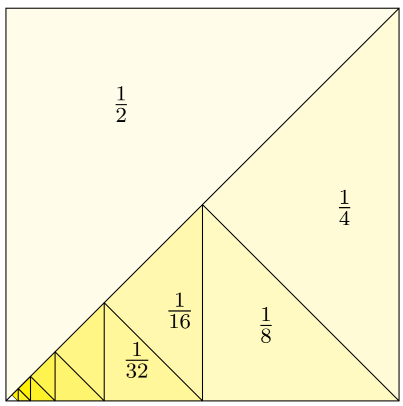
$$S_n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x},$$

e la serie converge se e solo se $-1 < x < 1$, in quanto per tali x si ha che $x^{n+1} \to 0$. Inoltre

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \lim_{n \to \infty} S_n = \frac{1}{1 - x}, \qquad \text{per } x \in]-1, 1[.$$

Esempio 1.1. Si consideri il quadrato di lato 1, e si suddivida il quadrato in triangoli isosceli come in figura. La superficie del quadrato viene ricoperta da infiniti triangoli isosceli di area $\frac{1}{2^n}$. L'area totale del quadrato coincide con la somma infinita delle aree dei triangoli:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 1. \end{aligned}$$



1.2 La serie di Mengoli e le serie telescopiche

Proposizione 1.1. *La serie di Mengoli*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n\cdot(n+1)} + \ldots$$

è convergente e la sua somma è pari a 1.

Dimostrazione. Infatti, poiché

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1},$$

si ha

$$S_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Pertanto

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{n\to\infty} S_n = 1.$$

□

La serie di Mengoli appartiene ad una classe più generale di serie, dette serie telescopiche, ossia del tipo

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (b_n - b_{n+1}),$$

dove b_n è una data successione. Nell'esempio di Mengoli, $b_n = \frac{1}{n}$.

Proposizione 1.2. *Data b_n successione numerica, la serie telescopica $\sum_{n=1}^{+\infty}(b_n - b_{n+1})$ converge se e solo se b_n è convergente, e in tal caso, detto $b = \lim_n b_n$, si ha*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (b_n - b_{n+1}) = b_1 - b.$$

Dimostrazione. Segue immediatamente osservando che

$$S_n = (b_1 - b_2) + (b_2 - b_3) + \ldots + (b_{n-1} - b_n) + (b_n - b_{n+1}) = b_1 - b_{n+1}.$$

□

Esempio 1.2. La serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \log\left(1+\frac{1}{n}\right) \tag{1}$$

diverge positivamente. Infatti, poiché

$$\log\left(1+\frac{1}{n}\right) = \log(n+1) - \log n,$$

la serie (1) è una serie telescopica, e

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (\log(n+1) - \log n) = \lim_{n\to\infty} \log(n+1) = +\infty.$$

1.3 La serie armonica

Definizione 1.3. La serie di termine generale $a_n = \frac{1}{n}$ prende il nome di *serie armonica*:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}.$$

Proposizione 1.3. *La serie armonica diverge positivamente.*

Dimostrazione. Ricordiamo che per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e,$$

dunque

$$\log\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$$

e quindi

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} > \sum_{k=1}^{n} \log\left(1+\frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n} (\log(k+1) - \log k) = \log(1+n),$$

da cui, per il criterio del confronto,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty.$$

□

1.4 Prime proprietà delle serie

Elenchiamo alcune basilari proprietà delle serie numeriche.

Proposizione 1.4. *Se la serie* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *converge, allora*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0. \tag{2}$$

Dimostrazione. Sia S la somma della serie. Poiché

$$S_n - S_{n-1} = (a_1 + \ldots + a_n) - (a_1 + \ldots + a_{n-1}) = a_n,$$

si ha

$$\lim_n a_n = \lim_n (S_n - S_{n-1}) = S - S = 0,$$

cioè la tesi. □

Osservazione 1.1. La condizione non è sufficiente per verificare la convergenza di una serie. Basta ricordare, infatti che la serie armonica diverge, pur essendo $\lim \frac{1}{n} = 0$. L'esempio 1.2 suggerisce la stessa conclusione.

Una condizione necessaria e sufficiente affinché una serie converga è data dal seguente

Teorema 1.1 (Criterio di convergenza di Cauchy)**.** *La serie* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *converge se e solo se per ogni* $\varepsilon > 0$ *esiste un indice* ν *tale che*

$$|a_{n+1} + \ldots + a_{n+k}| < \varepsilon \tag{3}$$

per ogni $n > \nu$ *e per ogni* $k \in \mathbb{N}$.

Dimostrazione. Applicando il criterio di Cauchy alla successione S_n, si ha che la serie converge se e solo se per $\varepsilon > 0$ esiste ν tale che

$$|S_m - S_n| < \varepsilon, \quad \forall m, n > \nu.$$

Scelto $m = n + k$, $k \in \mathbb{N}$, si ha

$$|S_{n+k} - S_n| = |a_{n+1} + \ldots + a_{n+k}| < \varepsilon,$$

da cui si ha la tesi. □

Osservazione 1.2. Osserviamo che la (3) implica che qualunque sia $k \in \mathbb{N}$

$$\lim_{n\to+\infty} (a_{n+1} + \ldots + a_{n+k}) = 0.$$

Quindi ad esempio

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{j=n+1}^{2n} a_j = 0.$$

Esempio 1.3. Verifichiamo anche col criterio di Cauchy che la serie armonica diverge. Ricordando l'osservazione precedente abbiamo che

$$\frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n} \geq n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2},$$

e pertanto la serie armonica non converge, dunque (essendo a termini positivi) diverge.

Dalle proprietà dei limiti segue immediatamente la seguente proposizione.

Proposizione 1.5. *Si ha:*

1. *se* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *è convergente, allora per ogni* $\lambda \in \mathbb{R}$ *la serie* $\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda a_n$ *è convergente, e si ha*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda a_n = \lambda \sum_{n=1}^{+\infty} a_n; \tag{4}$$

2. *se* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *e* $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ *sono convergenti, allora la serie* $\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n+b_n)$ *è convergente e si ha*

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n. \tag{5}$$

Osservazione 1.3. Analogamente a quanto detto per le successioni, l'identità (4) si può estendere anche ad una serie divergente, a patto che λ sia diverso da zero, mentre la (5) si può estendere anche alle serie divergenti tranne nel caso delle forme indeterminate $(+\infty - \infty)$.

Osservazione 1.4. Il carattere di una serie non cambia se ad esso sostituiamo un numero finito di termini, o se la somma parte da indici diversi. Chiaramente però, se la serie risulta regolare, in generale la somma non sarà la stessa. Ad esempio, la serie $\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{2^n}$ è convergente, e la sua somma è

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} - 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} - \frac{7}{4} = \frac{1}{4}.$$

2 Serie a termini nonnegativi

Consideriamo ora le serie a termini nonnegativi, ossia quelle per cui risulta $a_n \geq 0$. Tali serie non possono essere oscillanti. Infatti, vale la seguente

Proposizione 2.1. *Se* $a_n \geq 0$, *allora la serie* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *o converge o diverge positivamente.*

Dimostrazione. Poichè $a_n \geq 0$, si ha

$$S_n = S_{n-1} + a_n \geq S_{n-1},$$

pertanto S_n è una successione monotona crescente. Dal teorema di regolarità delle successioni monotone si ha la tesi. □

2.1 Criteri di convergenza per le serie a termini non negativi

Elenchiamo ora alcuni criteri di convergenza per le serie a termini nonnegativi.

2.1.1 Criteri del confronto

Proposizione 2.2 (Criterio del confronto)**.** *Siano* a_n, b_n *due successioni nonnegative e tali che per ogni* $n \in \mathbb{N}$ *risulta*

$$a_n \leq b_n. \tag{6}$$

Si ha:

1. *se* $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ *converge, allora* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *converge;*
2. *se* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *diverge positivamente, allora* $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ *diverge positivamente.*

Dimostrazione. Dall'ipotesi (6) si ha

$$S_n = a_1 + \ldots + a_n \leq b_1 + \ldots + b_n = T_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Essendo S_n e T_n regolari, la tesi segue immediatamente dai criteri del confronto per le successioni. $\square$

Osservazione 2.1. La tesi della proposizione precedente continua a valere anche se la condizione (6) vale solo definitivamente.

Dal criterio del confronto segue facilmente il seguente importante criterio.

Proposizione 2.3 (Criterio del confronto asintotico, I)**.** *Siano* $a_n \geq 0$, $b_n > 0$ *due successioni. Se*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \ell, \quad \textit{con } \ell \textit{ finito e diverso da zero}$$

allora le serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} b_n$$

hanno lo stesso carattere.

