Fondamenti Ingegneria dei Sistemi di Trasporto

- Elementi di teoria delle scelte discrete
- Impostazione del problema deterministico e stocastico
- Modello logit multinomiale

Introduzione alla teoria delle scelte discrete

TEORIA DELLE SCELTE DISCRETE

- Si applica anche (soprattutto?) a contesti di scelta diversi da quello trasportistico
- È una teoria microeconometrica
- Daniel,e McFadden (e James Heckman)
  - premio Nobel per l'economia nel 2000
- Permette di prevedere/spiegare i comportamenti di scelta di un decisore

Introduzione alla teoria delle scelte discrete

- Ipotesi di potere rappresentare i risultati delle scelte effettuate da un *decisore*
- Il contesto di scelta viene simulato con un numero discreto (e finito) di *alternative di scelta*
- L'analista è in grado di applicare un *paradigma formale di scelta* che simula il *comportamento decisionale*
  - è uno strumento proprio dell'analista e non del decisore
  - non è necessariamente la riproduzione dei meccanismi individuali “psicologici” e dei processi mentali del decisore
- Conduce a modelli intrinsecamente *espliciti/comportamentali*

Introduzione alla teoria delle scelte discrete

- *Comportamento razionale* del decisore
  - il decisore conosce tutte le alternative dell'insieme di scelta
  - associa ad ognuna di esse una quantità <u>scalare</u> (modelli monocriterio) che è un indicatore della *utilità* della alternativa
  - scegli l'alternativa per cui l'indicatore di utilità attinge il valore massimo

Introduzione alla teoria delle scelte discrete

- I = *insieme di scelta*, insieme di tutte le alternative percepite dal decisore;
- j = generica *alternativa di scelta*; $j \in I$
- U_j = utilità percepita (variabile aleatoria)
  - $V_j = E[U_j]$
  - $\varepsilon_j = U_j - V_j$ con $\varepsilon_j \sim$ v.a
  - V_j = utilità sistematica associata nel paradigma formale di comportamento alla generica alternativa
  - ε_j = dispersione aleatoria dell'utilità percepita rispetto al suo valore medio.

Introduzione alla teoria delle scelte discrete

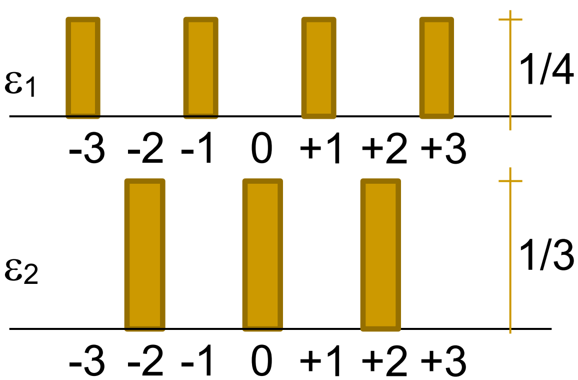
- $\mathbf{U} = [U_1 \ldots U_j \ldots U_n]^T$
- $\mathbf{V} = [V_1 \ldots V_j \ldots V_n]^T$
- $\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_j \ldots \varepsilon_n]^T$

  - $\varepsilon = \mathbf{U} - \mathbf{V}$ $\qquad$ $\mathbf{V} = E[\mathbf{U}]$ $\qquad$ $\varepsilon \sim$ v.a.m.

  - *f(ε)* e *F(ε)* funzione di densità di probabilità congiunta e funzione di distribuzione congiunta del vettore aleatorio ε

Introduzione alla teoria delle scelte discrete

- Impossibile dire quando una variabile aleatoria è maggiore di un'altra
- Possibile dire quale è <u>la probabilità</u> che una variabile aleatoria sia maggiore di un'altra
- Esempio
  - ε_1 e ε_2 indipendenti



