Corso di Fisica Generale 1
a.a. 2018/2019

corso di laurea in Ingegneria dell'Automazione, Informatica, Biomedica, Telecomunicazioni ed Elettronica canali CIS-FER e RON-Z

14° lezione (27 e 28 / 11 / 2018)

Prof. Laura VALORE

Email : laura.valore@na.infn.it / laura.valore@unina.it

Pagina web : www.docenti.unina.it/laura.valore

Ricevimento : appuntamento per email – studio presso il Dipartimento di Fisica (Complesso Universitario di Monte Sant'Angelo, Edificio 6) – stanza 1H09

Oppure Laboratorio (Hangar) 1H11c0

Rotazione con accelerazione angolare costante

E' l'analogo del moto rettilineo uniformemente accelerato per i moti rotatori :

α = costante

$v(t) = v_0 + at \longrightarrow \omega(t) = \omega_0 + \alpha t$

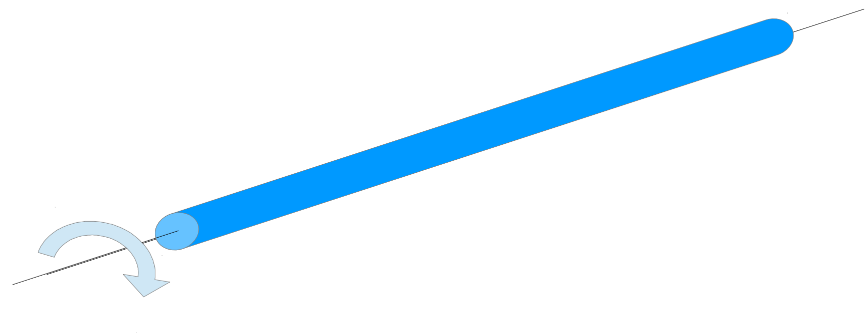
$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2 \longrightarrow \theta(t) = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2$

il moto rotatorio con ω costante è, come per i moti traslatori, un caso particolare del moto con accelerazione angolare costante in cui $\alpha = 0$

$v(t) = v_0 = \text{costante} \longrightarrow \omega(t) = \omega_0 = \text{costante}$

$x(t) = x_0 + v_0 t \longrightarrow \theta(t) = \theta_0 + \omega_0 t$

Energia cinetica rotazionale



Se consideriamo un corpo in rotazione attorno ad un asse fisso, questo avra' certamente una certa energia cinetica. Se consideriamo il centro di massa, e calcoliamo $K = ½ mv^2$ come abbiamo sempre fatto per i moti traslatori, otteniamo l'energia cinetica del centro di massa che è FERMO → $K = 0$.

Trattiamo il corpo come un insieme di punti materiali, aventi ciascuno velocità lineare v_i :

$$K = ½\, m_1 v_1^2 + ½\, m_2 v_2^2 + \ldots.\ ½\, m_n v_n^2 = \Sigma\ ½ m_i v_i^2$$

$$K = \Sigma\ ½ m_i (\omega r_i)^2 = ½\ \Sigma (m_i r_i^2)\omega^2$$

velocità lineare, che cambia da punto a punto, ma $v_i = \omega r_i$ → ω è la stessa per tutti i punti!

Energia cinetica rotazionale e momento d’inerzia

$K = \frac{1}{2} (\Sigma m_i r_i^2)\omega^2$

la quantità $(\Sigma m_i r_i^2)$ è funzione della massa dei singoli punti (m_i) e della loro distanza dall'asse di rotazione (r_i) : ovvero dipende da come è distribuita la massa del corpo intorno all'asse di rotazione

$I = \Sigma m_i r_i^2$ è detto **“momento d'inerzia”** del corpo

dato un corpo rigido ed un asse di rotazione fisso, il momento d'inerzia di un corpo *attorno a quell'asse* è costante (va quindi sempre specificato l'asse !!)

L'energia cinetica di un corpo rigido che ruota attorno ad un asse fisso è :

$$K = \frac{1}{2} I\omega^2$$

l'unità di misura di I è il $kg \cdot m^2$

Energia cinetica rotazionale

L'energia cinetica rotazionale non è una forma diversa di energia rispetto all'energia cinetica traslazionale per un corpo rigido : è sempre la stessa forma di energia legata allo stato di moto di un corpo.

$$K = \frac{1}{2} I\omega^2 \qquad\qquad K = \frac{1}{2} M v_{cdm}^{\ 2}$$

quadrato di una velocità scalare (lineare o angolare)

momento d'inerzia, o inerzia rotazionale I
massa o inerzia traslazionale M

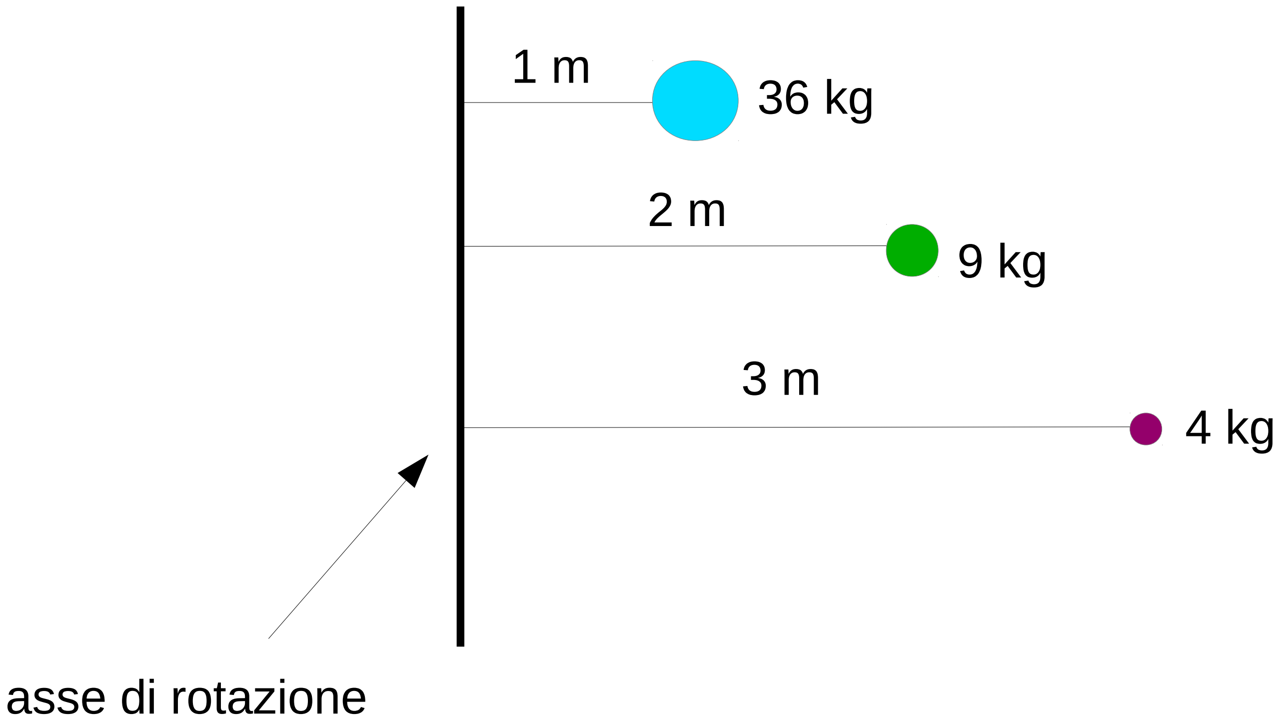
il momento d'inerzia di un corpo descrive quanto è difficile cambiare il suo moto angolare rispetto al proprio asse : infatti, a parità di velocità angolare, un corpo con I (momento d'inerzia) maggiore rende piu' difficile una rotazione… serve piu' energia per aumentare la sua velocità.