Dimostrazione. Sia $0 < \varepsilon < \ell$. Dalla definizione di limite si ha che

$$\ell - \varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < \ell + \varepsilon$$

definitivamente. Pertanto

$$0 < (\ell - \varepsilon) b_n < a_n < (\ell + \varepsilon) b_n$$

definitivamente, e dal criterio del confronto (Prop. 2.2) si ha la tesi. $\square$

Esempio 2.1. La serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \tag{7}$$

converge. Inoltre

$$1 < \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} < 2.$$

Per verificare ciò utilizziamo il principio del confronto, ricordando la serie di Mengoli

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 1.$$

Si ha, per ogni $n \geq 2$:

$$\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n(n-1)},$$

e dunque per il criterio del confronto la serie (7) converge. Inoltre

$$1 \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \sum_{n=2}^{k} \frac{1}{n^2} \leq 1 + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(n-1)} = 2.$$

Osservazione 2.2. Mentre calcolare la somma della serie di Mengoli

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} + \ldots$$

è un'operazione semplice, calcolare la somma di

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots$$

è un problema molto più complesso, e non si può effettuare con strumenti elementari come per la serie di Mengoli. Si ha

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6},$$

che vale circa 1.6449. Il problema del calcolo di questa somma è storicamente rilevante ed è noto come *problema di Basilea*; fu posto da Mengoli[1] nel 1644 e rimase aperto per circa un secolo: fu risolto da Eulero[2] nel 1735.

Esempio 2.2. La serie a termini positivi

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sin \frac{1}{n}$$

diverge positivamente. Infatti, poiché

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1,$$

ha lo stesso carattere della serie armonica $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty$.

[1] Pietro Mengoli, Bologna 1626-1686

[2] Leonhard Euler, Basilea 1707 - San Pietroburgo 1783

Esempio 2.3. La serie a termini positivi

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sin \frac{1}{2^n}$$

converge. Infatti, poiché

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin \frac{1}{2^n}}{\frac{1}{2^n}} = 1,$$

la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \sin \frac{1}{2^n}$ ha lo stesso carattere della serie convergente $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n}$.

Nelle ipotesi del criterio del confronto asintotico, abbiamo supposto che il limite del rapporto non può essere né zero né infinito. Cosa accade se ci troviamo in uno di questi casi, dunque? La risposta è data nel successivo risultato.

Proposizione 2.4 (Criterio del confronto asintotico, II). *Siano $a_n \geq 0$, $b_n > 0$ due successioni.*

1. *Supponiamo*

   $$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0.$$

   Allora:

   a) *se la serie* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ *converge, anche la serie* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *converge;*

   b) *se la serie* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *diverge positivamente, anche la serie* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ *diverge positivamente.*

2. *Supponiamo*

   $$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty.$$

   Allora:

   a) *se la serie* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ *diverge positivamente, anche la serie* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *diverge positivamente;*

   b) *se la serie* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *converge, anche la serie* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ *converge.*

Dimostrazione. Verifichiamo solo il primo punto, il secondo è lasciato per esercizio. Se $\frac{a_n}{b_n} \to 0$, allora per $\varepsilon = 1$

$$a_n < b_n$$

definitivamente. Dal criterio del confronto si ha la tesi. □

Osservazione 2.3. Abbiamo visto che il solo essere $a_n \to 0$ non implica la convergenza della serie. Dipende da "come" a_n è infinitesima, ossia "quanto rapidamente la successione va a zero".

Siano allora a_n, b_n due successioni infinitesime. Il rapporto ${}^{a_n}/_{b_n}$, per $n \to \infty$, tende alla forma indeterminata ${}^0/_0$; allora:

$$\lim_n \left|\frac{a_n}{b_n}\right| = \begin{cases} 0 & a_n \text{ è infinitesimo di ordine superiore rispetto a } b_n \\ \ell \in]0, +\infty[& a_n \text{ e } b_n \text{ sono infinitesimi dello stesso ordine} \\ +\infty & a_n \text{ è infinitesimo di ordine inferiore rispetto a } b_n \\ \text{non esiste} & \text{gli infinitesimi non sono confrontabili.} \end{cases}$$

Il valore del limite "misura", in qualche modo, quanto rapidamente va a zero una successione a_n rispetto ad un'altra successione infinitesima b_n. Dire che, ad esempio, a_n è infinitesima di ordine superiore a b_n sta a dire, intuitivamente, che "a_n va a zero più velocemente di b_n", o che "b_n va a zero più lentamente di a_n"; nel dire che a_n e b_n sono infinitesime dello stesso ordine, invece, si intende che "tendono a zero allo stesso modo". Questa dicitura giustifica intuitivamente il criterio del confronto asintotico per le serie nei suoi vari casi: ad esempio, date a_n, b_n successioni positive, se b_n è il termine generale di una serie convergente, e a_n è infinitesimo di ordine superiore a b_n, allora anche a_n sarà il termine generale di una serie convergente, e così via gli altri casi.

Nella pratica, la scelta dell'infinitesimo campione cade su $b_n = {}^1/_{n^\alpha}$ per $\alpha > 0$. Per questa ragione, diremo che a_n è infinitesima di ordine $\alpha > 0$ se e solo se a_n e ${}^1/_{n^\alpha}$ sono infinitesimi dello stesso ordine, ossia $\lim\limits_{n\to\infty} n^\alpha a_n = \ell \in]0 + \infty[$.

2.1.2 La serie armonica generalizzata

Consideriamo ora la *serie armonica generalizzata* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, dove α è un numero reale positivo fissato. È una serie a termini positivi; abbiamo già esaminato il caso $\alpha = 1$ e $\alpha = 2$. Studiamo ora tutti gli altri casi.

Proposizione 2.5. *La serie armonica generalizzata*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} \tag{8}$$

è convergente per $\alpha > 1$, divergente per $\alpha \leq 1$.

Dimostrazione. Per $\alpha = 1$ e $\alpha = 2$ abbiamo già studiato il comportamento della serie. Pertanto, applicando il criterio del confronto, essendo

$$\frac{1}{n^\alpha} \leq \frac{1}{n^2} \text{ se } \alpha > 2,$$

e

$$\frac{1}{n^\alpha} \geq \frac{1}{n} \text{ se } \alpha < 1,$$

si ha che per $\alpha < 1$ la serie (8) diverge, mentre per $\alpha > 2$ la serie converge. Completiamo la dimostrazione nel caso $\alpha \in]1, 2[$. Poiché la serie è regolare, basterà verificare che la serie converge per una particolare estratta. Consideriamo a tal fine la somma parziale arrestata al termine $(2^n - 1)$-esimo, S_{2^n-1}. Si ha:

$$\begin{aligned} S_{2^n-1} = \quad & 1 + \underbrace{\frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha}}_{<2\frac{1}{2^\alpha}} + \underbrace{\frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{5^\alpha} + \frac{1}{6^\alpha} + \frac{1}{7^\alpha}}_{<4\frac{1}{4^\alpha}} + \ldots + \underbrace{\frac{1}{(2^{n-1})^\alpha} + \ldots + \frac{1}{(2^n-1)^\alpha}}_{<2^{n-1}\frac{1}{2^{(n-1)\alpha}}} \\ < \quad & 1 + \frac{1}{2^{\alpha-1}} + \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^{n-1}. \end{aligned}$$

Essendo $\alpha > 1$, si ha $\frac{1}{2^{\alpha-1}} < 1$. Pertanto S_{2^n-1} è maggiorata dalla serie geometrica di ragione $x = \frac{1}{2^{\alpha-1}} < 1$:

$$S_{2^n-1} < \frac{1}{1 - \frac{1}{2^{\alpha-1}}} = \frac{2^{\alpha-1}}{2^{\alpha-1} - 1}.$$

Quindi S_{2^n-1} converge. Abbiamo trovato un'estratta di S_n convergente. Essendo S_n regolare, questo implica che S_n converge e completa la dimostrazione. $\square$

Osservazione 2.4. Notiamo esplicitamente che nella dimostrazione precedente abbiamo ottenuto una stima per eccesso sulla somma di (8):

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} < \frac{2^{\alpha-1}}{2^{\alpha-1} - 1}.$$

Esercizio 2.1. Calcolare

$$\lim_{N \to +\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^N}.$$

2.1.3 Il criterio degli infinitesimi

Scegliendo $b_n = {}^1/_{n^\alpha}$ come successione campione nei criteri del confronto asintotico, allora ${}^{a_n}/_{b_n} = n^\alpha a_n$, e possiamo ottenere il seguente schema.

Proposizione 2.6 (Criterio degli infinitesimi)**.** *Sia $a_n \geq 0$ e tale che*

$$\lim_{n\to+\infty} n^\alpha a_n = \ell.$$

Allora valgono i seguenti fatti.

$\boxed{\textsf{Caso } 0 < \ell < +\infty}$ *Si ha:*

$$\text{se } \alpha > 1 \text{ allora } \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ converge;}$$

$$\text{se } \alpha \leq 1 \text{ allora } \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ diverge positivamente.}$$

$\boxed{\textsf{Caso } \ell = 0}$ *Si ha:*

$$\alpha > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ converge.}$$

$\boxed{\textsf{Caso } \ell = +\infty}$ *Si ha:*

$$\alpha \leq 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ diverge positivamente.}$$

Esempio 2.4. La serie a termini positivi

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3 - n + 1} \tag{9}$$

converge. Infatti, poiché

$$\lim \frac{n^3}{n^3 - n + 1} = 1,$$

dal criterio degli infinitesimi, essendo $\alpha = 3$ e $\ell = 1$, si ha la convergenza di (9). In altri termini, ciò deriva dal fatto che il termine generale della serie (9) è un infinitesimo dello stesso ordine di ${}^1/_{n^3}$, e quest'ultimo è il termine generale di una serie convergente.

