Fondamenti di Ingegneria dei Sistemi di Trasporto

- La teoria delle scelte discrete applicate alla scelta del percorso
- Il modello Probit
- L'algoritmo Montecarlo

Introduzione

- Il modello di scelta del percorso può essere trattato con la TEORIA DELLE SCELTE DISCRETE

- L’insieme dei percorsi che connettono una coppia o/d può essere visto come un insieme di scelte discrete

Modelli di scelta del percorso

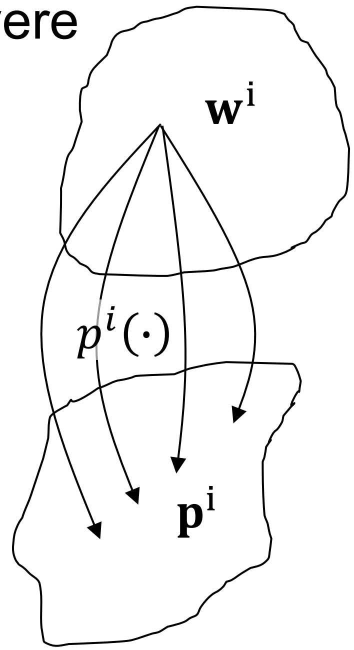
- Il modello di scelta del percorso si definisce separatamente per ogni coppia O/D
  - $\forall\, i,\ \mathbf{p}^{\mathrm{i}} = p^{i}\left(-\mathbf{w}^{\mathrm{i}}\right)$
    - Dove
      - $\mathbf{p}^{\mathrm{i}} = \left[p_1^i,\ p_2^i, \dots,\ p_k^i, \dots,\ p_{n_i}^i\right]^T$
        è il vettore delle percentuali/probabilità di scelta di percorso, per ogni percorso $k \in \mathrm{I}^{\mathrm{i}}$
        - Con I^{i} si indica insieme dei percorsi alternativi per la i-esima coppia O/D
      - $\mathbf{w}^{\mathrm{i}} = \left[w_1^i,\ w_2^i, \dots,\ w_k^i, \dots,\ w_{n_i}^i\right]^T$
        è il vettore dei costi dei percorsi ($\mathbf{w}^{\mathrm{i}} = \Delta^{\mathrm{iT}} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{w}_{\mathrm{NA}}^{\mathrm{i}}$), $\forall k \in \mathrm{I}^{\mathrm{i}}$
    - Si noti che
      - La funzione di probabilità/percentuale di scelta $p^i(\cdot)$ può essere diversa per ogni i-esima coppia O/D
      - Le probabilità/percentuali di scelta dipendono dai costi di tutti i percorsi alternativi (vettore $\mathbf{w}^{\mathrm{i}}$)

Modelli di scelta del percorso

- Calcolo della probabilità/percentuale di scelta del percorso
  - Modello di scelta discreta
    - Modello dell'utente razionale
    - Massimizzazione della utilità = minimizzazione dei costi
      - $\forall\, i, \;\; \forall\, k \in \mathrm{I}^i \;\; p_k^i = Prob\left[w_k^i < w_h^i,\ \forall\, h \in \mathrm{I}^i,\ h \neq k\right]$

Modelli di scelta del percorso

- Modello deterministico di scelta del percorso
  - $p_k^i > 0 \Rightarrow w_k \leq w_h \; \forall \; h \in I^i$
    - Se un itinerario ha una percentuale di scelta non nulla, vuole dire che esso è necessariamente di costo minimo
    - Non è vero il viceversa
      Un itinerario di costo minimo potrebbe anche avere percentuale di scelta nulla



  - Il modello di scelta del percorso può essere una **mappa** e non una funzione
    - $\mathbf{w}^{\mathrm{i}} = [\mathbf{10},\; 12,\; \mathbf{10},\; 18]^{\mathrm{T}} \quad w_1^i = w_3^i = min_k\{w_k^i\}$
      $p_1^i + p_3^i = 1 \qquad p_1^i = ? \qquad p_3^i = ?$