Verifica

La figura mostra 3 masse che ruotano attorno ad un asse verticale.

Sono indicate le distanze dei centri di ciascuna dall'asse.

Ordinatele in modo decrescente secondo i loro momenti d'inerzia



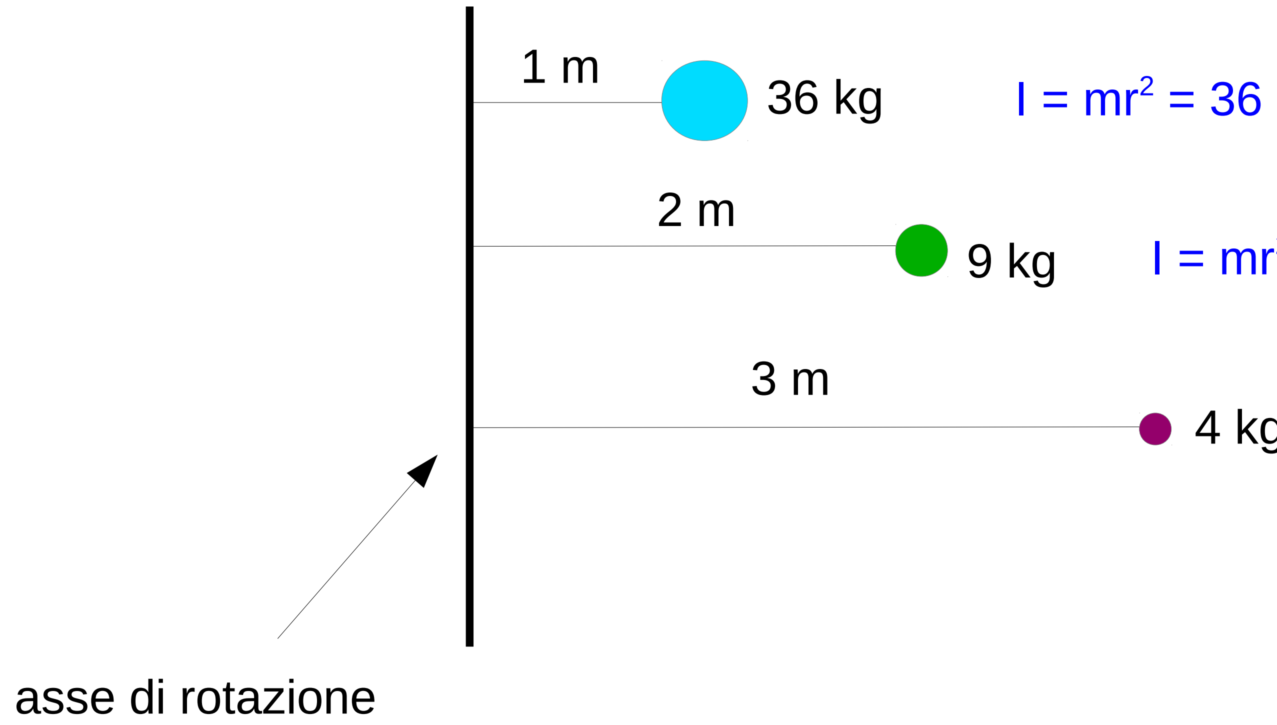
Verifica

La figura mostra 3 masse che ruotano attorno ad un asse verticale.

Sono indicate le distanze dei centri di ciascuna dall'asse.

Ordinatele in modo decrescente secondo i loro momenti d'inerzia

sono tutti uguali!