Esempio 2.5. Si consideri la serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2 \log n}. \tag{10}$$

Vogliamo studiarla con il criterio degli infinitesimi. Poiché

$$\lim \frac{n^2}{n^2 \log n} = \lim \frac{1}{\log n} = 0,$$

allora per $\alpha = 2$ risulta $\ell = 0$, quindi la serie (11) converge. In altri termini, essendo il termine generale di (11) un infinitesimo di ordine superiore a $1/n^2$, che è il termine generale di una serie convergente, si ha che la serie (11) converge.

Esempio 2.6. Si consideri la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log n}{n^2}. \tag{11}$$

Vogliamo studiarla con il criterio degli infinitesimi. Il fatto che

$$\lim \frac{n^2 \log n}{n^2} = +\infty,$$

non ci permette di applicare il criterio. In parole povere, sapere che $\log n/n^2$ è un infinitesimo di ordine inferiore a $1/n^2$, ossia che va a zero più lentamente del termine generale di una serie convergente, non ci permette di concludere nulla sulla convergenza di $\sum \frac{\log n}{n^2}$. Tuttavia, poiché

$$n^{\frac{3}{2}} \frac{\log n}{n^2} = \frac{\log n}{\sqrt{n}} \to 0,$$

dal criterio degli infinitesimi (con $\alpha = \frac{3}{2}$ e $\ell = 0$) la serie risulta convergente.

Esempio 2.7. Il criterio degli infinitesimi non si rivela utile per lo studio della serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n \log^\alpha n}, \tag{12}$$

dove α è un parametro reale positivo. Infatti, si ha

$$\lim \frac{n}{n \log^\alpha n} = 0, \quad \lim \frac{n^\gamma}{n \log^\alpha n} = +\infty, \qquad \forall \gamma > 1,$$

e quindi non abbiamo alcuna informazione sul carattere della serie. Tuttavia, è possibile studiare la serie (12) col metodo del confronto, in maniera simile a come abbiamo ragionato per la serie armonica a segni alterni. Sia $\alpha > 1$. Allora calcolando la somma parziale S_{2^n-1} si ha:

$$
\begin{aligned}
S_{2^n-1} = &\underbrace{\frac{1}{2\log^\alpha 2} + \frac{1}{3\log^\alpha 3}}_{<2\frac{1}{2\log^\alpha 2}} + \underbrace{\frac{1}{4\log^\alpha 4} + \frac{1}{5\log^\alpha 5} + \frac{1}{6\log^\alpha 6} + \frac{1}{7\log^\alpha 7}}_{<4\frac{1}{4\log^\alpha 4}} + \ldots + \\
&+ \underbrace{\frac{1}{2^{n-1}\log^\alpha 2^{n-1}} + \ldots + \frac{1}{(2^n-1)\log^\alpha(2^n-1)}}_{<2^{n-1}\frac{1}{2^{n-1}\log^\alpha 2^{n-1}}} = \\
< &\frac{1}{\log^\alpha 2} + \frac{1}{2^\alpha \log^\alpha 2} + \ldots + \frac{1}{(n-1)^\alpha \log^\alpha 2} = \\
&= \frac{1}{\log^\alpha 2}\left(1 + \frac{1}{2^\alpha} + \ldots + \frac{1}{(n-1)^\alpha}\right) < \frac{1}{\log^\alpha 2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^\alpha} < +\infty,
\end{aligned}
$$

dove la serie a destra è la serie armonica generalizzata, che converge essendo $\alpha > 1$. Analogamente, se $\alpha = 1$

$$
\begin{aligned}
S_{2^n} = &\frac{1}{2\log 2} + \underbrace{\frac{1}{3\log 3} + \frac{1}{4\log 4}}_{>2\frac{1}{4\log 4}} + \underbrace{\frac{1}{5\log 5} + \frac{1}{6\log 6} + \frac{1}{7\log 7} + \frac{1}{8\log 8}}_{>4\frac{1}{8\log 8}} + \ldots + \\
&+ \underbrace{\frac{1}{(2^{n-1}+1)\log(2^{n-1}+1)} + \ldots + \frac{1}{2^n\log(2^n)}}_{>2^{n-1}\frac{1}{2^n\log(2^n)}} > \\
&> \frac{1}{2\log 2}\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right).
\end{aligned}
$$

Per $n \to \infty$, il termine a destra diverge (serie armonica), e quindi di conseguenza la serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n\log n}$$

risulta divergente. Da questa, per confronto anche $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n\log^\alpha n}$ diverge quando $\alpha < 1$.

2.1.4 Criterio del rapporto e della radice

Altri due criteri molto utili per stabilire il carattere di una serie a termini positivi sono i seguenti.

Proposizione 2.7 (Criterio della radice per le serie). *Sia* $a_n > 0$*. Allora se*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell,$$

si ha:

1. *se* $\ell < 1$*, la serie* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *converge;*

2. *se* $\ell > 1$*, la serie* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *diverge positivamente.*

Dimostrazione. Se $\ell > 1$, dal criterio della radice per le successioni a_n è divergente positivamente, e quindi la serie diverge positivamente in quanto non vale la condizione necessaria per la convergenza. Esaminiamo il caso $\ell < 1$. Sia $\varepsilon > 0$ tale che $\ell + \varepsilon < 1$. Detto ν l'indice della definizione di limite, si ha:

$$\sqrt[n]{a_n} < \ell + \varepsilon \quad \forall n > \nu.$$

Dunque definitivamente si ha

$$a_n < (\ell + \varepsilon)^n.$$

Essendo $0 < \ell+\varepsilon < 1$, allora a_n è maggiorata dal termine generale di una serie geometrica convergente. Dal criterio del confronto, si ha la tesi. □

Proposizione 2.8 (Criterio del rapporto per le serie). *Sia* $a_n > 0$*. Allora se*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} = \ell,$$

si ha:

1. *se* $\ell < 1$*, la serie* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *converge;*

2. *se* $\ell > 1$*, la serie* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *diverge positivamente.*

Dimostrazione. Poiché il rapporto $\dfrac{a_n}{a_{n-1}}$ è regolare, dal criterio rapporto-radice si ha

$$\lim \sqrt[n]{a_n} = \lim \frac{a_n}{a_{n-1}} = \ell.$$

La conclusione segue dal criterio della radice per le serie. □

Esempio 2.8. Studiamo la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{n^n}.$$

Poiché

$$\lim_n \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \frac{1}{e} < 1,$$

dal criterio del rapporto si ha che la serie converge.

Osservazione 2.5. Se $\ell = 1$ nel criterio della radice, non si può dire nulla sul carattere della serie. Basta considerare, ad esempio, le serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2},$$

che sono rispettivamente divergente e convergente, e per le quali $\ell = 1$.

Esempio 2.9. Si consideri la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n, \quad \text{con } a_n = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ è dispari,} \\ \dfrac{1}{2^n} & \text{se } n \text{ è pari.} \end{cases}$$

Essa è convergente, in quanto

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{4^k} < +\infty.$$

Tuttavia non è possibile considerare il rapporto ($a_n = 0$ per infiniti n), e non esiste il limite della radice n-esima, in quanto le estratte di posto pari e di posto dispari convergono a numeri diversi:

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[2k+1]{a_{2k+1}} = 0, \quad \lim_{k\to\infty} \sqrt[2k]{a_{2k}} = \frac{1}{2}.$$

3 Complementi sulla serie geometrica e sulla serie armonica

3.1 Alcune applicazioni della serie geometrica

Esempio 3.1. Verifichiamo, con l'ausilio della serie geometrica, che

$$0,\bar{9} = 1.$$

Infatti

$$
\begin{aligned}
0,\bar{9} &= 0,9 + 0,09 + 0,009 + \ldots = \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + \ldots = \\
&= \frac{9}{10}\left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \ldots\right) = \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{9}{10} \cdot \frac{10}{9} = 1.
\end{aligned}
$$

Questo tipo di ragionamento può essere effettuato per ogni numero periodico. Ad esempio, consideriamo il seguente allineamento decimale periodico $0,\overline{\beta_1 \ldots \beta_h}$, con $\beta_i \in \{0, 1, \ldots, 9\}$, che si può riscrivere come

$$
\frac{\beta_1}{10} + \frac{\beta_2}{10^2} + \ldots + \frac{\beta_h}{10^h} + \frac{\beta_1}{10^{h+1}} + \ldots + \frac{\beta_h}{10^{2h}} + \frac{\beta_1}{10^{2h+1}} + \ldots .
$$

Indicato con $\beta_1\beta_2 \ldots \beta_h$ il numero naturale $\beta_1 10^{h-1} + \beta_2 10^{h-2} + \ldots + \beta_h$ si ha ovviamente

$$
\frac{\beta_1\beta_2 \ldots \beta_h}{10^h} = \frac{\beta_1}{10} + \frac{\beta_2}{10^2} + \ldots + \frac{\beta_h}{10^h}
$$

e quindi

$$
\begin{aligned}
0,\overline{\beta_1 \ldots \beta_h} &= \frac{\beta_1\beta_2 \ldots \beta_h}{10^h}\left\{1 + \frac{1}{10^h} + \frac{1}{(10^h)^2} + \ldots\right\} \\
&= \frac{\beta_1\beta_2 \ldots \beta_h}{10^h} \frac{1}{1 - \frac{1}{10^h}} = \frac{\beta_1\beta_2 \ldots \beta_h}{10^{h-1}}.
\end{aligned}
$$

Si ottiene in tal modo la cosiddetta *frazione generatrice* di $0,\overline{\beta_1 \ldots \beta_h}$. Per esercizio, ricavare la funzione generatrice di $M, \alpha_1 \ldots \alpha_j \overline{\beta_1 \ldots \beta_h}$.

