

EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE (ODE): PROBLEMI AI VALORI INIZIALI

1

Equazioni differenziali

Modelli differenziali: le definizioni

Definizioni

Si dice **equazione differenziale** un'equazione che ha come incognita una funzione $y = f(x)$ e che stabilisce un legame tra x , y e almeno una delle sue derivate.

Il massimo ordine di derivate che compare nell'equazione rappresenta il suo **ordine**.

Quindi un'equazione differenziale si dice:

- del **primo ordine** se compare al massimo la derivata prima.

Ad esempio:

$$5y' - 3xy = x^3$$

- del **secondo ordine** se compare al massimo la derivata seconda.

Ad esempio:

$$y'' + 3xy - x^2 = y'$$



2

ESEMPIO

L'equazione differenziale

$$y' = 2x + 1$$

è del primo ordine.

L'integrale generale è dato dalle funzioni di equazione:

$$y = x^2 + x + c$$

Un integrale particolare, ad esempio la funzione soluzione che passa per l'origine, è quella che si ottiene per $c = 0$, cioè la funzione di equazione

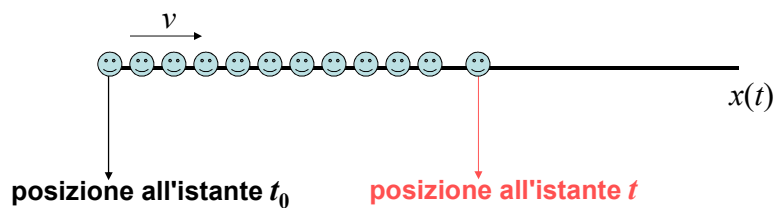
$$y = x^2 + x$$



Esempio 1 - Moto rettilineo uniforme

☺ = punto che si muove di moto rettilineo uniforme con velocità v

$x(t)$ = posizione del punto al generico istante t .



Come si determina la posizione all'istante t ?



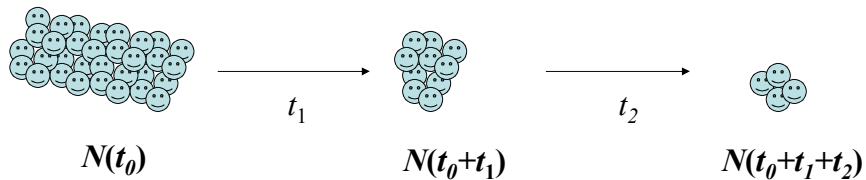
la posizione $x(t)$ soddisfa l'equazione

$$\frac{dx}{dt} = x'(t) = v$$

Esempio 2 - Decadimento radioattivo

$N(t_0)$ = numero di atomi dell'elemento radioattivo all'istante t_0

$N(t)$ diminuisce con velocità di decadimento proporzionale al numero di atomi



Qual è il numero di atomi all'istante $t=t_0+t_1+t_2$?

il numero di atomi $N(t)$ soddisfa l'equazione

$$\frac{dN}{dt} = N'(t) = -kN(t)$$

5

Esempio 1

$$x'(t) = v$$

Esempio 2

$$N'(t) = -kN(t)$$

In entrambi i casi si vuol risolvere un'equazione la cui incognita compare sotto il segno di DERIVAZIONE. Un'equazione con queste caratteristiche è detta

Equazione Differenziale Ordinaria (ODE).

6

Esempio 1	Esempio 2
$x'(t) = v$	$N'(t) = -kN(t)$
<p>In entrambi i casi si vuol risolvere un'equazione in cui compare la derivata della funzione incognita e l'incognita è funzione di una sola variabile. Un'equazione con queste caratteristiche è detta</p> <p style="font-size: 1.2em; color: blue;"><u>Equazione Differenziale</u> Ordinaria (ODE).</p>	

7

Esempio 1	Esempio 2
$x'(t) = v$	$N'(t) = -kN(t)$
<p>Nei due esempi, la derivata di ordine massimo è la DERIVATA PRIMA</p> <p style="text-align: center;">↓</p> <p style="font-size: 1.2em; color: blue;">Equazioni Differenziali Ordinarie (ODE) <u>del primo ordine</u></p> <p style="text-align: center;">inoltre</p> <p style="color: red;">la derivata prima è ESPLICITATA A SINISTRA</p> <p style="text-align: center;">↓</p> <p style="font-size: 1.2em; color: blue;">Equazioni Differenziali Ordinarie (ODE) del primo ordine <u>in forma esplicita.</u></p>	

