Brevi richiami sui numeri complessi. Testo adattato da una nota del Prof. Lorenzo Marrucci

Iniziamo da una introduzione generale sui numeri. Voi vi aspettate forse che i numeri complessi siano dei numeri "strani", mentre quelli che già conoscete sono "normali". Ma quali numeri sono veramente normali? I numeri più "intuitivi" sono quelli che servono a contare, ossia i cosiddetti *numeri naturali*: 1,2,3, ecc. L'insieme di questi numeri è indicato con $\mathbb{N}$. Tutti gli altri numeri che vengono introdotti in matematica sono in un certo senso "innaturali". L'esigenza di espandere l'insieme di numeri utilizzati nasce sempre dal tentativo di risolvere equazioni che altrimenti non hanno soluzione o, equivalentemente, di poter eseguire operazioni matematiche che altrimenti non sarebbero definite. Prendiamo ad esempio l'equazione: $x + 2 = 5$. Essa ha soluzione nell'insieme dei numeri naturali, e la soluzione è $x = 5-2 = 3$. Ma ora consideriamo l'equazione, molto simile alla precedente, $x + 5 = 2$. Essa non ammette soluzione in $\mathbb{N}$. Usando l'algebra in modo simile alla precedente equazione potremmo stabilire che la soluzione è $x = 2-5$, ma questa operazione di sottrazione non è consentita, finché si usano solo numeri naturali. Questa assenza di soluzioni può essere accettata con rassegnazione, ma si fa molta più strada se invece ci si "ribella" alla situazione e si sceglie di espandere l'insieme di numeri con cui si lavora per dare soluzione anche a queste equazioni insolubili. Si possono così introdurre i *numeri negativi*, e lo *zero*, che uniti ai numeri naturali formano un insieme che viene detto dei *numeri interi*, e che si indica con $\mathbb{Z}$. I numeri interi permettono di avere soluzione per tutte le equazioni della forma $x + a = b$. Il problema successivo si pone quando studiamo equazioni contenenti il prodotto, del tipo $ax = b$. Prendiamo ad esempio l'equazione $3x = 9$: la soluzione è $x = 9/3 = 3$. Ma l'equazione molto simile $2x = 9$ non ammette soluzione in $\mathbb{Z}$. E' per questo che sono introdotte le frazioni o i numeri decimali, tipo 9/2=4.5. I numeri descritti da frazioni o con i decimali formano un insieme (o "campo") detto dei *numeri razionali*, indicato con $\mathbb{Q}$. Essi permettono di avere soluzione a tutte le equazioni del tipo $ax = b$. Il passo successivo, l'introduzione dei *numeri irrazionali* (decimali con infinite cifre dopo la virgola) che insieme ai razionali costituisce l'insieme (campo) dei *numeri reali*, indicato con $\mathbb{R}$, è motivato dalla necessità di risolvere vari problemi algebrici e geometrici. Tra questi, la ricerca di soluzioni ad equazioni del tipo $x^2=2$, oppure il calcolo della lunghezza della circonferenza a partire da quella del raggio, della diagonale del quadrato a partire dal lato, e molti altri. I numeri irrazionali sono in effetti molto strani. Avendo infinite cifre dopo la virgola, è impossibile conoscerli, memorizzarli, o comunicarli ad un'altra persona con completa esattezza, a meno che essi non siano scrivibili come soluzioni di equazioni (tipo $\sqrt{2}$) oppure non abbiano un simbolo tutto per loro, come π o e. Chi fosse interessato ad approfondire questo argomento è indirizzato al capitolo 22 delle lezioni di fisica di Feynman.

E veniamo finalmente ai numeri complessi. Essi nascono dalla necessità di dare soluzione ad equazioni del tipo

$$x^2 + 1 = 0 \qquad \text{(A.1)}$$

che non ammette soluzione nel campo dei numeri reali. E' pertanto necessario espandere ulteriormente l'insieme di numeri, introducendo prima di tutto un numero speciale detto *unità immaginaria*, che d'ora innanzi verrà indicato con i, e che corrisponde *per definizione* proprio ad una soluzione della (45), ossia

$$\textit{unità immaginaria} \quad i^2 = -1 \qquad \text{(A.2)}$$

Esso ha pertanto la proprietà che $i^2 = -1$. Per tutte le altre operazioni, i si comporta come se fosse un simbolo algebrico, come una costante indeterminata a.