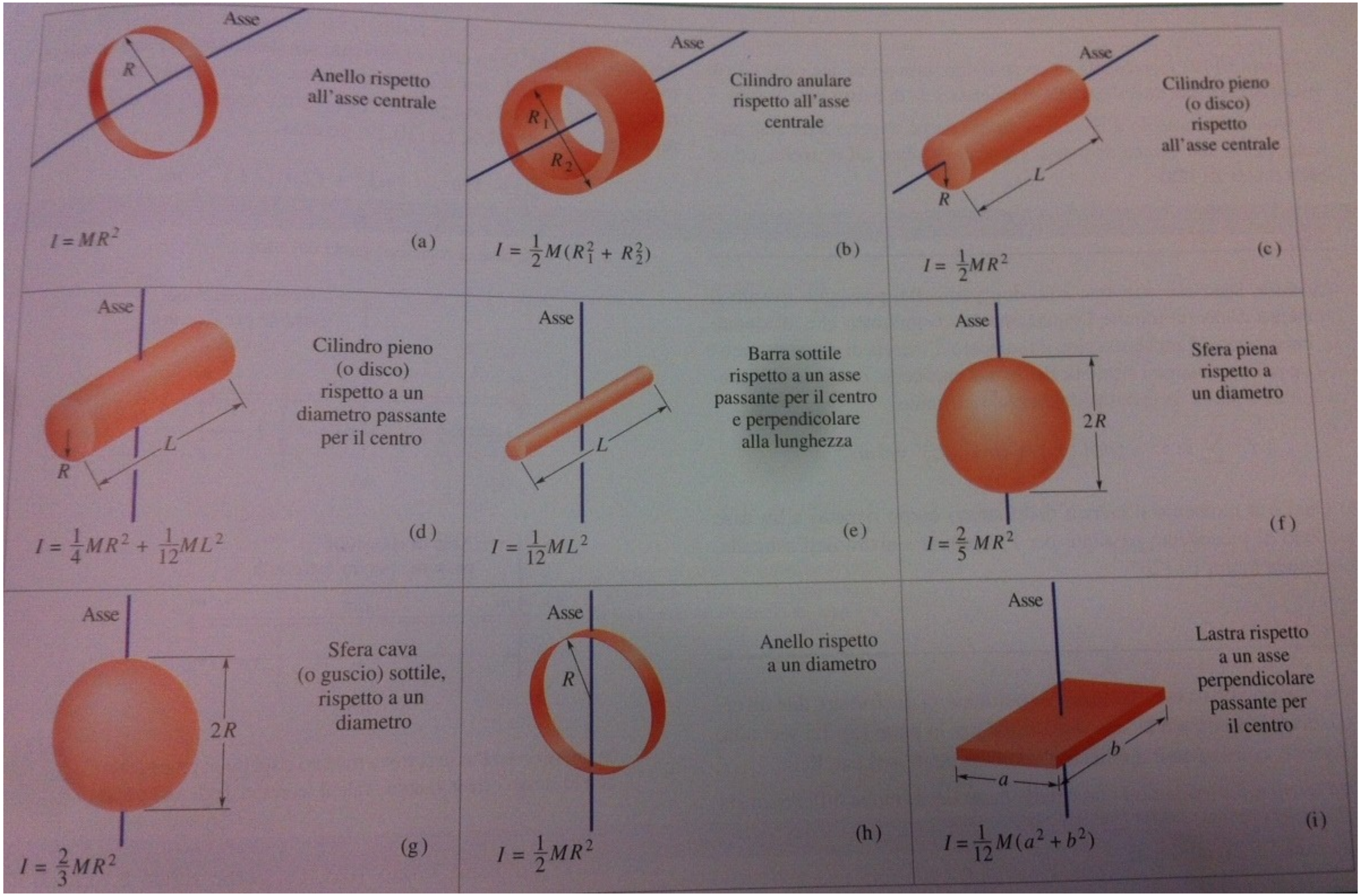
$I = mr^2 = 36\ \text{kg} \cdot (1\ \text{m})^2 = 36\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$

$I = mr^2 = 9\ \text{kg} \cdot (2\ \text{m})^2 = 36\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$

$I = mr^2 = 4\ \text{kg} \cdot (3\ \text{m})^2 = 36\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$

Calcolo del momento d'inerzia

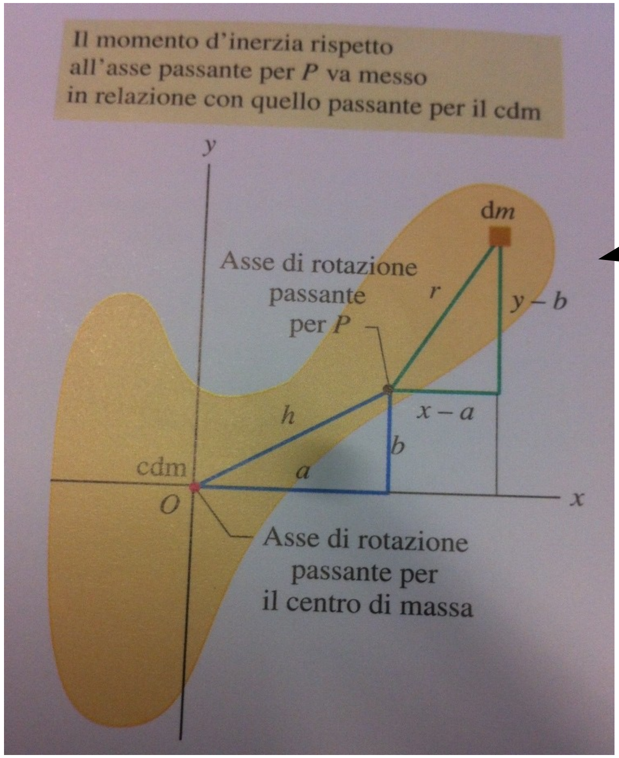
Se abbiamo una distribuzione continua di materia anziché un insieme di punti materiali distinti, sostituiamo l'equazione $I = \Sigma m_i r_i^2$ con $I = \int r^2\, dm$



Teorema degli assi paralleli
o teorema di Huygens-Steiner

Il momento d'inerzia di un corpo per la rotazione intorno ad un asse passante per un punto P a distanza h da un asse **parallelo al primo** passante per il centro di massa del corpo è :

$$I = I_{cdm} + Mh^2$$ teorema degli assi paralleli



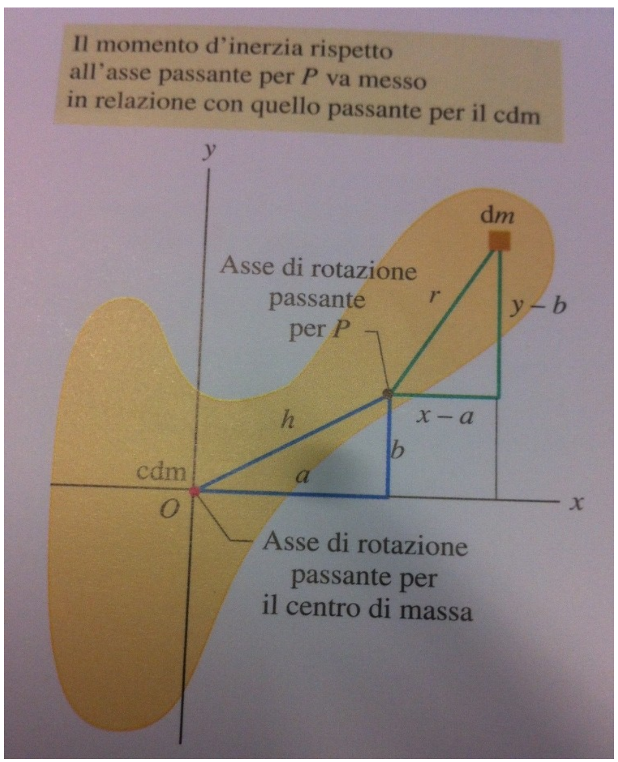
dato un corpo rigido di forma qualsiasi, di cui ne vediamo la sezione trasversale

consideriamo due assi di rotazione, paralleli tra loro (entrambi perpendicolari al piano della figura) : uno passante per il centro di massa, l'altro per il punto P

la distanza tra i due assi di rotazione è h

dimostrazione del teorema degli assi paralleli

$I = I_{cdm} + Mh^2$



Il centro di massa è posto in O, origine degli assi

Il punto P ha coordinate a e b

consideriamo dm, un elemento di massa di coordinate x ed y

Il momento d'inerzia del corpo rispetto all'asse passante per P è :

$$I = \int r^2\, dm = \int [(x-a)^2 + (y-b)^2]\, dm$$

$$\downarrow$$

$$I = \int [(x^2 + a^2 - 2ax) + (y^2 + b^2 - 2by)]\, dm \rightarrow$$

$$I = \int (x^2 + y^2)\, dm - 2a \int x\, dm - 2b \int y\, dm + \int (a^2 + b^2)\, dm \rightarrow$$