Esempio 3.2 (Paradosso di Zenone[3]). In un'immaginaria corsa tra Achille e una tartaruga, Achille le concede, essendo più veloce, una certa distanza di vantaggio. Nel lasso di tempo che impiega Achille a raggiungere la posizione inizialmente occupata dalla tartaruga, questa si sarà spostata, mantenendo un certo vantaggio su Achille. A questo punto Achille raggiungerà la nuova posizione della tartaruga, che però intanto avrà continuato a muoversi, e quindi continuerà ad essere in vantaggio. La conclusione paradossale sta nel fatto che in questo modo Achille non raggiungerà mai la tartaruga.

Vediamo dove sta l'errore in questo ragionamento. Sia

$$
\begin{aligned}
A(t) &:= \text{ posizione occupata da Achille all'istante } t; \\
T(t) &:= \text{ posizione occupata dalla tartaruga all'istante } t.
\end{aligned}
$$

Chiamiamo d il vantaggio che Achille concede alla tartaruga, e per semplicità supponiamo che Sia Achille che la tartaruga si muovano di moto rettilineo uniforme. Detto $t_0 = 0$ l'istante iniziale in cui comincia la gara, allora

$$
A(t) = v_A t, \quad T(t) = d + v_T t.
$$

[3]Zenone di Elea, ~ 400 a.C.

v_A rappresenta quindi la velocità di Achile, mentre v_T quella della tartaruga. Ovviamente, risulta $v_T < v_A$. Se all'istante $t = 0$ Achille occupa la posizione $A(0) = 0$, la tartaruga è nella posizione $T(0) = d$. Ragioniamo come Zenone, dunque. Chiamiamo t_1 l'istante in cui Achille raggiunge posizione occupata dalla tartaruga all'inizio della gara. Quindi deve essere

$$A(t_1) = T(0),$$

ossia $v_A t_1 = d$. Dunque

$$t_1 = \frac{d}{v_A}.$$

Chiamiamo ora t_2 l'istante in cui Achille raggiunge la posizione della tartaruga all'istante t_1:

$$A(t_2) = T(t_1).$$

Sostituendo, si ha $v_A t_2 = d + t_1 v_T = d + \frac{d v_T}{v_A}$, ossia

$$t_2 = \frac{d}{v_A}\left(1 + \frac{v_T}{v_A}\right).$$

Chiamando t_3 l'istante per cui $A(t_3) = T(t_2)$, si ha

$$t_3 = \frac{d}{v_A}\left(1 + \frac{v_T}{v_A} + \left(\frac{v_T}{v_A}\right)^2\right).$$

Ragionando iterativamente imponendo $A(t_n) = T(t_{n-1})$, si ha

$$t_n = \frac{d}{v_A}\left(1 + \frac{v_T}{v_A} + \left(\frac{v_T}{v_A}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{v_T}{v_A}\right)^{n-1}\right).$$

Dunque t_n è espresso in termini della somma parziale relativa alla serie geometrica di ragione $\frac{v_T}{v_A} < 1$. Per $n \to +\infty$ la serie converge e

$$t^\star = \lim_n t_n = \frac{d}{v_A - v_T}.$$

Che è l'istante in cui si incontrano Achille e la tartaruga.

L'errore del paradosso sta dunque nell'assumere implicitamente che un numero infinito di intervalli di tempo implica un tempo infinito.

Esempio 3.3 (Tappeto di Sierpiński[4]). Un quadrato di lato unitario è suddiviso in nove quadrati uguali e il quadrato centrale viene colorato. I rimanenti otto quadrati vengono similmente divisi e viene colorato il quadrato centrale di ciascuno di essi. Il procedimento

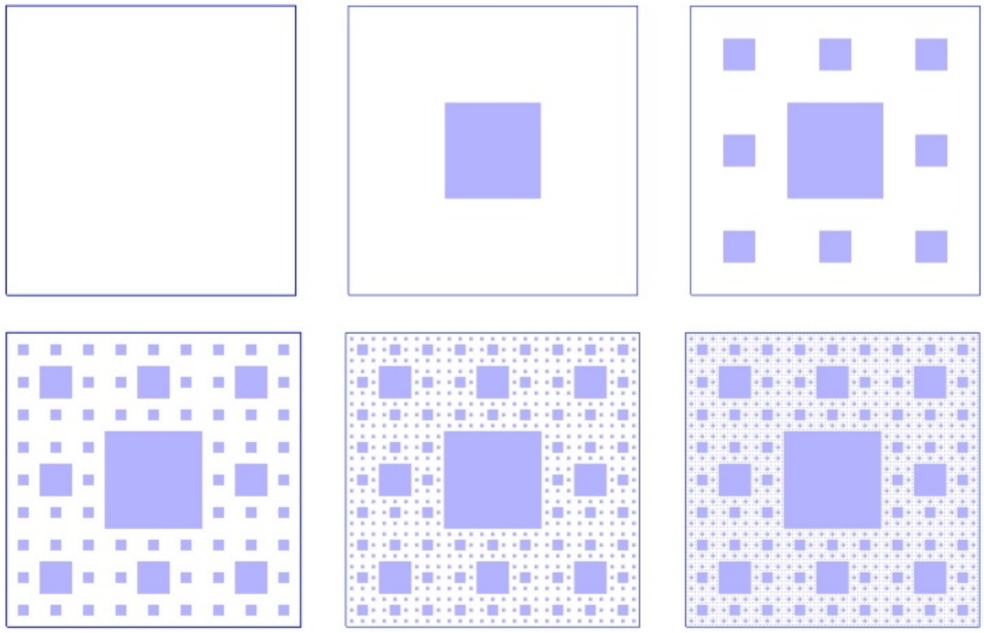


Figura 1: Tappeto di Sierpiński

viene iterato infinite volte. Si vuole calcolare l'area complessiva della superficie colorata.

Indicando con A_n l'area colorata al passo $n-$esimo, si avrà

$$A_1 = \frac{1}{3^2}; \qquad A_2 = \frac{1}{9} + 8 \cdot \frac{1}{9^2}, \qquad \frac{1}{9} + \frac{8}{81} + 64 \cdot \frac{1}{27^2},$$

in generale

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{8^{k-1}}{9^k}.$$

Pertanto l'area complessiva A della superficie colorata è espressa da

$$A = \lim_{n \to \infty} A_n = \frac{1}{9} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{8}{9} \right)^k = \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{1 - \frac{8}{9}} = 1.$$

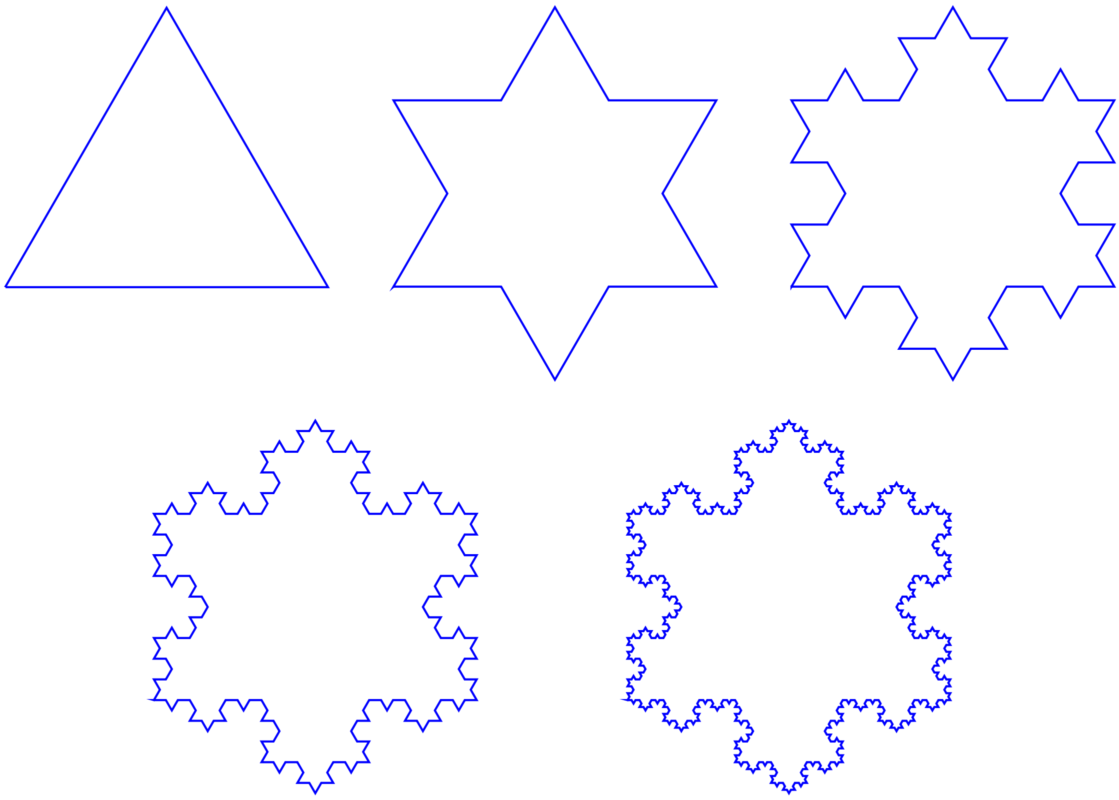
Notiamo che, benché l'area complessiva dell'area colorata sia uguale all'area del quadrato iniziale, non tutti i punti vengono colorati, anzi si prova che l'insieme dei punti che non vengono colorati è più che numerabile. Tale insieme prende il nome di *insieme di Cantor*.