$A_1 \rightarrow \varepsilon_1 = -3 \qquad B_1 \rightarrow \varepsilon_2 = -2$

$A_2 \rightarrow \varepsilon_1 = -1 \qquad B_2 \rightarrow \varepsilon_2 = 0$

$A_3 \rightarrow \varepsilon_1 = +1 \qquad B_3 \rightarrow \varepsilon_2 = +2$

$A_4 \rightarrow \varepsilon_1 = +3$

- Tutti gli eventi sono disgiunti (elementari)
- Gli eventi A e gli eventi B sono indipendenti

$$
\begin{aligned}
p(1) &= \Pr[\varepsilon_2 < \varepsilon_1] = \Pr[(A_2 \cap B_1) \cup (A_3 \cap B_1) \cup (A_3 \cap B_2) \cup (A_4 \cap B_1) \cup (A_4 \cap B_2) \cup (A_4 \cap B_3)] = \\
&= \Pr[A_2 \cap B_1] + \Pr[A_3 \cap B_1] + \Pr[A_3 \cap B_2] + \Pr[A_4 \cap B_1] + \Pr[A_4 \cap B_2] + \Pr[A_4 \cap B_3] = \\
&= \Pr[A_2] \cdot \Pr[B_1] + \Pr[A_3] \cdot \Pr[B_1] + \Pr[A_3] \cdot \Pr[B_2] + \Pr[A_4] \cdot \Pr[B_1] + \Pr[A_4] \cdot \Pr[B_2] + \Pr[A_4] \cdot \Pr[B_3] = \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{4}\frac{2}{6} = \frac{1}{2} = 0.5
\end{aligned}
$$

Introduzione alla teoria delle scelte discrete

- Probabilità che una utilità aleatoria sia maggiore di un'altra
  - $\forall\ j \in I \quad p(j) = \text{Prob}[\ U_j = \max_{h \in I}(U_h)\ ]$
  - $\forall\ j \in I \quad p(j) = \text{Prob}[\ U_j > U_h\ ,\ \forall\ h \in I,\ j \neq h]$
  - $\forall\ j \in I \quad p(j) = \text{Prob}[\ V_j - V_h > \varepsilon_h - \varepsilon_j\ ,\ \forall\ h \in I,\ j \neq h]$
  - $\forall\ j \in I \quad p(j) = \text{Prob}[\varepsilon_h < (V_j - V_h) + \varepsilon_j\ ,\ \forall\ h \in I,\ j \neq h]$
  - $\forall\ j \quad p(j) = \int_{\varepsilon_j = -\infty}^{\infty} \ldots \int_{\varepsilon_1 < \varepsilon_j + V_j - V_1} \ldots \int_{\varepsilon_n < \varepsilon_j + V_j - V_n} f(\boldsymbol{\varepsilon})\, d\varepsilon_1 \ldots d\varepsilon_j \ldots d\varepsilon_n$

Introduzione alla teoria delle scelte discrete

- Perché un modello di scelta discreta discreta sia “ben posto” è necessario che:

$$Prob[U_i=U_j]=0 \qquad \forall\ i,j \text{ con } i \neq j$$

- In caso contrario, il modello potrebbe essere indeterminato

Introduzione alla teoria delle scelte discrete

- Le utilità di scelta, in genere, non riescono ad essere direttamente osservate dall'analista
- Possano essere espresse in funzione di altre grandezze che riescono a "spiegare" le utilità
  - *attributi di scelta*
- $U_j = V_j(X_{j1}, \dots X_{jk}, \dots X_{jm}) + \varepsilon_j = V_j(\mathbf{X}_j) + \varepsilon_j$
  $\rightarrow \quad \mathbf{U} = \mathbf{V}(\mathbf{X}) + \varepsilon$
  - Gli attributi di scelta influenzano solo la parte sistematica (modelli invarianti) $\Leftrightarrow f(\varepsilon/\mathbf{V}) = f(\varepsilon)\ \forall \varepsilon \in E_n$

Introduzione alla teoria delle scelte discrete

$$V_j(\mathbf{X}_j) = \sum_{k=1}^{m} \beta_{j,k} X_{j,k}$$

- La utilità si esprime in “util” (adimensionale)
- I coefficienti di omogeneizzazione hanno unità misura pari all’inverso dell’attributo che moltiplicano
- Sono anche detti parametri di reciproca sostituzione
  - Esempio:
    - Moltiplicando β_t / β_c per un tempo si ottiene un costo
    - Moltiplicando β_c / β_t per un costo si ottiene un tempo
      - β_t / β_c =VOT
- Attributi ”disutili” corrispondono a parametri negativi