$x^2 + y^2 = R^2$, distanza di dm da O
$\rightarrow \int (x^2 + y^2)\, dm = I_{cdm}$

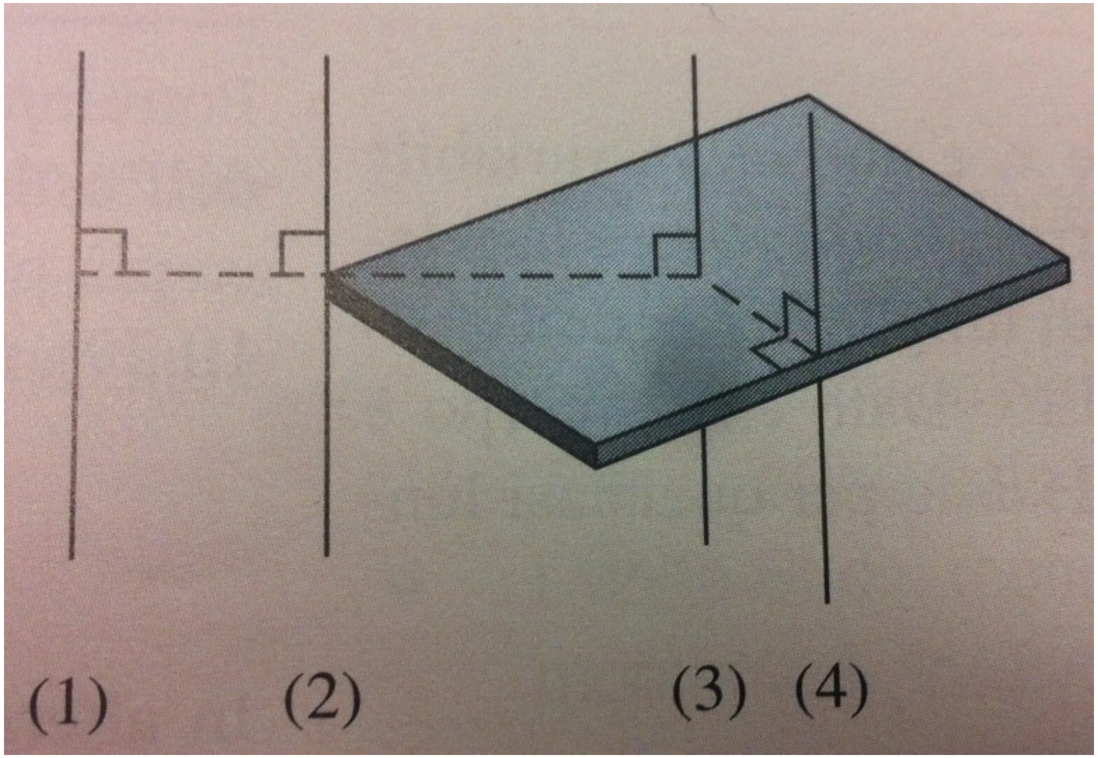
coordinate cdm → zero, perché posto nell'origine degli assi

$$\left.\begin{aligned} a^2 + b^2 &= h^2 \\ \int dm &= M \end{aligned}\right\} \; Mh^2$$

Verifica

Figura con 4 scelte possibili per l'asse di rotazione, sempre perpendicolare al piano in figura

Ordinate gli assi secondo i valori decrescenti del momento d'inerzia dell'oggetto rispetto a questi assi