8

Equazioni Differenziali Ordinarie (ODE) del primo ordine in forma esplicita

In generale

ODE DEL PRIMO ORDINE IN FORMA ESPLICITA

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad t \in I$$

I intervallo di \mathbb{R}

$f: I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funzione nota

$y: I \rightarrow \mathbb{R}$ incognita, derivabile in I

- ◆ *ode del primo ordine*: la derivata di ordine massimo della funzione incognita è la derivata prima
- ◆ *ode in forma esplicita*: esplicitata rispetto alla derivata di ordine massimo della funzione incognita

9

Soluzioni di una ODE

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad t \in I$$

$$I = [t_0, T]$$

$$I = [t_0, +\infty)$$

integrando ambo i
membri tra t_0 e t



$$y(t) - y(t_0) = \int_{t_0}^t y'(\tau) d\tau = \int_{t_0}^t f(\tau, y(\tau)) d\tau, \quad t \in I$$



per l'arbitrarietà del
punto $(t_0, y(t_0))$

$$y(t) = \int_{t_0}^t f(\tau, y(\tau)) d\tau + c, \quad t \in I$$

costante arbitraria



l'equazione ammette una
famiglia di soluzioni (o integrali)

Esempio 1 - Moto rettilineo uniforme (continuazione)

La traiettoria del moto soddisfa $x'(t) = v$



generica soluzione:

$$x'(t) = v$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = v$$

$$dx(t) = v dt$$

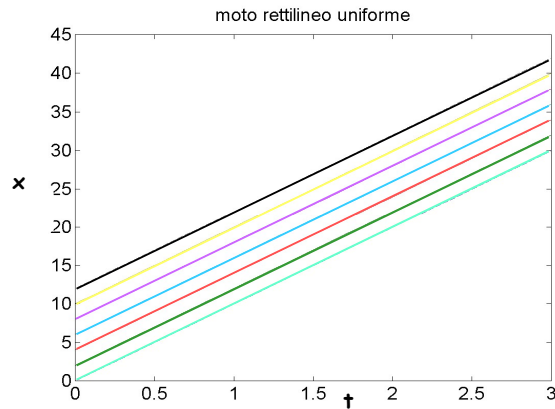
$$\int_{t_0}^t dx(t) = \int_{t_0}^t v dt$$

$$x|_{t_0}^t = v * t|_{t_0}^t$$

$$x(t) - x(t_0) = v * (t - t_0)$$

$$x(t) = v * (t - t_0) + x(t_0)$$

$$\text{con } t_0 = 0 \Rightarrow x(t) = v * t + x(t_0)$$



Esempio 1 - Moto rettilineo uniforme (continuazione)

La posizione del punto all'istante t dipende dalla posizione ad un istante iniziale t_0 :

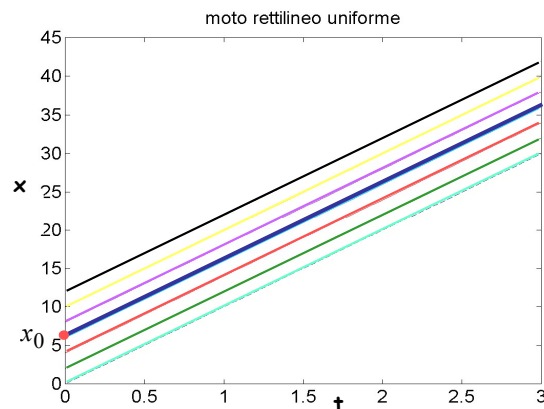
$$x(t_0) = x_0, \quad t_0 = 0$$



$$x(t) = vt + x_0$$

se $x_0 = 5$

**UNICA
SOLUZIONE !**



Esempio 2 - Decadimento radioattivo (continuazione)

Il numero di atomi soddisfa l'equazione $N'(t) = -kN(t)$

$$N'(t) = -kN(t)$$

$$\frac{dN(t)}{dt} = -kN(t) \quad \frac{dN(t)}{N(t)} = -k * dt$$

$$\text{se } N_0 = 2$$

**UNICA
SOLUZIONE !**

$$\int_{t_0}^t \frac{dN(t)}{N(t)} = -k \int_{t_0}^t dt$$

$$\log(N(t)) \Big|_{t_0}^t = -k * t \Big|_{t_0}^t$$

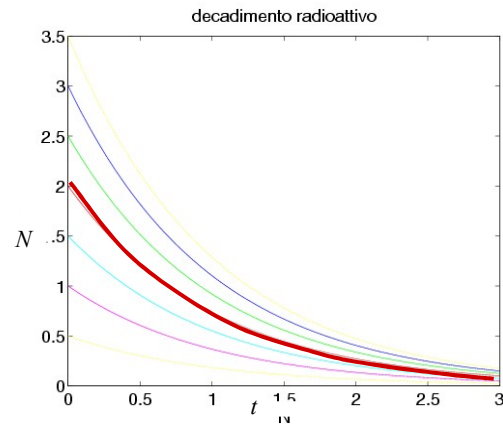
$$\log(N(t)) - \log(N(t_0)) = -k * (t - t_0)$$