Introduzione alla teoria delle scelte discrete

- Modelli invarianti
  - le probabilità di scelta stimate dal modello sono invarianti rispetto alla aggiunta all'utilità sistematica di tutte le alternative di una stessa quantità costante
    - $\mathbf{V}_2 = \mathbf{V}_1 + V_0\,\mathbf{1}$
    - $p(j/\mathbf{V}_1) = \mathrm{Prob}[\varepsilon_h < (V_j - V_h) + \varepsilon_j\ ,\ \forall\ h \in \mathbf{I},\ j \neq h]$
    - $p(j/(\mathbf{V}_2 = \mathbf{V}_1 + V_0\,\mathbf{1})) = \mathrm{Prob}[\varepsilon_h < (V_j + V_0 - V_h - V_0) + \varepsilon_j\ ,\ \forall\ h \in \mathbf{I},\ j \neq h]$

$$\forall\ j \quad p\left(j/\mathbf{V}_1\right) = \int_{\varepsilon_{j=-\infty}}^{\infty} \ldots \int_{\varepsilon_1 < \varepsilon_j + V_j - V_1} \ldots \int_{\varepsilon_1 < \varepsilon_j + V_j - V_n} f\left(\boldsymbol{\varepsilon}/\mathbf{V}\right) d\varepsilon_1 \ldots d\varepsilon_j \ldots d\varepsilon_n$$

$$\forall\ j \quad p\left(j/\mathbf{V}_2\right) = \int_{\varepsilon_{j=-\infty}}^{\infty} \ldots \int_{\varepsilon_1 < \varepsilon_j + V_j - V_1} \ldots \int_{\varepsilon_1 < \varepsilon_j + V_j - V_n} f\left(\boldsymbol{\varepsilon}/\mathbf{V}\right) d\varepsilon_1 \ldots d\varepsilon_j \ldots d\varepsilon_n$$

Introduzione alla teoria delle scelte discrete

- Motivi di aleatorietà
  - Gli attributi che spiegano la utilità sistematica sono in realtà variabili aleatorie
    - La utilità sistematica è una media $\Rightarrow$ occorre utilizzare la media degli attributi
    - La dispersione degli attributi attorno alla loro media va a finire (in maniera aggregata) in ε
  - Gli attributi vengono misurati
    - Tutte le misure sono affette da errori aleatori
  - Vi è una intrinseca dispersione dei comportamenti nel tempo anche di un singolo decisore
  - Un modello aleatorio è più profondo di un modello deterministico
    - Paradosso dell'asino di Buridano

Introduzione alla teoria delle scelte discrete

- Un modello deterministico non rispetta sempre la condizione che:

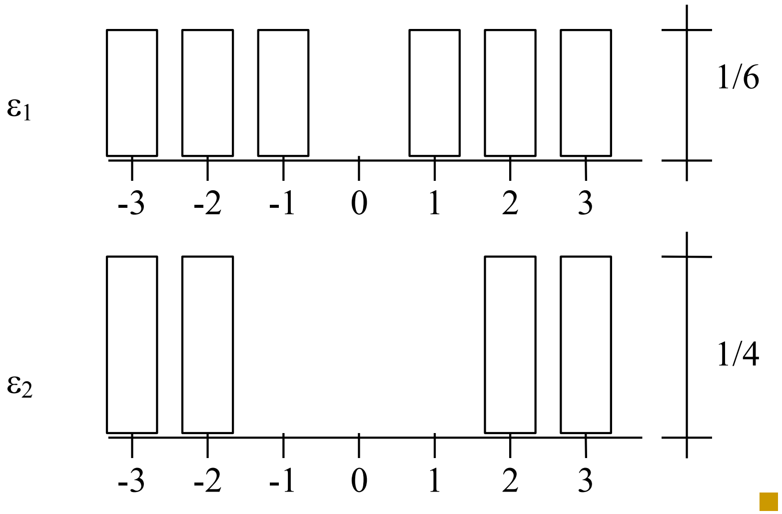
$$Prob[U_i=U_j]=0 \qquad \forall\ i,j \ \text{ con } i\neq j$$

- Infatti utilità percepite e utilità sistematiche coincidono
  - Basta che due alternative abbiano la stessa utilità sistematica perché abbiano anche la stessa utilità percepita
  - Esempio: $V_1=10$, $V_2=10$… quale è quella di massima utilità? Quale è quella scelta?