I cosiddetti *numeri immaginari* sono costruiti moltiplicando i per un qualsiasi numero reale, ossia hanno la forma $i\,x$, dove x è un numero reale. Ad esempio $3i$ è un numero immaginario, il cui quadrato è $(3i)^2 = 3^2 i^2 = -9$. Si vede facilmente che i numeri immaginari sono tutti e soli i numeri il cui quadrato è reale e negativo, per cui consentono di risolvere tutte le equazioni del tipo $x^2 + a = 0$ con $a > 0$, che altrimenti non avrebbero soluzione.

Ma che succede se sommiamo un numero reale ad un numero immaginario? Come si combinano i due numeri? La risposta è che non si combinano affatto, nel senso che il numero che otteniamo va considerato nuovo, né reale, né immaginario. Un numero del genere è detto *complesso*, e si può scrivere come segue:

numero complesso (rappresentazione cartesiana): $\quad z = x + i\,y \qquad$ (A.3)

dove x e y sono due numeri reali qualsiasi, detti rispettivamente *parte reale e immaginaria di z*, anche indicati con i simboli $x = \mathrm{Re}(z)$ e $y = \mathrm{Im}(z)$.

L'insieme dei numeri che si scrivono nella forma (A.3) costituisce il campo dei *numeri complessi*, che si indica con $\mathbb{C}$. Esso contiene come sottoinsieme i numeri reali (per i quali la parte immaginaria $y = 0$) e i numeri *immaginari puri* (per i quali la parte reale $x = 0$). L'aggettivo "puri" non sarebbe necessario, ma è usato per mettere in maggior risalto il fatto che la parte reale è nulla.

Arrivati a questo punto potremmo temere che il procedimento non avrà mai fine, perché se prendiamo due numeri complessi e li combiniamo tra loro con somme, differenze, prodotti, divisioni, quadrati, radici quadrate, elevamento a potenze più complicate, logaritmi, ecc., ci aspettiamo che almeno qualcuna di queste operazioni dia luogo a qualche cosa che non è contenuto in $\mathbb{C}$ e per cui dovremmo ancora espandere l'insieme dei numeri da usare. E invece non è così. Miracolosamente, tutte le operazioni elencate sopra producono altri numeri complessi, scrivibili sempre nella forma (A.3). Inoltre, si dimostra che qualsiasi equazione che si possa scrivere in forma algebrica (ossia polinomiale) ammette almeno una soluzione in $\mathbb{C}$.

Prima di esaminare le varie operazioni, introduciamo alcune definizioni fondamentali. Per prima cosa, notiamo che il numero immaginario $-i$ è anch'esso soluzione della (A.1) da cui siamo partiti per definire i. Perciò, avremmo potuto anche prendere $-i$ al posto di i nella costruzione dei numeri complessi. In altre parole, se scambiamo i con $-i$ otteniamo un altro possibile campo complesso, del tutto equivalente al primo. Tutte le sue proprietà dovrebbero rimanere inalterate. L'operazione di scambiare i con $-i$ è quindi una *operazione di simmetria* (ossia una trasformazione che lascia inalterato il sistema), che prende il nome di *coniugazione complessa*. Il cosiddetto *complesso coniugato* di un numero complesso z qualsiasi, dato dalla (A.3), si indica con un asterisco all'apice ed è dato da

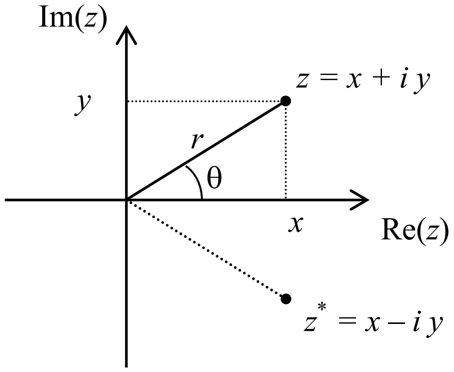
complesso coniugato di z=x+iy: $\quad z^* = x - i\,y \qquad$ (A.4)

(ottenuto cioè cambiando il segno davanti all'unità immaginaria).