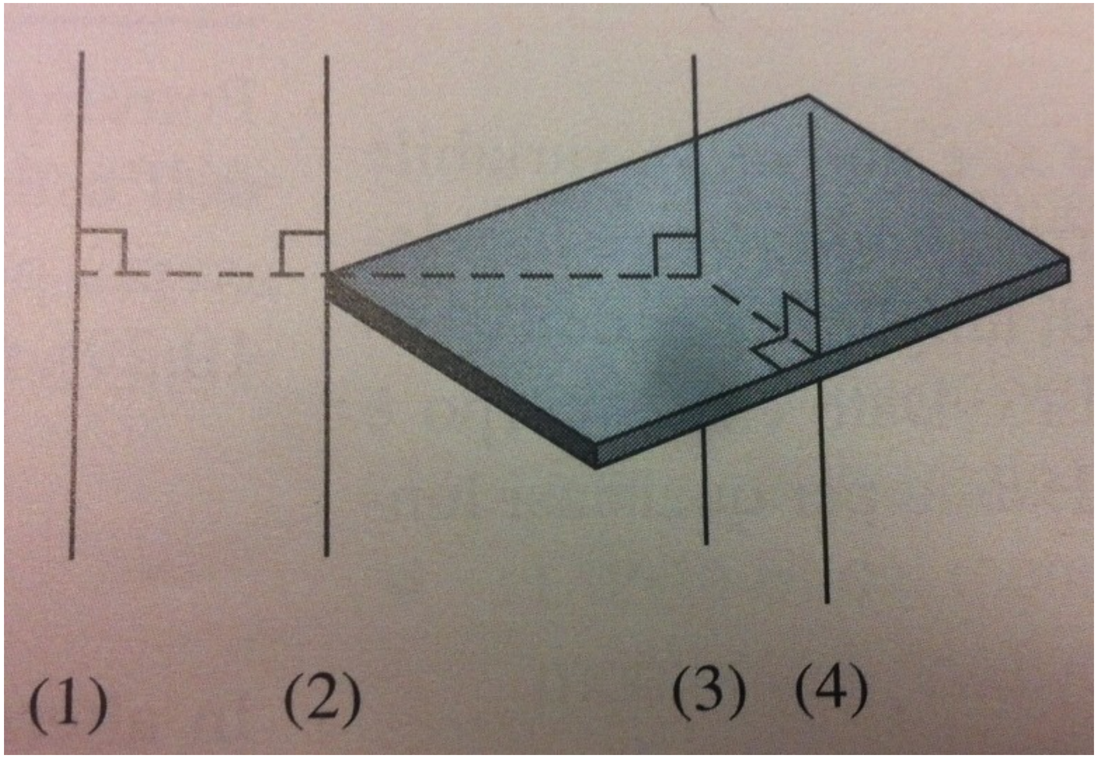


Verifica

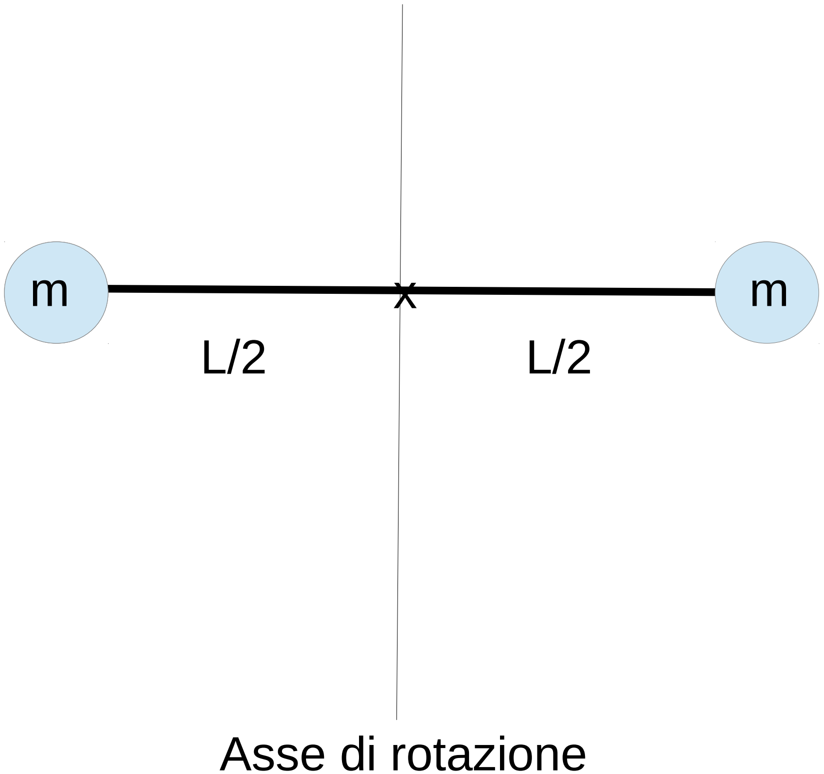
Figura con 4 scelte possibili per l'asse di rotazione, sempre perpendicolare al piano in figura

Ordinate gli assi secondo i valori decrescenti del momento d'inerzia dell'oggetto rispetto a questi assi

$I = I_{cdm} + Mh^2$ ed h è decrescente in 1,2,4,3

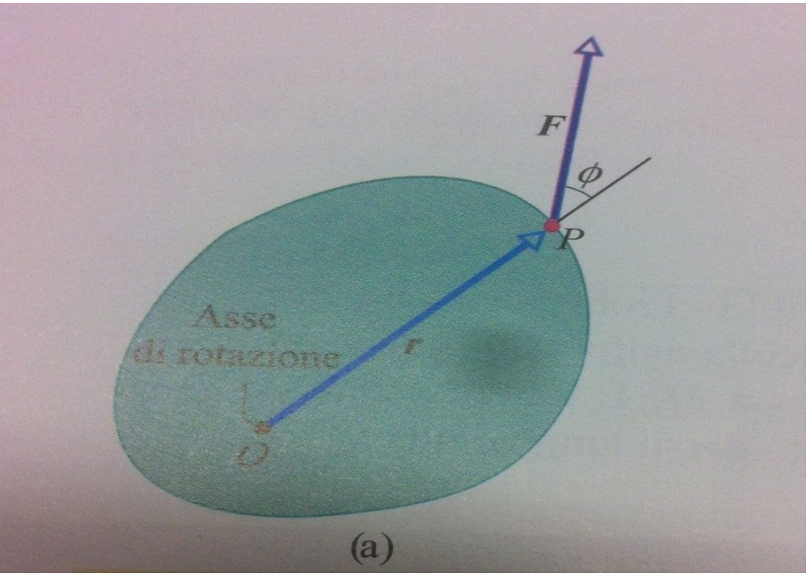


Problema svolto 10.5



+ problema 10.6 e 10.31

Momento torcente o momento di una forza



(a)

vediamo ora come una forza **F** possa provocare una rotazione di un corpo rigido intorno ad un asse.

Nella figura a sinistra, la forza **F** è applicata in un punto P la cui posizione rispetto ad O è definita dal vettore posizione **r**
La forza **F** ha componenti SOLO NEL PIANO DEL FOGLIO.

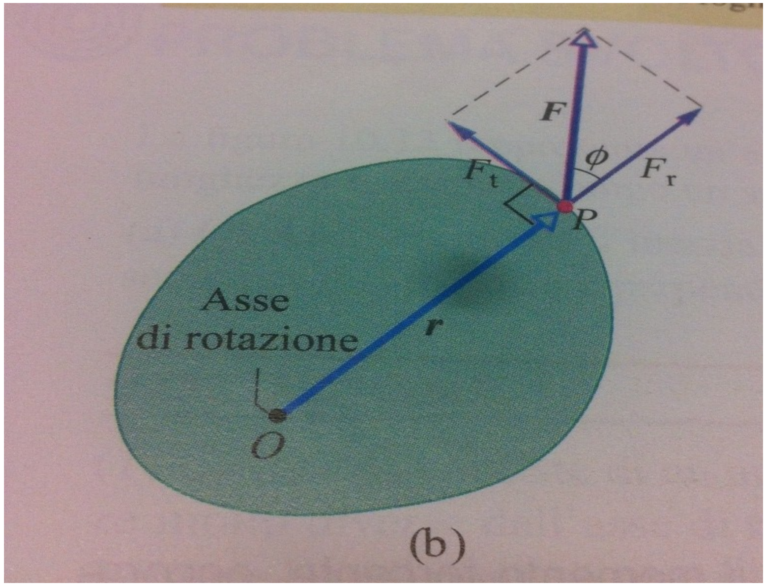
L'asse di rotazione è perpendicolare al foglio e passa per O

Scomponiamo **F** in :

una componente radiale Fr (diretta lungo r)
una componente tangenziale Ft (perpendicolare ad r)

$F_r = F\cos\varphi$ non causa rotazione

$F_t = F\mathrm{sen}\varphi$ provoca la rotazione intorno all'asse



(b)