Introduzione alla teoria delle scelte discrete

- Modelli aleatori ma “mal posti” (ad esempio, modelli con utilità percepite discrete) possono essere anche essi indeterminati

$U_1 = V_1 + \varepsilon_1, U_2 = V_2 + \varepsilon_2$, $V_1 = V_2$, ε_1 e ε_2 indipendenti



$A_1 \rightarrow \varepsilon_1 = -3$ $\quad B_1 \rightarrow \varepsilon_2 = -3$

$A_2 \rightarrow \varepsilon_1 = -2$ $\quad B_2 \rightarrow \varepsilon_2 = -2$

$A_3 \rightarrow \varepsilon_1 = -1$ $\quad B_3 \rightarrow \varepsilon_2 = 2$

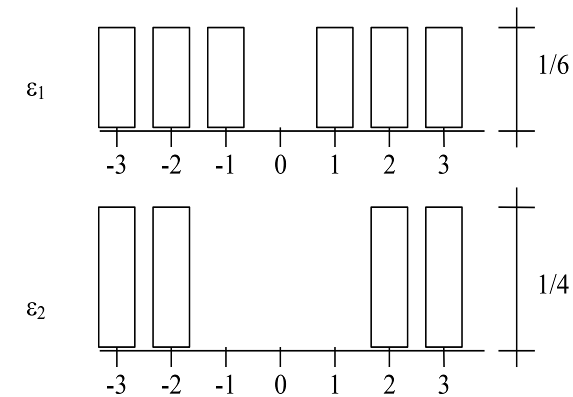
$A_4 \rightarrow \varepsilon_1 = 1$ $\quad B_4 \rightarrow \varepsilon_2 = 1$

$A_5 \rightarrow \varepsilon_1 = 2$

$A_6 \rightarrow \varepsilon_1 = 3$

- Tutti gli eventi sono disgiunti (elementari)
- Gli eventi A e gli eventi B sono indipendenti

Introduzione alla teoria delle scelte discrete



$$
\begin{aligned}
p(1) = \Pr[\varepsilon_2 < \varepsilon_1] = \Pr[&(A_2 \cap B_1) \cup (A_3 \cap B_1) \cup (A_3 \cap B_2) \cup (A_4 \cap B_1) \cup (A_4 \cap B_2) \cup \\
&\cup (A_5 \cap B_1) \cup (A_5 \cap B_2) \cup (A_6 \cap B_1) \cup (A_6 \cap B_2) \cup (A_6 \cap B_3)] = \\
&= \Pr[A_2 \cap B_1] + \Pr[A_3 \cap B_1] + \cdots + \Pr[A_6 \cap B_3] = \\
&= \Pr[A_2] \cdot \Pr[B_1] + \Pr[A_3] \cdot \Pr[B_1] + \cdots + \Pr[A_6] \cdot \Pr[B_3] = {}^1\!/_4 \, {}^{10}\!/_6 = {}^1\!/_2 \, {}^5\!/_6 < {}^1\!/_2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
p(2) = \Pr[\varepsilon_2 > \varepsilon_1] &= \Pr[B_2] \cdot \Pr[A_1] + \Pr[B_3] \cdot (\Pr[A_1] + \Pr[A_2] + \Pr[A_3] + \Pr[A_4]) + \\
&+ \Pr[B_4] \cdot (\Pr[A_1] + \Pr[A_2] + \Pr[A_3] + \Pr[A_4] + \Pr[A_5]) = {}^1\!/_4 \, {}^{10}\!/_6 = {}^1\!/_2 \, {}^5\!/_6 < {}^1\!/_2
\end{aligned}
$$

Introduzione alla teoria delle scelte discrete

- Il modello Logit-multimomiale
  - $$f_{\varepsilon_j}(e) = \frac{1}{\vartheta} \exp\left(\frac{-e}{\vartheta} - \Phi\right) \exp\left[-\exp\left(\frac{-e}{\vartheta} - \Phi\right)\right]$$
  - $$F_{\varepsilon_j}(\mathrm{e}) = \Pr[\varepsilon_j \le \mathrm{e}] = exp\left[-exp\left(\frac{-\mathrm{e}}{\vartheta} - \Phi\right)\right]$$
  - Φ è la costante di Eulero (pari a circa 0.577)
  - ϑ è il parametro caratteristico della distribuzione
    - diverse forme della distribuzione di Gumble possono essere ottenute al variare del valore ϑ
  - Varianza del generico elemento ε_j $\quad \mathrm{Var}[\varepsilon_j] = \sigma_j^2 = \pi^2 \dfrac{\vartheta^2}{6}$

Introduzione alla teoria delle scelte discrete

- Nei modelli logit-multinomiale tutte le componenti del vettore di dispersione sono i.i.d.