Esercizio 3.1 (Curva di Koch[5])**.** Partendo da un triangolo equilatero di lato unitario, dividere in tre parti uguali ciascun lato e sulla lato di mezzo costruire un nuovo triangolo equilatero. Ripetere la costruzione per ciascuno dei lati della nuova figura ottenuta.

[4] Wacław Sierpiński, Varsavia 1882-1969

[5] Helge von Koch, Stoccolma 1870-1924

1. Verificare che la "lunghezza" di tale curva è infinita;
2. Calcolare l'area della regione di piano da essa delimitata.



Soluzione. Ad ogni passo la lunghezza ℓ_n della curva viene moltiplicata per quattro terzi:

$$\ell_0 = 3; \quad \ell_1 = 3(\text{lati}) \cdot 4(\text{n.segmenti per lato}) \cdot \frac{1}{3}(\text{lunghezza segmento});$$

$$\ell_2 = 3 \cdot 4^2 \cdot \frac{1}{3^2}; \quad \ell_n = 3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^n .$$

Quindi $\lim_{n\to\infty} \ell_n = +\infty$.

Invece per le aree ad ogni passo si aggiungono tanti triangoli equilateri quanti sono i lati della spezzata, e ciascuno ha area $\frac{1}{9}$ del precedente:

$$A_0 = \frac{\sqrt{3}}{4} := \alpha, \quad A_1 = \alpha\left(1 + 3\frac{1}{9}\right), \quad A_2 = \alpha\left(1 + \frac{1}{3} + 3\frac{4}{9^2}\right) = \alpha + \frac{\alpha}{3}\left(1 + \frac{4}{9}\right);$$

in generale

$$A_n = \alpha + \frac{\alpha}{3}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{4}{9}\right)^n .$$

Pertanto

$$A = \lim_n A_n = \alpha + \frac{\alpha}{3} \frac{1}{1 - \frac{4}{9}} = \frac{2\sqrt{3}}{5}.$$

3.2 Complementi sulla serie armonica

Abbiamo visto che la serie armonica è una serie divergente. Possiamo dimostrare che la serie armonica diverge come il logaritmo naturale di n. Infatti, proviamo il seguente risultato.

Proposizione 3.1. *La successione* $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log n$ *converge ad un numero finito diverso da* 0. *Il valore di tale limite,*

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log n \right) = \gamma,$$

prende il nome di costante di Eulero-Mascheroni ($\gamma \simeq 0.577$). *Si può scrivere quindi*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \log n + \gamma + r_n, \quad n \to +\infty,$$

dove $r_n \to 0$ *per* $n \to \infty$.

Osservazione 3.1. Dalla Proposizione 3.1 si deduce che

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}{\log n} = 1.$$

Infatti:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}{\log n} = \lim_{n \to \infty} \frac{\log n + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log n}{\log n} = 1 + \lim_{n \to \infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log n}{\log n} = 1.$$

Dimostrazione della Proposizione 3.1. Riscriviamo $\log n$ nella forma

$$\log n = \sum_{k=1}^{n-1} (\log(k+1) - \log k) = \sum_{k=1}^{n-1} \log\left(1 + \frac{1}{k}\right).$$

Consideriamo la serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} - \log\left(1 + \frac{1}{k}\right) \right), \tag{13}$$

e supponiamo di aver provato che la serie (13) converge. Denotiamo con γ la sua somma e con γ_n la somma parziale:

$$\gamma_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \log\left(1 + \frac{1}{k}\right)\right), \qquad \gamma = \lim_{n\to\infty} \gamma_n.$$

Allora

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n-1} \log\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \gamma_n + \log\left(1 + \frac{1}{n}\right),$$

che, per $n \to +\infty$, prova la tesi.

Per concludere la dimostrazione bisogna provare che (13) converge. Poiché è noto dallo studio del numero di Nepero che

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n} < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1},$$

si ha

$$\frac{1}{n+1} < \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n},$$

ossia

$$0 < \frac{1}{n} - \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Pertanto la serie (13) è una serie a termini positivi maggiorata dalla serie di Mengoli:

$$0 < \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} - \log\left(1 + \frac{1}{k}\right)\right) < 1.$$

□

La serie armonica diverge molto lentamente. Questo suggerisce l'idea di provare a sommare, al posto di tutti i reciproci degli interi, solo una parte $\mathcal{P}$ di essi.

Esempio 3.4. Prendendo come $\mathcal{P}$ l'insieme dei numeri pari, la serie diverge. Infatti

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}, \quad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} = +\infty.$$

Esempio 3.5. Prendendo come $\mathcal{P}$ l'insieme dei quadrati perfetti, la serie converge, come abbiamo già visto.

Esempio 3.6. Prendendo come $\mathcal{P}$ l'insieme di tutti i numeri naturali $n \geq 1$ tali che n si scrive in base 10 senza usare la cifra 5, la serie converge.

Fissiamo un numero k di cifre. Quanti sono i numeri di k cifre che si scrivono senza usare 5?

$$8 \cdot 9 \cdot 9 \cdot \ldots \cdot 9 = 8 \cdot 9^{k-1},$$

considerando che la cifra più a sinistra non può essere né 0 né 5 (8 scelte), mentre ognuna delle altre $k-1$ non può essere 5 (9 scelte). Inoltre, ogni numero n di k cifre è più grande di 10^{k-1}. Cosa si può dire sulla somma dei reciproci?

$$\sum_{\substack{n \in \mathcal{P} \\ n \text{ ha } k \text{ cifre}}} \frac{1}{n} \leq 8 \cdot 9^{k-1} \cdot \frac{1}{10^{k-1}}.$$

Quindi

$$\sum_{n \in \mathcal{P}} \frac{1}{n} \leq 8 \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{9}{10} \right)^{k-1} < +\infty.$$

Osserviamo che possiamo raggruppare i termini a seconda del numero di cifre perché sono tutti positivi.

Più in generale,

$$\sum_{n \in \mathcal{P}} \frac{1}{n^\alpha} \leq 8 \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{9}{10^\alpha} \right)^{k-1},$$

che converge se $10^\alpha > 9$, ossia $\alpha > \log_{10} 9$. Se $\alpha < \log_{10} 9$, essendo ogni numero di k cifre minore di 10^k, ragionando come prima si ha

$$\sum_{\substack{n \in \mathcal{P} \\ n \text{ ha } k \text{ cifre}}} \frac{1}{n^\alpha} \geq 8 \cdot 9^{k-1} \cdot \frac{1}{10^{\alpha k}}.$$

Pertanto

$$\sum_{n \in \mathcal{P}} \frac{1}{n^\alpha} \geq 8 \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{9}{10^\alpha} \right)^{k} = +\infty.$$

Questo prova anche il caso $\alpha = \log_{10} 9$.

Infine, vale il seguente risultato.

Proposizione 3.2. *Sia $\mathcal{P}$ l'insieme dei numeri primi. Vale che*

$$\sum_{p \in \mathcal{P}} \frac{1}{p} = +\infty.$$

Dimostrazione. Ricordiamo che per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e,$$

dunque

$$\log\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$$

e quindi

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} > \sum_{k=1}^{n} \log\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n} (\log(k+1) - \log k) = \log(n+1).$$

Preso un numero naturale $x > 1$, si consideri ora la funzione

$$P(x) = \prod_{\substack{p \text{ primo} \\ p \leq x}} \frac{1}{1 - \frac{1}{p}}.$$

Ricordando che $\left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1}$ è la somma della serie geometrica di ragione $\frac{1}{p}$, ossia

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{p}} = 1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \ldots + \frac{1}{p^k} + \ldots$$

si verifica che

$$P(x) = \sum_{n \in A(x)} \frac{1}{n}$$

dove $A(x)$ è l'insieme di tutti gli interi n che si fattorizzano con primi minori di x, ossia che sono prodotto di potenze di primi minori di x. Ne segue che ogni intero n per cui $n \leq x$ appartiene ad $A(x)$, per cui

$$\sum_{n \leq x} \frac{1}{n} < P(x).$$

In conclusione, osservando che $2t > -\log(1-t)$ per $t < \frac{1}{2}$, si ha

$$2 \sum_{\substack{p \leq x \\ p \text{ primo}}} \frac{1}{p} > -\sum_{\substack{p \leq x \\ p \text{ primo}}} \log\left(1 - \frac{1}{p}\right) = \log P(x) > \log\left(\sum_{n \leq x} \frac{1}{n}\right) = \log(\log(1+x)).$$