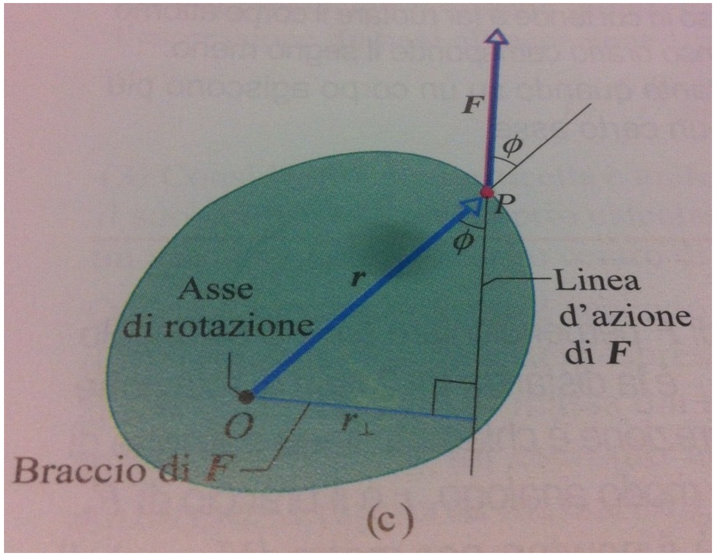
Momento torcente o momento di una forza

L'efficienza della componente tangenziale Ft della forza F nel mettere in rotazione il corpo dipende sia dall'intensità di Ft che dalla distanza del punto di applicazione della forza dal punto O :

il momento torcente o momento della forza τ è la grandezza che tiene conto contemporaneamente di entrambi i fattori :

$$\tau = r\,F_t = (r)(F\,\mathrm{sen}\varphi) = (r\,\mathrm{sen}\varphi)(F) = r_\perp(F)$$

$r_\perp$ è detto braccio della forza ed è la distanza tra l'asse di rotazione e la linea di azione della forza F



L'unità di misura del momento torcente è il N·m

Anche se ha la stessa unità di misura del lavoro, sono due grandezze completamente diverse!

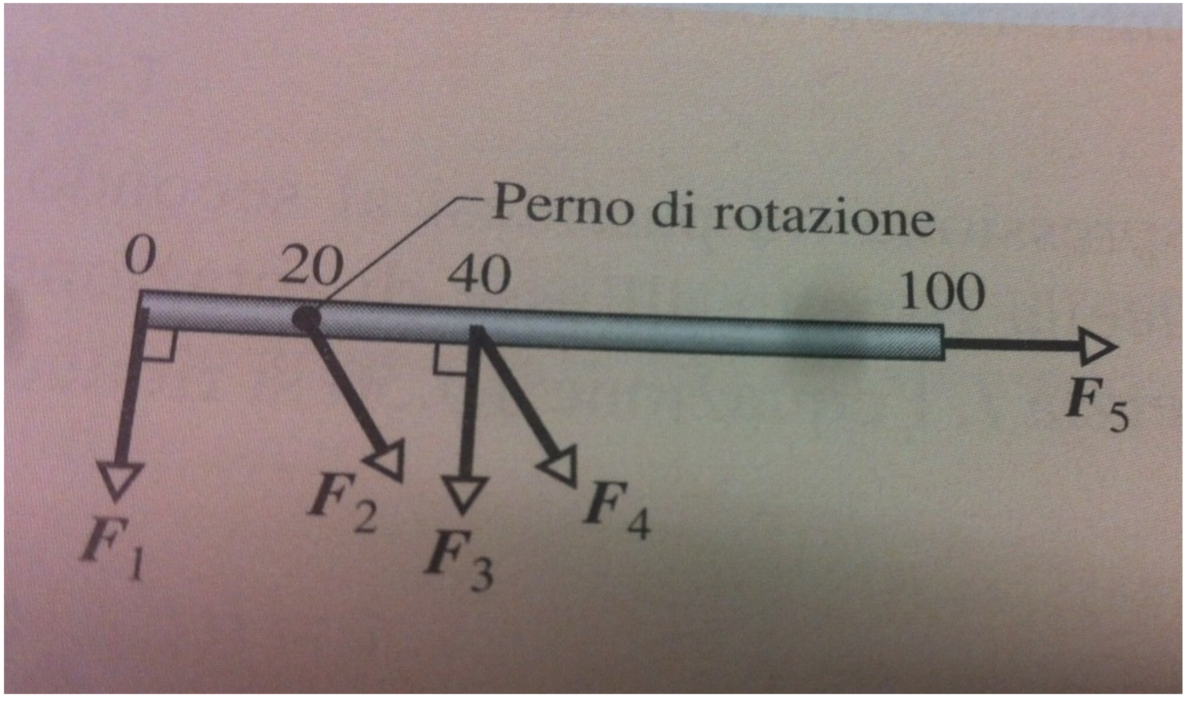
Per questo il Joule, che si usa per il lavoro, NON si usa per il momento torcente.

Verifica

La figura mostra un’asta vista dall'alto, che puo' ruotare attorno ad un asse passante per la posizione x = 20 cm.

Tutte le 5 forze indicate hanno la stessa intensità

Ordinatele secondo i valori decrescenti del momento della forza prodotto da ciascuna



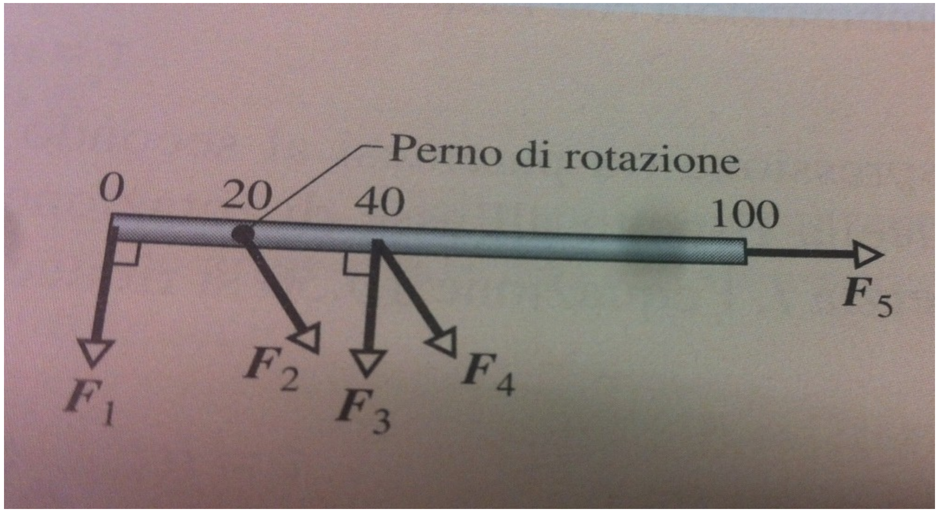
Verifica

La figura mostra un metro visto dall'alto, che puo' ruotare attorno ad un asse passante per la posizione x = 20 cm.