$$\log\left(\frac{N(t)}{N(t_0)}\right) = -k * (t - t_0)$$

$$\frac{N(t)}{N(t_0)} = e^{-k*(t-t_0)}$$

$$N(t) = N(t_0) * e^{-k*(t-t_0)}$$

$$\text{con } t_0 = 0 \Rightarrow N(t) = N(t_0) * e^{-k*t}$$



Negli esempi precedenti

$$\left\{ \begin{array}{ll} y'(t) = f(t, y(t)) & \text{ODE} \\ y(t_0) = y_0 & \text{condizione iniziale} \end{array} \right.$$



una ed una sola soluzione

Problema di Cauchy o ai valori iniziali

problema

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), & t \in I \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \leftarrow \text{condizione iniziale}$$

dati

$$\begin{aligned} (t_0, y_0) &\in \mathbb{R}^2 \\ f(t, y) &: I \times J \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \end{aligned}$$

soluzione

$$\begin{aligned} &y : I \longrightarrow \mathbb{R} \text{ tale che} \\ &\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), & t \in I \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \end{aligned}$$

Equazioni differenziali alle variabili separabili

Equazioni a variabili separabili

Un'equazione differenziale del primo ordine è detta a variabili separabili se si può scrivere nella forma:

$$y' = g(x) \cdot h(y).$$

Diamo la procedura di risoluzione:

1. posto $h(y) \neq 0$, si scrive l'equazione in modo da separare le variabili:

$$\frac{dy}{dx} = g(x) \cdot h(y) \rightarrow \frac{dy}{h(y)} = g(x) dx$$

2. si integrano entrambi i membri dell'equazione ottenuta

$$\int \frac{dy}{h(y)} = \int g(x) dx$$

3. si verifica se la condizione $h(y) = 0$ porta ad individuare altre soluzioni dell'equazione
4. si scrive l'integrale generale dell'equazione considerando anche gli eventuali integrali ottenuti al punto 3.

**ESEMPIO**

Risolviamo l'equazione

$$y' = y^2 \cdot x$$

1. Possiamo scrivere l'equazione nella forma:

$$\frac{dy}{dx} = y^2 \cdot x$$

e separare le variabili, supponendo $y \neq 0$:

$$\frac{dy}{y^2} = x dx$$

2. Integriamo entrambi i membri:

$$\int \frac{dy}{y^2} = \int x dx$$

cioè

$$-\frac{1}{y} = \frac{x^2}{2} + c \rightarrow y = -\frac{2}{x^2 + 2c}$$



ESEMPIO

Risolviamo l'equazione

$$y' = -xe^y$$

1. Possiamo scrivere l'equazione nella forma:

$$\frac{dy}{dx} = -xe^y$$

e separare le variabili, supponendo $y \neq 0$:

$$\frac{dy}{e^y} = -x dx$$

2. Integriamo entrambi i membri:

$$\int \frac{dy}{e^y} = - \int x dx$$

$$\int e^{-y} dy = - \int x dx$$

$$-e^{-y} = -\frac{x^2}{2} + c$$

$$e^{-y} = \frac{x^2}{2} + c$$

$$-y = \log\left(\frac{x^2}{2} + c\right) \text{ e quindi } y = -\log\left(\frac{x^2}{2} + c\right)$$

9

ESEMPIO

Risolviamo l'equazione

$$y' - x = \text{sen}x$$

1. Possiamo scrivere l'equazione nella forma:

$$\frac{dy}{dx} - x = \text{sen}x$$

e separare le variabili, supponendo $y \neq 0$:

$$dy = (\text{sen}x + x) dx$$

2. Integriamo entrambi i membri:

$$\int dy = \int (\text{sen}x + x) dx$$

$$y = \text{cos}x + \frac{x^2}{2} + c$$

Con CONDIZIONE INIZIALE

$$y(x_0 = 0) = 2 \text{ abbiamo } 2 = 1 + 0 + c \text{ e quindi } c = 1$$



20