Dalla definizione del complesso coniugato, otteniamo le seguenti espressioni utili per calcolare la parte reale e immaginaria di un numero:

$$\mathrm{Re}(z) = (z + z^*)/2$$
$$\mathrm{Im}(z) = (z - z^*)/2\mathrm{i} \qquad \text{(A.5)}$$

Un numero complesso z può essere rappresentato come un punto su un piano, il *piano complesso*, di coordinate cartesiane x=Re(z) e y=Im(z). Oltre alle coordinate cartesiane, il numero complesso può essere rappresentato dalle coordinate polari r e θ, come indicato in figura:



La coordinata polare r, ossia la distanza dall'origine, è detta *modulo* di z, ed è indicata con il simbolo $|z|$. Il modulo può essere calcolato in uno dei modi seguenti:

modulo di z=x+iy: $|z| = r = \sqrt{zz^*} = \sqrt{x^2 + y^2}$ (A.6)

L'angolo polare θ è invece detto anche *argomento* o *fase* di z, ed indicato con arg(z). Esso può essere determinato nel modo seguente:

argomento o fase di z=x+iy: $\arg z = \theta = \arctan y/x$ (A.7)[1]

Si noti che la funzione arg(z), come θ, è definita a meno dell'aggiunta di un qualsiasi multiplo di 2π (a meno di fissare una convenzione una volta per tutte, nota come "determinazione"). Le parti reale ed immaginaria di z (coordinate cartesiane x,y) possono essere determinate da modulo e argomento (coordinate polari r,θ) con le consuete relazioni trigonometriche

$x = r \cos\theta, \quad y = r \sin\theta$ (A.8)

le quali forniscono la seguente rappresentazione del numero complesso z in termini delle sue coordinate polari:

$z = r\,(\cos\theta + i \sin\theta)$ (A.9)

Una relazione di grande importanza è la seguente

formula di Eulero: $e^{i\alpha} = \cos\alpha + i \sin\alpha$ (A.10)

dove α è un qualsiasi numero reale. Per dimostrare la (A.10) è prima necessario definire l'esponenziale di un numero complesso. Questo può essere fatto ad esempio sulla base dello sviluppo in serie di Taylor, che può essere valutato anche con numeri complessi. Confrontando lo sviluppo di Taylor dell'esponenziale con quello di seno e coseno si verifica facilmente la validità della (A.10).

La (A.10) mostra che $e^{i\alpha}$ è un numero complesso di modulo unitario e argomento pari proprio ad α. Perciò, al variare di α, l'esponenziale $e^{i\alpha}$ descrive un cerchio di raggio unitario sul piano complesso. In particolare, $e^{\pm i\,\pi\backslash 2} = \pm i$ e $e^{i\pi} = -1$.

[1] Va detto che la funzione arcotangente (arctan) ricostruisce la fase a meno di un π. La fase completa θ può essere ottenuta sfruttando l'informazione sul segno di y o di x per individuare il quadrante cui θ appartiene. Se arctan è ad esempio calcolata nell'intervallo (−π/2, +π/2), allora θ = arctan(y/x) se $x > 0$ e θ = arctan(y/x) + π se $x < 0$. Se arctan è invece calcolata nell'intervallo (0, π), allora θ = arctan(y/x) se y > 0 e θ = arctan(y/x) + π se $y < 0$.