Modelli di scelta del percorso

- Date le probabilità/percentuali di scelta del percorso, si calcolano i flussi
  - $\forall\, i, \quad \mathbf{h}^i = p^i\left(-\mathbf{w}^i\right) \cdot d^i$
    (modello di calcolo dei flussi di percorso)
    - $\mathbf{h}^{\mathrm{i}} = \left[h_1^i,\ h_2^i, \dots ,\ h_k^i, \dots ,\ h_{n_i}^i\right]^T$
      è il vettore dei flussi di percorso, $\forall k \in \mathrm{I}^{\mathrm{i}}$
    - d^i è il valore di domanda di spostamento per la i-esima categoria
- Il modello di calcolo dei flussi di percorso genera vettori ammissibili
  - Insieme di ammissibilità dei flussi di percorso
    $\forall\, i,\ S_h^i = \left\{\mathbf{h}_{\mathrm{i}}\colon \forall\, k \in I^{\mathrm{i}} \ \ h_{\mathrm{k}}^{\mathrm{i}} \geq 0,\ \sum_{\mathrm{k} \in \mathrm{I}^{\mathrm{i}}} h_{\mathrm{k}}^{\mathrm{i}} = d^{\mathrm{i}}\right\}$
  - Poiché $\ \forall\, k \in I^{\mathrm{i}} \ \ p_{\mathrm{k}}^{\mathrm{i}} \geq 0,\ \sum_{\mathrm{k} \in \mathrm{I}^{\mathrm{i}}} p_{\mathrm{k}}^{\mathrm{i}} = 1$
  - Dato un qualsiasi vettore $\mathbf{w}^i$ il vettore dei flussi di percorso generato è ammissibile

Modello Probit: definizione

- Permette di trattare matrici di dispersione (varianza-covarianza) qualsiasi (purché semi-definite positive)
- È basato sulla ipotesi che il residuo aleatorio sia distribuito secondo una variabile normale multivariata $\approx$ MVN(0, Σ_ε)
  - Di media nulla (per definizione) E[ε]=**0**
  - Di matrice di dispersione Σ_ε qualsiasi

$$f_\varepsilon(\varepsilon) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\sqrt{\|\Sigma_\varepsilon\|}} exp\left(-\frac{1}{2}\varepsilon^T\Sigma^{-1}\varepsilon\right)$$

- Non è nota una soluzione dell'integrale multiplo che serve per il calcolo della probabilità nel caso di normale multivariata

$$\forall\ j \quad p(j) = \int_{\varepsilon_j=-\infty}^{\infty} \cdots \int_{\varepsilon_1<\varepsilon_j+V_j-V_1} \cdots \int_{\varepsilon_n<\varepsilon_j+V_j-V_n} f(\boldsymbol{\varepsilon})\, d\varepsilon_1 \ldots d\varepsilon_j \ldots d\varepsilon_n$$

Modello Probit: risoluzione

- Il modello può essere risolto in via numerica
- Il metodo più utilizzato è il cosiddetto «algoritmo Montecarlo»
- Si suppone sia disponibile un «realizzatore» della variabile aleatoria normale multinomiale
  - Cioè uno strumento in grado di generare un campione di valore distribuiti come la variabile aleatoria considerata
  - R_ε: $\{R(1), R(2), \ldots, R(k), \ldots, R(m)\} \approx MVN(0, \Sigma_\varepsilon)$
- Si eseguono *m* realizzazioni di $\boldsymbol{\varepsilon}$ utilizzando R_ε
- A queste corrispondono *m* realizzazioni di **U** (le **V** sono note e fisse)
- Per ognuna di tali realizzazioni si verifica quale alternativa sia di massima utilità percepita realizzata
- Si indica con m_j il numero di volte in cui l'alternativa *j* sia quella di massina utilità percepita realizzata
- Si stima la probabilità di scelta