Da cui per confronto segue che

$$\sum_{p \text{ primo}} \frac{1}{p} = +\infty.$$

□

4 Serie di segno variabile

4.1 Serie a segni alterni e criterio di Leibniz

Una classe notevole di serie è rappresentata dalle serie a segno alterno:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 \dots$$

dove a_n è una successione nonnegativa. Un tipico esempio è rappresentato dalla serie armonica a segni alterni:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n} + \dots \tag{14}$$

Verifichiamo che la serie (14) converge. Consideriamo le somme parziali con indice pari S_{2n}. Si ha:

$$\begin{aligned} S_{2n+2} &= 1 - \frac{1}{2} + \dots - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} = \\ &= S_{2n} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} > S_{2n} \end{aligned}$$

in quanto $\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} > 0$; quindi la successione S_{2n} è crescente. Analogamente si prova che la successione S_{2n+1} delle somme parziali di indice dispari è decrescente:

$$\begin{aligned} S_{2n+1} &= 1 - \frac{1}{2} + \dots - \frac{1}{2n-2} + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} = \\ &= S_{2n-1} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} < S_{2n-1}\ , \end{aligned}$$

in quanto $-\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} < 0$.

Essendo

$$S_1 > S_{2n+1} = S_{2n} + \frac{1}{2n+1} > S_{2n} > S_2 \qquad (n > 1)$$

le successioni S_{2n}, S_{2n+1} sono limitate e quindi convergenti. Poiché

$$\lim_{n\to\infty}(S_{2n+1} - S_{2n}) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1} = 0$$

si ha

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} S_{2n} = S \in \mathbb{R}$$

e quindi anche

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S.$$

Con gli stessi argomenti utilizzati per dimostrare la convergenza di (14) abbiamo:

Teorema 4.1 (Criterio di Leibniz)**.** *Se la successione $\{a_n\}$ è nonnegativa, decrescente e infinitesima la serie a segni alterni* $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ *converge.*

Osservazione 4.1. Se una serie verifica le ipotesi del criterio di Leibniz, detta $S = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}a_n$ allora l'errore che si commette nell'approssimare la somma S con la somma parziale S_n è

$$|R_n| = |S - S_n| \leq a_{n+1}. \tag{15}$$

Infatti essendo

$$S_{2n} = a_1 - a_2 + \ldots + a_{2n-1} - a_{2n}, \quad S_{2n+1} = a_1 - a_2 + \ldots + a_{2n-1} - a_{2n} + a_{2n+1},$$

si ha

$$0 \leq S - S_{2n} = a_{2n+1} - (a_{2n+2} - a_{2n+3}) - (a_{2n+4} - a_{2n+5}) + \ldots \leq a_{2n+1};$$

$$0 \leq S_{2n-1} - S = a_{2n} - (a_{2n+1} - a_{2n+2}) - (a_{2n+3} - a_{2n+4}) + \ldots \leq a_{2n};$$

pertanto per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale la (15).

Osservazione 4.2. Utilizzando il metodo per il calcolo della costante di Eulero-Mascheroni è possibile determinare la somma della serie armonica a segni alterni. Infatti:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \log 2.$$

Abbiamo già provato che la serie converge. Inoltre

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots - \frac{1}{2n} \\
&= 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{2n-1} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \ldots + \frac{1}{2n}\right) \\
&= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \ldots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n} - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \ldots + \frac{1}{2n}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.
\end{aligned}$$

In piú

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \gamma_{2n} + \log(2n) - \gamma_n - \log(n) = \log 2 + \gamma_{2n} - \gamma_n$$

Passando al limite si ha la tesi.

4.2 Assoluta convergenza

Definizione 4.1. Una serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ si dice *assolutamente convergente* se è convergente la serie dei valori assoluti

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|.$$

Osservazione 4.3. La serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n}{n^2}$ è assolutamente convergente, in quanto

$$\left|\frac{\sin n}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}, \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \text{ converge }.$$

La serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$, pur essendo convergente, non è assolutamente convergente, poiché

$$\left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \frac{1}{n}, \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty.$$

Teorema 4.2. *Una serie* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *assolutamente convergente è convergente; inoltre si ha*

$$\left|\sum_{n=1}^{+\infty} a_n\right| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|. \tag{16}$$

Dimostrazione. Applichiamo il criterio di Cauchy alla serie $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$. Fissato $\varepsilon > 0$, esiste un indice ν tale che

$$|a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \ldots + |a_{n+k}| < \varepsilon \qquad \forall n > \nu,\ \forall k \in \mathbb{N}.$$

D'altra parte per la disuguaglianza triangolare si ha

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+k}| \leq |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \ldots + |a_{n+k}| < \varepsilon \qquad \forall n > \nu,\ \forall k \in \mathbb{N}.$$

Quindi la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ verifica la condizione di Cauchy e dunque converge.

Infine, poiché per la diseguaglianza triangolare

$$|a_1 + a_2 + \ldots + a_n| \le |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n| \le \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|,$$

mandando $n \to +\infty$ si ha la (16). $\square$

Se adesso poniamo $a_n^+ = \max\{a_n, 0\}$, $a_n^- = \max\{-a_n, 0\}$ risulta

$$0 \le a_n^+ \le |a_n|, \qquad 0 \le a_n^- \le |a_n|$$

e, inoltre

$$|a_n| = a_n^+ + a_n^- \qquad a_n = a_n^+ - a_n^-.$$

Deduciamo quindi quanto segue.

Proposizione 4.1. *La serie* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *converge se e solo se convergono le serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$*; risulta inoltre*

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} a_n^- = S^+ - S^-. \tag{17}$$

Osservazione 4.4. Se una serie converge ma non assolutamente, vale che

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^+ = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n^- = +\infty.$$

Osservazione 4.5. Sia $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ una serie convergente; permutandone in modo del tutto arbitrario i termini si ottiene una serie che indichiamo con $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$. Ci chiediamo se $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ converge, e se converge alla stessa somma $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$. In altri termini: continua a valere la proprietà commutativa per le serie?

Per cominciare a capire cosa accade, consideriamo la serie armonica a segni alterni

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} + \ldots = \log 2.$$

Dividendo per due, si ha

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+\frac{1}{14}-\frac{1}{16}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{2n}+\ldots=\frac{1}{2}\log 2.$$

Sommando termine a termine, risulta

$$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{6}+\ldots=\frac{3}{2}\log 2.$$

La serie a primo membro è un riordinamento della serie di partenza, la cui somma non coincide con la somma della serie di partenza.

L'esempio precedente suggerisce che per la serie armonica a segni alterni non vale la proprietà commutativa. Tuttavia, questo comportamento è una caratteristica delle serie semplicemente ma non assolutamente convergenti. Valgono infatti i seguenti risultati, che riportiamo senza dimostrazione.

Teorema 4.3. *La somma di una serie assolutamente convergente non si altera permutandone i termini. Viceversa, se la somma di una serie convergente non si altera permutandone in modo arbitrario i termini la serie è assolutamente convergente.*

Teorema 4.4 (Riemann-Dini)**.** *Sia data una serie* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *convergente ma non assolutamente convergente. Allora:*

1. *esiste un riordinamento di* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *che diverge positivamente, e uno di* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *che diverge negativamente;*
2. *qualunque sia* $\alpha \in \mathbb{R}$*, esiste un riordinamento di* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *la cui somma è* α*;*
3. *esiste un riordinamento di* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *per cui la serie è oscillante.*

5 Esercizi

5.1 Testi

Esercizio 5.1. Determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(e^{\frac{1}{n^2}}-1\right).$$

Esercizio 5.2. Determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\log(n!)}.$$

Esercizio 5.3. Determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n\log(n!)}.$$

Esercizio 5.4. Determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(2n)^n}.$$

Esercizio 5.5. Determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left(\sqrt[n]{n} - 1\right),$$

e verificarne la convergenza assoluta.

Esercizio 5.6. Sia $a_n > 0$ e a_n decrescente. Allora

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n < +\infty \Rightarrow \lim n a_n = 0.$$

Verificare con un esempio che l'implicazione precedente non è più vera se a_n non è decrescente.

Esercizio 5.7. Provare che se la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$$

converge allora $a_n = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Esercizio 5.8. Sia $a_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$. Provare che

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ converge} \iff \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{1 + a_n} \text{ converge.}$$

Esercizio 5.9. Verificare per quali $\alpha > 0$ la serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \log^n \alpha,$$

converge, e per tali valori calcolare la somma.