$$\mathrm{Var}[\varepsilon_j] = \pi^2 \frac{\vartheta^2}{6} \quad \forall\, j \in I \qquad \underline{\vartheta \geq 0}$$

$$\mathrm{Cov}[\varepsilon_j, \varepsilon_h] = \sigma_{j,h} = 0 \quad \forall\, (j,h),\ j \neq h$$

$$\Sigma_\varepsilon = \begin{bmatrix} \pi^2 \frac{\vartheta^2}{6} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \pi^2 \frac{\vartheta^2}{6} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \pi^2 \frac{\vartheta^2}{6} \end{bmatrix} = \pi^2 \frac{\vartheta^2}{6} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = \pi^2 \frac{\vartheta^2}{6} \mathbf{I}$$

Introduzione alla teoria delle scelte discrete

- La probabilità può essere facilmente calcolata in forma chiusa

$$\forall\, j \in I \quad p(j) = \Pr[V_j - V_h > \varepsilon_h - \varepsilon_j, \forall\, h \in I,\, j \neq h] = \frac{\exp\left(V_j / \vartheta \right)}{\sum_{h=1}^{n} \exp\left(V_h / \vartheta \right)}$$

  - La definizione di invarianza è facilmente verificabile
    - …

- Una delle utilità sistematiche può essere presa a riferimento

Introduzione alla teoria delle scelte discrete

- Il modello è sensibile alle <u>differenze</u> di utilità

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} V_1 & V_2 & \cdots & V_j & \cdots & V_{rif} & \cdots & V_n \end{bmatrix}^T$$

$$\Delta\mathbf{V} = \begin{bmatrix} V_1 - V_{rif} & V_2 - V_{rif} & \cdots & V_j - V_{rif} & \cdots & 0 & \cdots & V_n - V_{rif} \end{bmatrix}^T$$

$p(\mathbf{V}) = p(\Delta\mathbf{V})$ (perché modello invariante)

$$p(\mathrm{j}) = \frac{\exp\left(\Delta\mathbf{V}_{\mathrm{j}} / \vartheta \right)}{1 + \sum_{h \neq Rif} \exp\left(\Delta\mathbf{V}_{\mathrm{h}} / \vartheta \right)}$$

- Le ipotesi di invarianza e di indipendenza delle componenti del vettore aleatorio danno luogo alla proprietà di *indipendenza dalle alternative irrilevanti*

Introduzione alla teoria delle scelte discrete

- Proprietà di *indipendenza dalle alternative irrilevanti*

$$\frac{p(j)}{p(k)} = k$$

  - Forma "debole"
    - *Il rapporto tra le probabilità di scelta di due qualsiasi alternative dell'insieme di scelte è costante rispetto alla variazione di utilità sistematica di tutte le altre alternative*
  - Forma "forte"
    - *Il rapporto tra le probabilità di scelta di due qualsiasi alternative dell'insieme di scelta è costante rispetto alla aggiunta di una alternativa all'interno dell'insieme di scelta*
- Esempi
  - Quote di mercato telefonia mobile
  - Linea di bus (blu/arancione)
  - Percorsi fortemente sovrapposti

Introduzione alla teoria delle scelte discrete

- Verifica della proprietà IIA nel modello logit multimoniale (non è la dimostrazione generale della proprietà)

$$I=\{1,2,\ldots,n\}\rightarrow \frac{p(j)}{p(k)}=\frac{exp\left(V_j/\vartheta\right)}{\sum_{h=1}^{n} exp\left(V_h/\vartheta\right)}\frac{\sum_{h=1}^{n} exp\left(V_h/\vartheta\right)}{exp\left(V_k/\vartheta\right)}=exp\left(\frac{V_j-V_k}{\vartheta}\right)\quad \forall (j,k),\ j\neq k$$

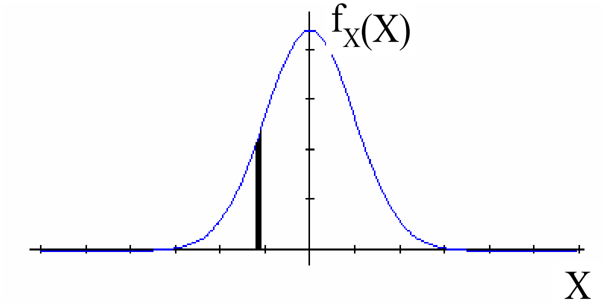
$$\frac{p'(j)}{p'(k)}=\frac{\exp\left(V_j/\vartheta'\right)}{\sum_{h=1}^{n+1}\exp\left(V_h/\vartheta'\right)}\frac{\sum_{h=1}^{n+1}\exp\left(V_h/\vartheta'\right)}{\exp\left(V_k/\vartheta'\right)}=\exp\left(\frac{V_j-V_k}{\vartheta'}\right)=\exp\left(\frac{V_j-V_k}{\vartheta}\right)\quad \forall\ j,k\in I'\subset I,\ j\neq k$$