$$\hat{p}(j) = \frac{m_j}{m}, \qquad p(j) = \lim_{m \to \infty} \frac{m_j}{m}$$

Modelli di scelta del percorso

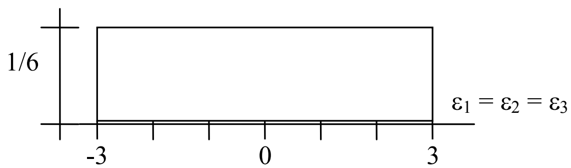
- Tecnica Montecarlo
  - Realizzatore ***r(***fε(ε)***)*** *(strumento numerico)*
  - Una generica realizzazione **ē** = ***r(***fε(ε)***)*** (è un vettore)

Iterazione	Utilità sistematica	Realizzazione ε	Realizzazione U
1	**V**	$\bar{\mathbf{e}}^1 = \boldsymbol{r}(f\varepsilon(\varepsilon))$	$\mathbf{U}^1 = \mathbf{V} + \bar{\mathbf{e}}^1$
2	**V**	$\bar{\mathbf{e}}^2 = \boldsymbol{r}(f\varepsilon(\varepsilon))$	$\mathbf{U}^2 = \mathbf{V} + \bar{\mathbf{e}}^2$
…	…	…	…
k	**V**	$\bar{\mathbf{e}}^k = \boldsymbol{r}(f\varepsilon(\varepsilon))$	$\mathbf{U}^k = \mathbf{V} + \bar{\mathbf{e}}^k$
…	…	…	…
m	**V**	$\bar{\mathbf{e}}^m = \boldsymbol{r}(f\varepsilon(\varepsilon))$	$\mathbf{U}^m = \mathbf{V} + \bar{\mathbf{e}}^m$

$\overline{p}(j/m) = {m_j}/{m}$ $\qquad p(j) = \lim_{m=\infty} \overline{p}(j/m)$

Modelli di scelta del percorso

- La tecnica Montecarlo non si applica solo a v.a. distribuite come MVN
  - Esempio di applicazione a v.a. uniformemente (ed indipendentemente) distribuite
    - $I=\{1,2,3\}$; $U_1 = V_1 + \varepsilon_1$; $U_2 = V_2 + \varepsilon_2$; $U_1 = V_3 + \varepsilon_3$
    - $V_1 = V_2 = V_3 = V = 10$