Tutte le 5 forze indicate hanno la stessa intensità

Ordinatele secondo i valori decrescenti del momento della forza prodotto da ciascuna

τ1 e τ3 uguali (stesso braccio della forza), τ4 (stesso braccio ma intensità della forza minore), τ2 e τ5 = 0 (il primo perché il braccio è zero, il secondo perché la forza è diretta come il braccio)

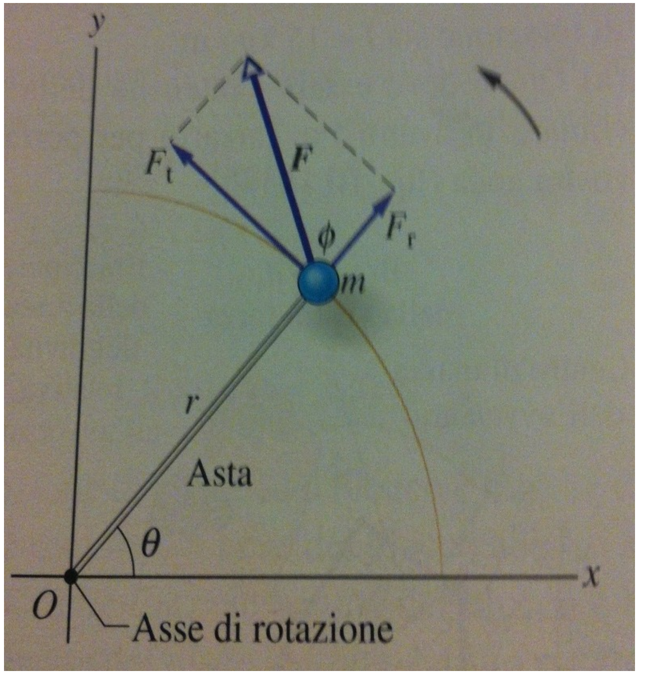


Seconda legge di Newton per il moto rotatorio

Come per le traslazioni, in cui la seconda legge di Newton mette il relazione la risultante delle forze agenti sul corpo con la massa e l'accelerazione del corpo, così per le rotazioni possiamo scrivere :

$$\tau_{net} = I\alpha$$

in analogia ad $\mathbf{F}_{net} = m\mathbf{a}$



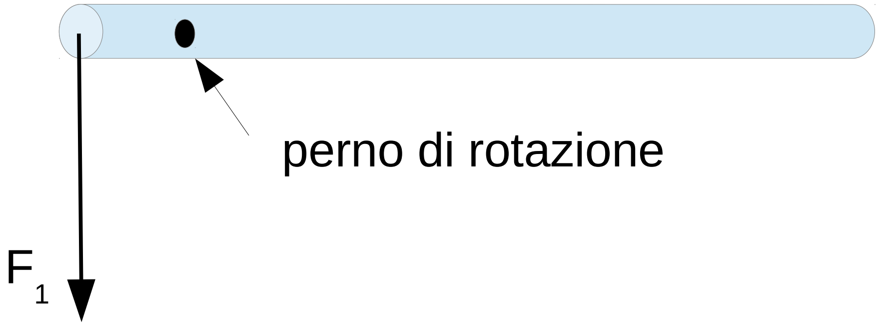
DIMOSTRAZIONE :

consideriamo la particella di massa m in figura, che puo' muoversi soltanto nel piano del foglio descrivendo una circonferenza con centro nel perno di rotazione.

La componente tangenziale della forza F_t provoca la rotazione della particella → $F_t = ma_t$

Il momento della forza che agisce sulla particella è :
$\tau = F_t r = ma_t r$ → $a_t = \alpha r$ (relazione tra accelerazione lineare e rotazionale) → $\tau = ma_t r = (mr^2)\alpha = I\alpha$

Verifica



Alla barra sono applicate due forze, F1 ed F2, di cui solo la prima è indicata.

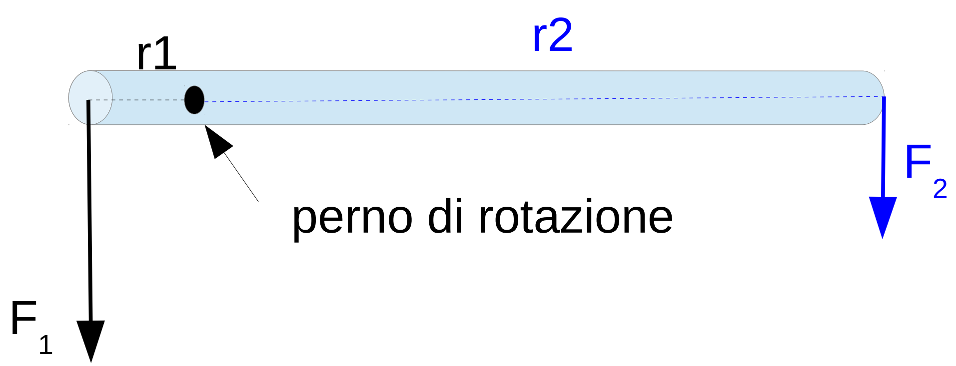
F2 è applicata perpendicolarmente alla barra all'estremità destra

Affinchè la barra non ruoti,

a) quale dovrebbe essere il verso di F2 ?

b) F2 dovrebbe essere maggiore, uguale o minore di F1?