Combinando la (A.9) e la (A.10) si ottiene la seguente importante rappresentazione "esponenziale" di un qualsiasi numero complesso:

numero complesso (rappresentazione esponenziale): $z = r\, e^{i\theta}$ (A.11)

Abbiamo così terminato di introdurre le definizioni e le notazioni che ci serviranno. Consideriamo ora le varie operazioni tra numeri complessi. Come abbiamo detto, per operare con i numeri complessi si devono applicare le usuali regole algebriche trattando l'unità immaginaria come se fosse un simbolo indeterminato (tipo una costante a), il cui quadrato però può essere sempre sostituito da -1.

Iniziamo dalla somma e differenza tra due numeri complessi $z_1 = x_1 + i\, y_1$ e $z_2 = x_2 + i\, y_2$:

somma e differenza: $z_1 \pm z_2 = (x_1+iy_1) \pm (x_2+iy_2) = (x_1 \pm x_2) + i\,(y_1 \pm y_2)$ (A.12)

ossia la somma (differenza) tra numeri complessi si fa sommando (sottraendo) le parti reali e le parti immaginarie. Si noti che questo comportamento è analogo a quello dei vettori nel piano complesso xy.

La moltiplicazione si fa come segue:

moltiplicazione (coordinate cartesiane): $z_1\, z_2 = (x_1 + i\, y_1)(x_2 + i\, y_2) = x_1\, x_2 + i\, x_1\, y_2 + i\, x_2\, y_1 + i^2\, y_1\, y_2 = (x_1\, x_2 - y_1\, y_2) + i\,(x_1\, y_2 + x_2\, y_1)$ (A.13)

La moltiplicazione può essere svolta molto facilmente in notazione esponenziale, con le coordinate polari:

moltiplicazione (coordinate polari): $z_1 z_2 = (r_1 e^{i\theta_1})(r_2 e^{i\theta_2}) = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}$ (A.14)

Ed ecco la divisione in entrambe le coordinate.

divisione (coordinate cartesiane): $z_1/z_2 = (x_1+iy_1)/(x_2+iy_2) = (x_1x_2+y_1y_2)/(x_2^2+y_2^2) + i(x_2y_1-x_1y_2)/(x_2^2+y_2^2)$ (A.15)

divisione (coordinate polari): $z_1 / z_2 = \left(r_1 e^{i\theta_1}\right) / \left(r_2 e^{i\theta_2}\right) = \left(r_1 / r_2\right) e^{i(\theta_1-\theta_2)}$ (A.16)

A partire dalla formula di Eulero (A.10), sfruttando le proprietà generali degli esponenziali, possiamo calcolare facilmente l'esponenziale di un numero complesso qualsiasi:

esponenziale: $e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x \cos(y) + i\, e^x \sin(y)$ (A.17)

Dalla (A.11) è facile derivare la seguente formula per il logaritmo

logaritmo: $\log(z) = \log(|z|) + i \arg(z) = \log(r) + i\, \theta$ (A.18)

Questa formula mostra che il logaritmo è definito a meno di una costante additiva $2n\pi i$, a meno di non fissare una determinazione per $\arg(z)$. Questo fatto è analogo a quello che si fa quando si definisce l'operazione inversa di altre funzioni non monotone, come ad esempio l'arcoseno.

Sfruttando la (A.11) è anche possibile calcolare qualsiasi potenza con base ed esponente complessi:

potenza: $z_1^{z_2} = e^{\log\left(z_1^{z_2}\right)} = e^{z_2 \log z_1} = e^{(x_2+iy_2)(\log r_1 + i\theta_1)} = e^{(x_2 \log r_1 - y_2\theta_1)} e^{i(y_2 \log r_1 + x_2\theta_1)}$ (A.19) (da questa formula si vede che se la base ha una parte immaginaria, anche la potenza è una funzione non univoca, a meno di non fissare la determinazione sull'argomento).

Concludiamo questa appendice, mostrando come utilizzare gli esponenziali per calcolare le funzioni trigonometriche, a partire dalla formula di Eulero (A.10):

$$\sin(\alpha) = (e^{i\alpha} - e^{-i\alpha})/(2i)$$
$$\cos(\alpha) = (e^{i\alpha} + e^{-i\alpha})/2 \qquad \text{(A.20)}$$