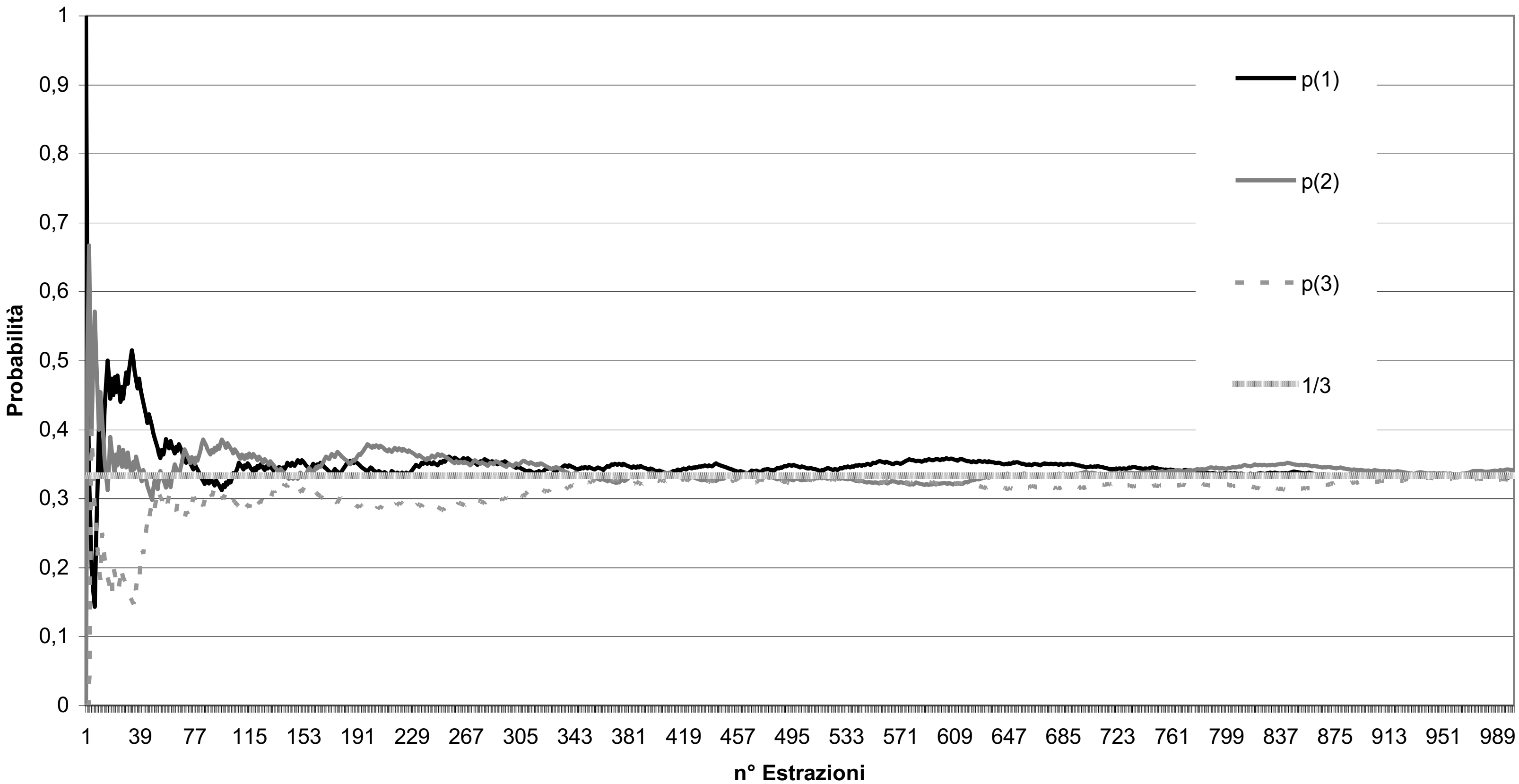


Modelli di scelta del percorso

	e_1	e_2	e_3	$\bar{U}_1 = V_1 + e_1$	$\bar{U}_2 = V_2 + e_2$	$\bar{U}_3 = V_3 + e_3$	Alternativa di max utilità percepita		
							1	2	3
1	1,453664071	-2,95915262	-2,56997594	11,45366407	7,040847374	7,430024054	1	0	0
2	-1,16213040	0,653916177	-2,62126375	8,837869599	10,65391618	7,378736242	0	1	0
3	-0,01470149	0,428013031	-1,21606269	9,985298505	10,42801303	8,78393731	0	1	0
4	0,884576588	1,454713955	2,013709432	10,88457659	11,45471395	12,01370943	0	0	1
5	0,694634459	-1,35613235	2,692081373	10,69463446	8,643867643	12,69208137	0	0	1
6	1,272981201	2,880458408	0,249990004	11,2729812	12,88045841	10,24999	0	1	0
7	-0,78366543	-0,00634500	-1,04632259	9,216334562	9,993654996	8,953677407	0	1	0
8	2,889696539	0,28390593	-0,49190430	12,88969654	10,28390593	9,508095696	1	0	0
9	0,9776669	-2,20307039	0,913627743	10,9776669	7,796929607	10,91362774	1	0	0
10	2,934589324	2,449505342	-2,14007368	12,93458932	12,44950534	7,859926314	1	0	0
11	-2,13028745	1,012681561	-1,18642387	7,869712541	11,01268156	8,813576124	0	1	0
12	1,714826334	1,556133029	2,050443947	11,71482633	11,55613303	12,05044395	0	0	1
13	0,577388145	-2,43068079	-2,44812285	10,57738815	7,569319205	7,551877145	1	0	0
14	1,79693639	-0,05759852	-0,40718243	11,79693639	9,942401472	9,592817561	1	0	0
15	2,980249118	2,605779668	2,63008423	12,98024912	12,60577967	12,63008423	1	0	0
Numero di volte in cui l'alternativa è di massima utilità percepita							7	5	3
Stima dei valori di probabilità							0,4667	0,3333	0,2000