Verifica



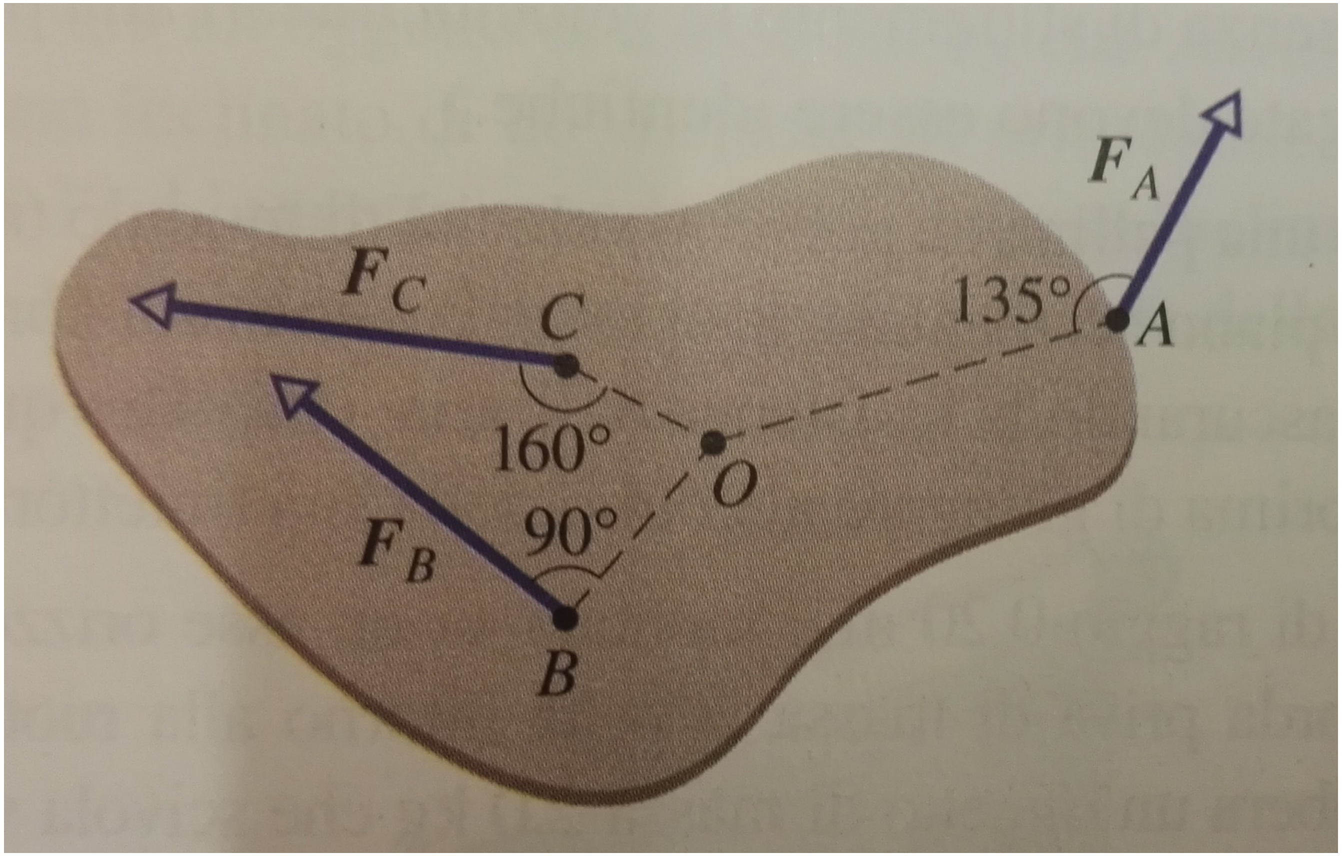
Alla barra sono applicate due forze, F1 ed F2, di cui solo la prima è indicata.

F2 è applicata perpendicolarmente alla barra all'estremità destra

Affinchè la barra non ruoti
$\rightarrow \tau_{net} = 0 \rightarrow F1r1 = - F2r2 \rightarrow$ F1 mette in rotazione la barra in senso antiorario, quindi F2 deve tendere a mettere in rotazione la barra in senso orario ed i due momenti devono essere uguali in modulo per annullarsi a vicenda.

a) quale dovrebbe essere il verso di F2 ?
stesso verso di F1

b) F2 dovrebbe essere maggiore, uguale o minore di F1?
minore, perché r2 > r1



F_A
F_C
C
135°
A
160°
O
90°
F_B
B

Lavoro ed energia cinetica rotazionale

TRASLAZIONE :
il teorema dell'energia cinetica dice che $\Delta K = K_f - K_i = L$

se la forza è costante, $L = \mathbf{F}\cdot\mathbf{d} = Fd\cos\theta$

se la forza è variabile, $L = \int_{x_i}^{x_f} F\,dx$ (caso unidimensionale lungo l'asse x)

la potenza è la rapidità con cui si compie lavoro → $P = dL/dt = \mathbf{F}\cdot\mathbf{v}$

ROTAZIONE :
Il momento di una forza agisce mettendo in rotazione il corpo, ovvero variando la sua velocità angolare → varia la sua energia cinetica rotazionale, compiendo lavoro.

Il teorema dell'energia cinetica → $\Delta K = K_f - K_i = \frac{1}{2} I\omega^2_f - \frac{1}{2} I\omega^2_i = L$

se il momento della forza è costante, il lavoro è $L = \tau(\theta_f - \theta_i)$

se il momento della forza è variabile, $L = \int_{\theta_i}^{\theta_f} \tau\,d\theta$

la potenza è : $P = dL/dt = \tau\omega$

Dimostrazioni

anche se queste equazioni sono state ricavate per un corpo puntiforme, è valida per qualunque corpo rigido esteso in rotazione attorno ad un asse fisso

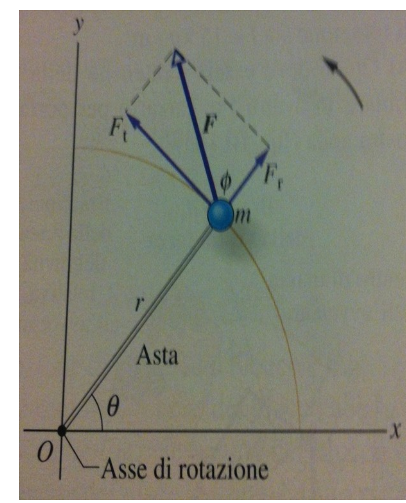
Teorema dell'energia cinetica : $\Delta K = ½\, I\omega^2_f - ½\, I\omega^2_i = L$

$\Delta K = Kf - Ki = ½\, mv^2_f - ½\, mv^2_i = L$ ma $v = \omega r$ →

$\Delta K = ½\, m(\omega r)^2_f - ½\, m(\omega r)^2_i = ½\, (mr^2)\omega^2_f - ½\, (mr^2)\omega^2_i = ½\, I\omega^2_f - ½\, I\omega^2_i = L$

$mr^2 = I$

Lavoro : $L = \int_{\theta i}^{\theta f} \tau\, d\theta$ oppure $L = \tau(\theta_f - \theta_i)$ se τ è costante



La particella percorre una distanza ds lungo la circonferenza sotto l'azione della componente tangenziale della forza Ft, che è l'unica a compiere lavoro (Fr è perpendicolare alla traiettoria e non compie lavoro) → $dL = F_t ds = (F_t r)\, d\theta = \tau\, d\theta$

integrando : $L = \int_{\theta i}^{\theta f} \tau\, d\theta$ se τ è costante, $L = \tau(\theta_f - \theta_i)$

Potenza : $P = \tau\omega$

$P = dL/dt = \tau\, d\theta/dt = \tau\omega$