Esercizio 5.10. Stabilire il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\left(e-\left(1+\frac{1}{n^\alpha}\right)^n\right).$$

Esercizio 5.11. Studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\log\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right).$$

Più in generale, determinare per quali valori di α la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\log\left(1+\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$$

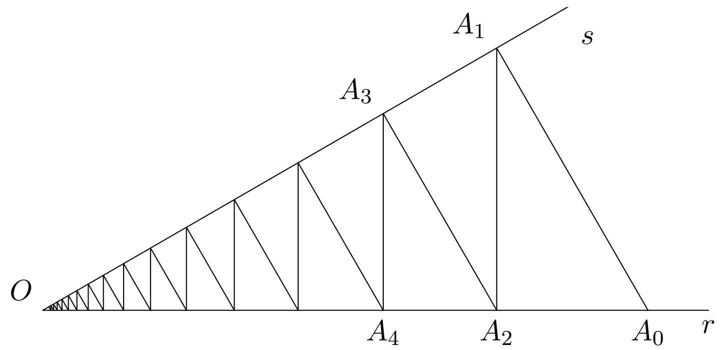
converge.

Esercizio 5.12. Stabilire il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(\arctan(\sin n))^n.$$

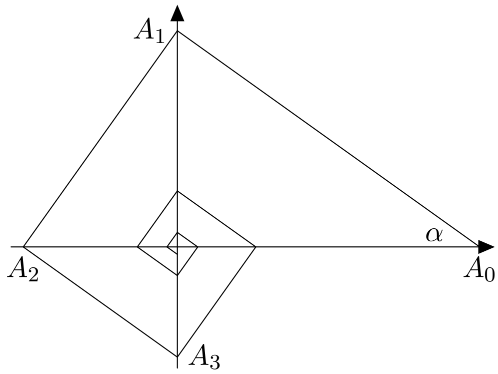
Esercizio 5.13. Siano r, s due semirette uscenti dal vertice O di e che formano un angolo di $\frac{\pi}{3}$. Detto A_0 il punto di r che dista 1 da O, sia A_1 il piede della perpendicolare condotta da A_0 ad s, sia poi A_2 il piede della perpendicolare da A_1 ad r. Si prosegua indefinitamente nel modo anzidetto. Si dia una definizione della lunghezza della spezzata infinita $A_0A_1A_2A_3\ldots A_n\ldots$ e si calcoli tale lunghezza.

Cosa succede se si cambia l'angolo da $\frac{\pi}{3}$ ad un qualunque $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$?



Esercizio 5.14. In un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy è dato il punto $A_0 = (1, 0)$.

Si costruisca il triangolo rettangolo OA_0A_1 avente il vertice A1 sull'asse delle ordinate e sia α l'angolo OA_0A_1. Si conduca per A_1 la perpendicolare alla retta A_0A_1 che incontra l'asse delle ascisse in A_2; si conduca per A_2 la perpendicolare alla retta A_1A_2 che incontra l'asse delle ordinate in A_3 e così via, ottenendo una spezzata $A_0A_1A_2 \dots A_n$, i cui vertici di indice dispari appartengono all'asse delle ordinate e quelli di indice pari all'asse delle ascisse.



1. Dimostrare che le lunghezze dei lati della spezzata sono in progressione geometrica e so calcoli la lunghezza ℓ_n della spezzata;
2. determinare il limite ℓ di ℓ_n al tendere di n;
3. studiare come varia $\ell = \ell(\alpha)$ al variare di α.

Esercizio 5.15. Determinare il carattere delle seguenti serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1+\frac{1}{n^3}\right); \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\binom{3n}{n}}; \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{\sqrt{n}}}{2^n};$$
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}; \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \arctan\frac{1}{n^2}; \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \left(2-\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}\right).$$

Esercizio 5.16. Determinare per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^\alpha}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}-1}$$

è convergente.

Esercizio 5.17. Determinare il carattere delle seguenti serie numeriche:

$$a) \sum_{n=1}^{+\infty} \left(n \tan\frac{1}{3n}\right)^n; \qquad b) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\log^2(n!)}.$$

Esercizio 5.18. Determinare al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, il carattere della seguente serie numerica

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^\alpha \frac{\log(e^{\sqrt{n}}-n)}{\log(4^{n^2}+\sqrt{n})}.$$

Esercizio 5.19. Sia a_n una successione di numeri positivi. Provare che

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n < +\infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \left(e^{(-1)^n a_n}-1\right) \text{ converge.}$$

5.2 Soluzioni

Soluzione Es. 5.1. La serie è a termini positivi. Poiché

$$\lim_{n\to\infty} n^2 \left(e^{\frac{1}{n^2}} - 1\right) = 1,$$

la serie converge per il criterio degli infinitesimi. □

Soluzione Es. 5.2. Poiché $n! \leq n^n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, si ha

$$\log(n!) \leq \log(n^n) = n \log n,$$

e dunque la serie assegnata diverge, in quanto

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\log(n!)} \geq \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n \log n} = +\infty.$$

(la serie a destra della diseguaglianza precedente è stata studiata nell'Esempio 2.7).

Più precisamente, è possibile verificare che l'andamento asintotico del termine generale è esattamente quello di $\frac{1}{n \log n}$. Infatti, poiché

$$\log(n!) = n \log \sqrt[n]{n!} = n \left(\log \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} + \log n \right),$$

e ricordando che $\frac{\sqrt[n]{n!}}{n} \to \frac{1}{e}$, si ha

$$\frac{n \log n}{\log(n!)} \to 1 \quad \text{per } n \to \infty.$$

□

Soluzione Es. 5.3. Abbiamo:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{n \log(n!)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\log \sqrt[n]{n!}} = 0.$$

La serie assegnata converge in quanto il termine generale è un infinitesimo di ordine superiore a $\frac{1}{n^2}$, e $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ converge. □

Soluzione Es. 5.4. La serie è a termini positivi. Applichiamo il criterio del rapporto. Poiché

$$\frac{(2n+2)!}{2^{n+1}(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{2^n n^n}{(2n)!} = \frac{1}{2} \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)(1+\frac{1}{n})^n} \to +\infty,$$

la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(2n)^n}$ diverge positivamente. □

Soluzione Es. 5.5. Dividiamo lo svolgimento in due punti.

- La serie $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\left(\sqrt[n]{n}-1\right)$ converge per il criterio di Leibniz. Infatti poiché $\sqrt[n]{n}>1$ e $\sqrt[n]{n}\to 1$, allora $\sqrt[n]{n}-1$ è positiva e infinitesima. Inoltre è anche decrescente. Infatti:

$$\sqrt[n+1]{n+1}-1\leq \sqrt[n]{n}-1 \iff (n+1)^n\leq n^{n+1} \iff \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\leq n,$$

  e l'ultima diseguaglianza è vera per ogni $n\geq 3$, in quanto dal limite che definisce il numero di Nepero sappiamo che $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<e<3$. Questo prova la monotonia (per $n\geq 3$) della successione, e dunque la convergenza della serie.

- La serie non converge assolutamente. Infatti

$$\left|(-1)^n(\sqrt[n]{n}-1)\right| = \sqrt[n]{n}-1=e^{\log\sqrt[n]{n}}-1=e^{\frac{1}{n}\log n}-1.$$

  Inoltre

$$\frac{e^{\frac{\log n}{n}}-1}{\frac{\log n}{n}}\to 1,$$

  e poiché $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\log n}{n}$ diverge positivamente, per confronto la serie $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sqrt[n]{n}-1\right)$ diverge positivamente.

$\square$

Soluzione Es. 5.7. Consideriamo la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}=a_1+\frac{a_1+a_2}{2}+\frac{a_1+a_2+a_3}{3}+\ldots+\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}+\ldots$$

con $a_n\geq 0$. Vogliamo dimostrare che $a_n=0\ \forall n\in\mathbb{N}$. Supponiamo per assurdo $a_N>0$, per qualche $N\in\mathbb{N}$. Abbiamo:

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_N+\ldots+a_n}{n}\geq\frac{a_N}{n}\quad\text{se } n\geq N.$$

Essendo $\sum_{n=N}^{+\infty}\frac{a_N}{n}=a_N\sum_{n=N}^{+\infty}\frac{1}{n}=+\infty$, per confronto dovrei avere $\sum_{n=N}^{+\infty}\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}=+\infty$, contro l'ipotesi che la serie è convergente. Pertanto a_N deve essere necessariamente nullo, e dunque $a_n=0$ qualunque sia $n\in\mathbb{N}$. $\square$

Soluzione Es. 5.8. . Supponiamo che la serie $\sum a_n$ converga. Allora $0 < \frac{a_n}{1+a_n} < a_n$ e per il criterio del confronto $\sum \frac{a_n}{1+a_n}$ converge. Viceversa, se $\sum \frac{a_n}{1+a_n}$ converge, allora $\frac{a_n}{1+a_n}$ è infinitesima, e dunque necessariamente anche a_n. Pertanto per il criterio del confronto asintotico, essendo

$$\lim \frac{a_n}{\frac{a_n}{1+a_n}} = \lim(1 + a_n) = 1$$

si ha che $\sum \frac{a_n}{1+a_n}$ converge. □

Soluzione Es. 5.9. La serie è una serie geometrica di ragione $\log \alpha$, che converge se e solo se $-1 < \log \alpha < 1$, ossia se e solo se $\frac{1}{e} < \alpha < e$. In tal caso si ha

$$\sum_{n=2}^{+\infty} (\log \alpha)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (\log \alpha)^n - 1 - \log \alpha = \frac{1}{1 - \log \alpha} - 1 - \log \alpha = \frac{\log^2 \alpha}{1 - \log \alpha}.$$