Modelli di scelta del percorso

- Aumentando il numero di realizzazioni (15 sono poche, in teoria dovrebbero tendere ad ∞)… ci si stabilizza attorno al valore atteso



Modelli di scelta del percorso

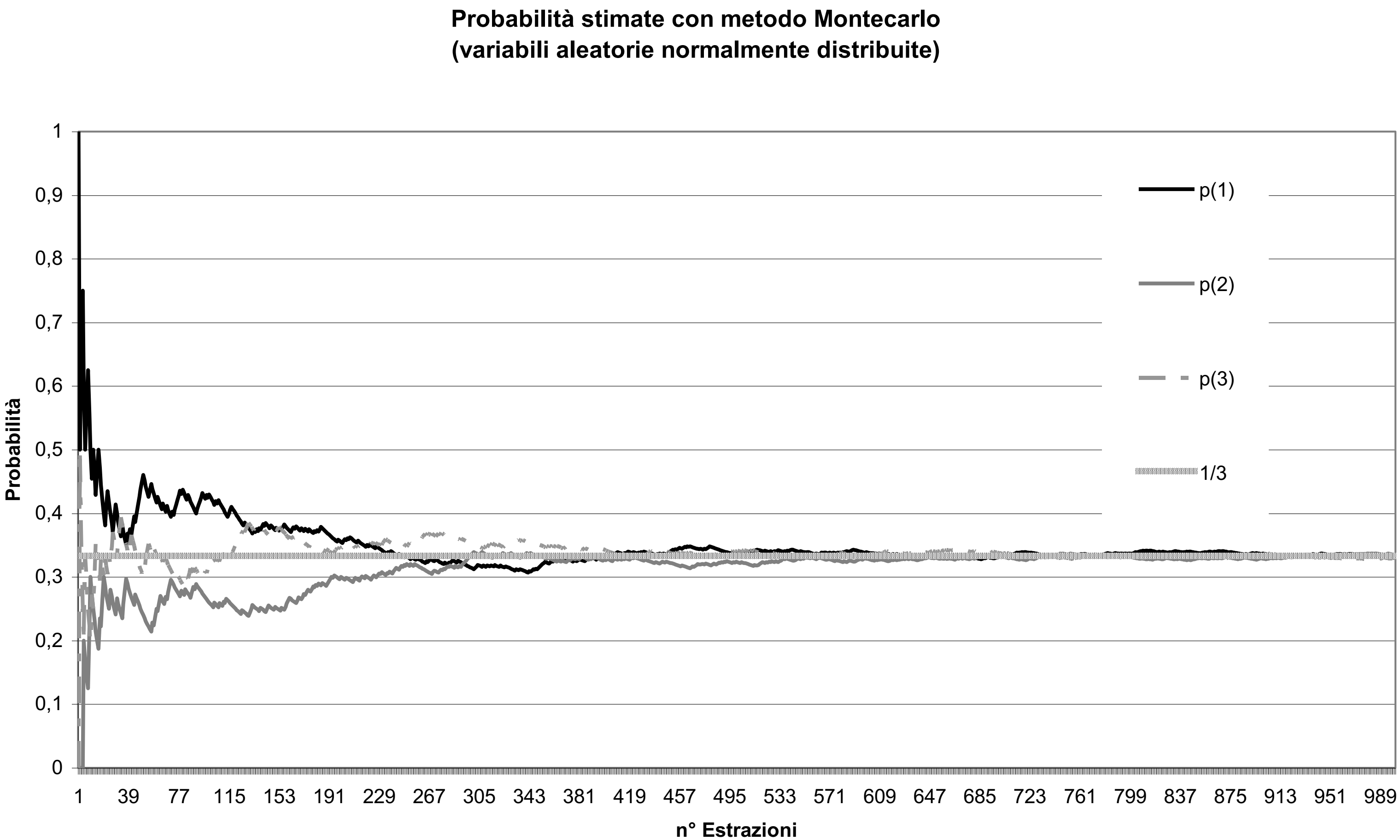
- Esempio di applicazione a v.a. MVN
  - Per <u>sola semplicità dell'esempio</u>, si ipotizzano componenti identicamente ed indipendentemente distribuite (la rappresentazione delle covarianze è, invece, essenziale per il Probit)
    - Come "realizzatore" si possono utilizzare funzioni di Excel
- *I={1,2,3}* ; $U_1 = V_1 + \varepsilon_1$; $U_2 = V_2 + \varepsilon_2$; $U_1 = V_3 + \varepsilon_3$
  - $V_1 = V_2 = V_3 = V = 10$
  - $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 \sim N(\mu=0, \sigma^2=16)$
- Ipotesi semplificativa: le utilità percepite hanno tutte la stessa media, sono tutte egualmente ed indipendentemente distribuite
  - Non vi è nessun motivo per cui le alternative non siano equiprobabili
    - Risultato atteso è: $p(1) = p(2) = p(3) = 1/3$