Introduzione alla teoria delle scelte discrete

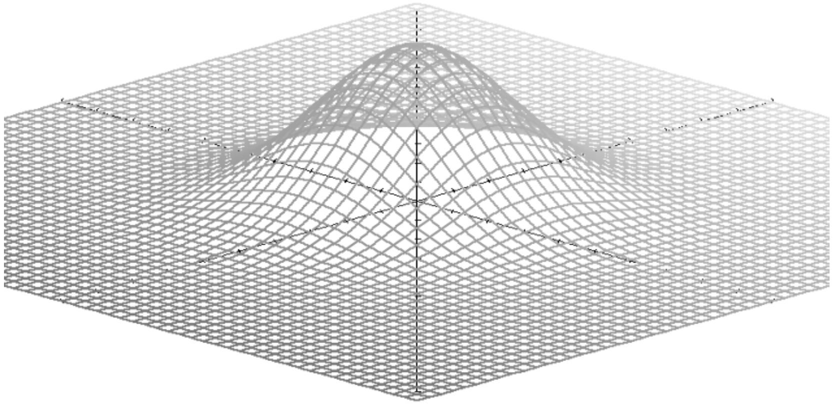
- Aggregazione delle scelte
  - La teoria delle scelte discrete è sviluppata con riferimento ad un generico decisore
  - La teoria delle scelte discrete si applica con riferimento alle scelte di un insieme di decisori (applicazione aggregata)
    - Tutti i decisori sono di fronte allo stesso insieme di scelta
    - Ogni generico decisore dell'insieme di decisori ha un proprio vettore di attributi di scelta (medio) **X**
    - Il vettore degli attributi di scelta è "disperso" tra i decisori
      - Il vettore degli attributi di scelta è una v.a. multidimensionale con una propria distribuzione di probabilità

Introduzione alla teoria delle scelte discrete

- Distribuzione del vettore degli attributi di scelta
  - Se vi fosse un solo attributo di scelta



  - In presenza di un vettore di attributi di scelta
    - $f_X(\mathbf{x})$ = funzione di densità di probabilità congiunta del vettore degli attributi di scelta



Introduzione alla teoria delle scelte discrete

- Calcolo della probabilità aggregata di scelta
  - Metodo esatto $$P(j)=\int_{\mathbf{X}} p(j/\mathbf{X})\, f_X(\mathbf{X})\, d\mathbf{X} \quad \forall\ j \in I$$
    - p(j) = Probabilità aggregata di scelta della alternativa j
    - p(j/X) = probabilità (disaggregata – del generico decisore) di scelta della alternativa j, dato il valore del vettore degli attributi di scelta
  - Per applicare il metodo esatto occorre conoscere la legge $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$
  - In mancanza di questo si può applicare il metodo detto del “utente medio”

Introduzione alla teoria delle scelte discrete

- Metodo dell'utente medio $p(j) = p(j/\xi)$
    - Dove ξ è il valore medio della distribuzione aleatoria di vettori di attributi di scelta tra l'insieme dei decisori (media della distribuzione $f_X(\mathbf{x})$

- Per applicare il metodo dell'utente medio è sufficiente conoscere il valore medio del vettore degli attributi e non tutta la sua distribuzione
- La dispersione tra gli utenti che viene trascurata nel metodo dell'utente medio "finisce" nel ε del modello di utilità
    - È un altro buon motivo per preferire modelli di scelta probabilistici

Introduzione alla teoria delle scelte discrete

- Il metodo dell'utente medio è tanto più una buona approssimazione quanto più il vettore ξ è rappresentativo dell'intera distribuzione
  - Cioè quanto meno i valori degli attributi di scelta degli utenti sono dispersi ($\mathbf{\Sigma}_\xi \to \mathbf{0}$)

- Se l'insieme dei decisori cui si applica il metodo dell'utente medio è troppo disperso
  - Occorre applicare il metodo a sottoinsiemi per i quali la dispersione degli attributi sia minore