□

Soluzione Es. 5.10. Poiché $(1 + \frac{1}{n})^n$ è crescente e tende ad e, allora $e - (1 + \frac{1}{n})^n$ è infinitesima, nonnegativa e decrescente. La serie quindi converge per il criterio di Leibniz. □

Soluzione Es. 5.13. La lunghezza di A_0A_1 è

$$A_0A_1 = OA_0 \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}.$$

Il triangolo di vertici A_0, A_1, A_2 è simile al triangolo di vertici OA_0A_1. La lunghezza di A_1A_2 è

$$A_1A_2 = A_0A_1 \cos \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

quindi

$$A_2A_3 = A_1A_2 \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{4}\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

Ragionando iterativamente, si ha

$$A_3A_4 = A_2A_3 \cos \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3, \quad \ldots \quad A_nA_{n+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n.$$

Pertanto

$$\ell = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{2 - \sqrt{3}}.$$

In generale,

$$A_0A_1 = \sin\alpha,\ A_1A_2 = A_0A_1\cos\alpha = \sin\alpha\cos\alpha,$$

$$A_2A_3 = A_1A_2\cos\alpha = \sin\alpha\cos^2\alpha, \quad \dots \quad A_nA_{n+1} = \sin\alpha\cos^n\alpha;$$

Pertanto, essendo $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$ si ha

$$\ell_\alpha = \sin\alpha\sum_{n=0}^{+\infty}\cos^n\alpha = \frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}.$$

Si osservi che

$$\lim_{\alpha\to 0^+}\ell_\alpha = +\infty, \qquad \lim_{\alpha\to\frac{\pi}{2}^-}\ell_\alpha = 1.$$

□

Soluzione Es. 5.14. Sia $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$ l'angolo iniziale. Allora

$$A_0A_1 = \frac{OA_0}{\cos\alpha} = \frac{1}{\cos\alpha}, \quad OA_1 = A_0A_1\sin\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}\sin\alpha = \tan\alpha;$$

$$A_1A_2 = \frac{OA_1}{\cos\alpha} = \frac{\tan\alpha}{\cos\alpha}, \quad OA_2 = A_1A_2\sin\alpha = \tan^2\alpha;$$

in generale si ha

$$A_2A_3 = \frac{OA_2}{\cos\alpha} = \frac{\tan^2\alpha}{\cos\alpha}, \quad \dots \quad A_nA_{n+1} = \frac{\tan^n\alpha}{\cos\alpha}.$$

Pertanto $\ell_n = \frac{1}{\cos\alpha}\sum_{k=0}^{n}\tan^k\alpha$, e per $\alpha \in]0, \frac{\pi}{4}[$ si ha

$$\ell = \ell(\alpha) = \lim_{n\to\infty}\ell_n = \frac{1}{\cos\alpha}\cdot\frac{1}{1-\tan\alpha}.$$

Notiamo che

$$\lim_{\alpha\to\frac{\pi}{4}^-}\ell(\alpha) = +\infty, \qquad \lim_{\alpha\to 0^+}\ell(\alpha) = 1.$$

□

Esercizio 5.15. Prima serie. La serie è a termini positivi. Essendo

$$\lim_{n\to+\infty} n^3\log\left(1+\frac{1}{n^3}\right) = 1,$$

per il criterio degli infinitesimi ($\alpha = 3$) la serie converge.

Seconda serie. La serie è a termini positivi. Applichiamo il criterio del rapporto. Poiché

$$\lim_n \frac{\binom{3n}{n}}{\binom{3(n+1)}{n+1}} = \lim_n \frac{(3n)!}{n!\,(2n)!}\frac{(n+1)!\,[2(n+1)]!}{(3(n+1))!} = \lim_n \frac{(2n+2)(2n+1)(n+1)}{(3n+3)(3n+2)(3n+1)} = \frac{4}{27} < 1,$$

la serie assegnata converge.

Terza serie. La serie è a termini positivi. Applichiamo il criterio della radice per le serie. Poiché

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{n^{\sqrt{n}}}{2^n}} = \frac{1}{2}\lim_{n\to+\infty} n^{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \frac{1}{2}\lim_{n\to+\infty} e^{\frac{\log n}{\sqrt{n}}} = \frac{1}{2}e^0 = \frac{1}{2} < 1,$$

la serie assegnata converge.

Quarta serie, primo metodo. Ricordando che essendo

$$\lim_n \left[\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \log n\right] = \gamma,$$

dove $\gamma \simeq 0.57$ è la costante di Eulero-Mascheroni, abbiamo

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\log n}{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}\right) = 1.$$

Il criterio del confronto asintotico garantisce che la serie assegnata diverge positivamente, in quanto ha lo stesso carattere della serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{\log n} = +\infty.$$

Quarta serie, secondo metodo. Per il teorema della media aritmetica, risulta

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}{n} = \lim_n \frac{1}{n} = 0^+, \quad \text{ossia} \quad \lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}}{\frac{1}{n}} = +\infty$$

Quindi la successione $b_n = \frac{1}{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}$ tende a zero "più lentamente" della successione $a_n = \frac{1}{n}$. Essendo a_n il termine generale di una serie divergente positivamente (la serie armonica), anche b_n è il termine generale di una serie divergente positivamente.

Quinta serie. La serie è a termini positivi. Poiché

$$\lim_n n^2 \arctan\frac{1}{n^2} = 1,$$

la serie converge per il criterio degli infinitesimi.

Sesta serie. Ricordiamo che

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Dunque

$$2 - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^n},$$

cioè la serie assegnata è la serie geometrica di ragione $\frac{1}{2}$, quindi è convergente:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = 2.$$

□

Esercizio 5.16. La serie è a termini positivi; applichiamo il criterio degli infinitesimi. Osserviamo preliminarmente che

$$n^\alpha \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}-1} = n^\alpha \frac{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1}{\frac{1}{n^2}} = n^{\alpha+2}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1\right).$$

Pertanto

$$\lim_{n\to\infty} n^{-\alpha-2} \frac{n^\alpha}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}-1} = \frac{1}{2},$$

e quindi la serie assegnata ha lo stesso carattere della serie $\sum \frac{1}{n^{-\alpha-2}}$, che converge se e solo se $-\alpha-2>1$, ossia se e solo se $\alpha<-3$. □

Esercizio 5.17. Prima serie. La serie è a termini positivi. Dal criterio della radice, si ha che la serie converge:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(n\tan\frac{1}{3n}\right)^n} = \frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\left[(3n)\tan\frac{1}{3n}\right] = \frac{1}{3} < 1.$$

Seconda serie. La serie è a termini positivi. Applicando il criterio degli infinitesimi, si ha:

$$\lim_{n\to\infty} n^2 \frac{1}{\log^2(n!)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(\frac{1}{n}\log(n!)\right)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(\log\sqrt[n]{n!}\right)^2} = 0, \quad \text{in quanto } \sqrt[n]{n!}\to+\infty;$$

dunque la serie converge: il suo termine generale tende a zero "più velocemente" di $\frac{1}{n^2}$, e $\sum \frac{1}{n^2} < +\infty$. □

Esercizio 5.18. La serie converge se e solo se $\alpha < \frac{1}{2}$. Verifichiamolo. La serie è a t. positivi. Si ha:

$$n^\alpha \frac{\log\left(e^{\sqrt{n}} - n\right)}{\log\left(4^{n^2} + \sqrt{n}\right)} = n^\alpha \frac{\log\left(e^{\sqrt{n}}(1 - ne^{-\sqrt{n}})\right)}{\log\left(4^{n^2}(1 + \sqrt{n}4^{-n^2})\right)} = n^{\alpha - \frac{3}{2}} \frac{1 + \log\left(1 - ne^{-\sqrt{n}}\right)}{\log 4 + \log\left(1 + n4^{-n^2}\right)},$$

da cui segue che

$$\lim_n n^{\frac{3}{2}-\alpha} \cdot n^\alpha \frac{\log\left(e^{\sqrt{n}} - n\right)}{\log\left(4^{n^2} + \sqrt{n}\right)} = \lim_n \frac{1 + \log\left(1 - ne^{-\sqrt{n}}\right)}{\log 4 + \log\left(1 + n4^{-n^2}\right)} = \frac{1}{\log 4} \in]0, +\infty[.$$

Pertanto, la serie ha lo stesso carattere della serie $\sum \frac{1}{n^{\frac{3}{2}-\alpha}}$, che risulta convergente se e solo se $\frac{3}{2} - \alpha > 1$, cioè $\alpha < \frac{1}{2}$. □

Esercizio 5.19. Poiché $e^{(-1)^n a_n} > 1 \iff (-1)^n a_n > 0$, ossia per n pari, la serie è a segni alterni. Poiché

$$\lim_n \frac{\left|e^{(-1)^n a_n} - 1\right|}{a_n} = \lim_n \left| \frac{e^{(-1)^n a_n} - 1}{(-1)^n a_n} \right| = 1, \quad \text{in quanto } (-1)^n a_n \to 0,$$

dal criterio del confronto asintotico si ha che la serie è assolutamente convergente, dunque convergente. □