Modelli di scelta del percorso

	e_1	e_2	e_3	$\bar{U}_1 = V_1 + e_1$	$\bar{U}_2 = V_2 + e_2$	$\bar{U}_3 = V_3 + e_3$	Alternativa di max utilità percepita		
							1	2	3
1	5,9981	-0,4458	-4,2970	15,9981	9,5542	5,7030	1	0	0
2	-1,5207	-1,9307	-0,0215	8,4793	8,0693	9,9785	0	0	1
3	1,8181	-5,6632	-1,6652	11,8181	4,3368	8,3348	1	0	0
4	0,6196	-4,0154	-2,7471	10,6196	5,9846	7,2529	1	0	0
5	-2,0023	-1,5165	-5,1559	7,9977	8,4835	4,8441	0	1	0
6	0,7661	0,8718	7,0428	10,7661	10,8718	17,0428	0	0	1
7	3,0559	1,1664	-2,8191	13,0559	11,1664	7,1809	1	0	0
8	4,8150	-2,7989	-1,2162	14,8150	7,2011	8,7838	1	0	0
9	0,9062	2,7577	-1,7671	10,9062	12,7577	8,2329	0	1	0
10	0,2389	0,8386	-4,2293	10,2389	10,8386	5,7707	0	1	0
11	-6,7547	-0,5430	-0,4306	3,2453	9,4570	9,5694	0	0	1
12	3,0491	1,8313	2,6234	13,0491	11,8313	12,6234	1	0	0
13	-1,0915	2,1469	3,7586	8,9085	12,1469	13,7586	0	0	1
14	-2,1564	-0,2463	1,3970	7,8436	9,7537	11,3970	0	0	1
15	3,3906	0,5426	0,6223	13,3906	10,5426	10,6223	1	0	0
Numero di volte in cui l'alternativa è di massima utilità percepita							7	3	5
Stima dei valori di probabilità							0,4667	0,2000	0,3333

Modelli di scelta del percorso

- Incrementando il numero di realizzazioni aleatorie



Modelli di scelta del percorso

Matrice di dispersione non diagonale

- Matrice di dispersione Probit tipica per la scelta di percorso
  - **Σ:**
    $$\sigma_k^2 = \xi \, w_k$$
    $\sigma_{k,r} = \xi \, w_{k,r}$ (costo comune ai percorsi *k* ed *r*)

- Equivalente a:
$$\sigma_a^2 = \xi \, c_a$$
$$\sigma_{a,l} = 0$$

- L'algoritmo Montecarlo può essere applicato su rete