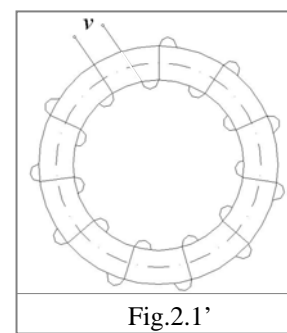
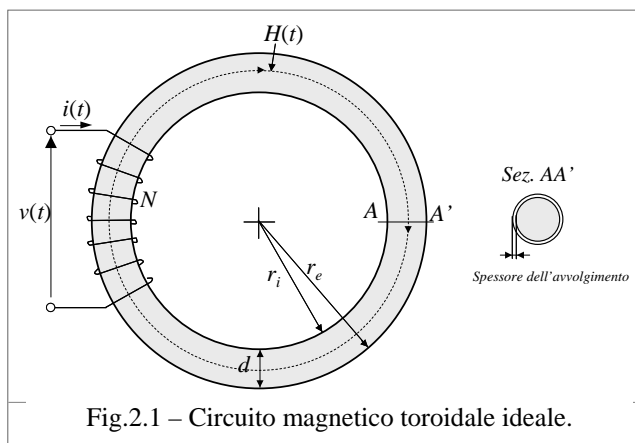


CAPITOLO 2. ELEMENTI DI CIRCUITI MAGNETICI

2.1 – Circuito magnetico ideale

Consideriamo un avvolgimento con N spire di conduttore in serie avvolto intorno ad un nucleo toroidale di materiale magnetico avente sezione circolare (cfr. fig.2.1). Supponiamo di alimentare l'avvolgimento con una tensione $v(t)$ e che la corrente assorbita sia $i(t)$, con i versi in figura. Consideriamo le seguenti ipotesi semplificative:

- le N spire sono avvolte uniformemente intorno al nucleo (cfr. fig.2.1'; per chiarezza di disegno in fig.2 le spire si trovano solo su una parte del nucleo stesso), hanno spessore infinitesimo e giacciono su piani passanti per l'asse del toro;
- le perdite per isteresi e per correnti parassite nel nucleo sono nulle, qualunque sia la condizione di funzionamento;
- il campo magnetico prodotto dalla corrente $i(t)$ è presente solo nel nucleo magnetico, cioè nessuna linea di forza si sviluppa al di fuori del nucleo toroidale; di conseguenza il nucleo toroidale può ritenersi un tubo di flusso; per simmetria le linee di forza del campo magnetico (\mathbf{B} oppure \mathbf{H}) sono delle circonferenze concentriche, come schematicamente rappresentato in figura;
- il diametro $d = r_e - r_i$ della sezione trasversale del toro è sufficientemente piccolo da poter considerare tutte le linee di forza della stessa lunghezza, pari alla lunghezza media: $l_m = 2\pi r_m = \pi(r_i + r_e)$.



Il flusso magnetico $\Phi(t)$ che attraversa una generica sezione S trasversale ortogonale del tipo AA' in fig.2.1 è lo stesso in ciascuna sezione (perché il nucleo è un tubo di flusso) e, essendo piccolo d , si può ritenere l'induzione \mathbf{B} uniformemente distribuita lungo una generica sezione.

Dalla relazione: $\Phi = \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$, si ha:

$$\Phi = \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S B dS = BS \quad (2.1)$$

Infatti, siccome B e dS sono paralleli (dato l'andamento delle linee di forza), il prodotto scalare diviene un prodotto normale e, considerando che B è uniforme in una generica sezione

trasversale S (di area $\pi d^2/4$) si ha che il flusso è il prodotto di B per la sezione S . Dalla (2.1) si ricava facilmente che:

$$B = \Phi / S \quad (2.2)$$

Siccome, inoltre, il nucleo è a sezione costante, si ha che in tutti i punti del nucleo l'induzione ha lo stesso valore B . Conoscendo la caratteristica di media magnetizzazione (cfr. cap. precedente) si può ricavare il valore di H , il quale, quindi, risulta anch'esso costante in ogni punto. Per conoscere il valore di H in relazione alle alimentazioni, si può applicare la legge della circuitazione di Ampère:

$$\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = Ni ,$$

con l generica linea chiusa, e Ni forza magneto-motrice concatenata dalla linea l considerata. Se si fa riferimento ad una linea di forza l_m (del tipo circolare tratteggiata in fig.2.1), si ha:

$$\oint_{l_m} H dl = Ni \text{ e, se si considera che } H \text{ è costante in tutti i punti, si ha:}$$

$$H = \frac{Ni}{l_m} . \quad (2.3)$$

Se μ è la permeabilità magnetica del materiale considerato in corrispondenza del valore H del campo, si ha:

$$B = \mu H = \mu \frac{Ni}{l_m} . \quad (2.4)$$

Definendo il coefficiente di autoinduzione (o induttanza) come: $L = \frac{N\Phi}{i}$, cioè il rapporto tra il flusso concatenato con l'avvolgimento di N spire e la corrente che lo sostiene, dalle (2.2) e (2.4) si ha:

$$L = \frac{N\Phi}{i} = \frac{NBS}{i} = \frac{N^2 i \mu S}{i l_m} = \frac{N^2}{\mathfrak{R}} \quad (2.5)$$

con $\mathfrak{R} = \frac{l_m}{\mu S}$ riluttanza del circuito considerato.

Mentre spazialmente si ha che i valori di B (e di H) sono tutti uguali in un dato istante di tempo t , si ha invece che B varia temporalmente da istante ad istante al variare della corrente $i(t)$ di alimentazione e, quindi anche la permeabilità μ e la riluttanza \mathfrak{R} sono variabili nel tempo. Di conseguenza, anche l'induttanza L risulterà una funzione del tempo $L(t)$.

Applicando la 2ª legge di Kirchhoff (equazione di equilibrio elettrico) al circuito elettrico in fig.2.1, si può scrivere:

$$v(t) + e(t) = Ri(t) \quad (2.6)$$

dove $v(t)$ è la tensione applicata, R è la resistenza del circuito, $i(t)$ è la corrente che si determina nel circuito ed $e(t)$ è la tensione indotta complessivamente nel circuito, pari a:

$$e(t) = -N \frac{d\Phi}{dt} \quad [\text{legge dell'induzione o di Faraday-Neumann}] \quad (2.7)$$

La (2.7) tiene conto del fatto che l'avvolgimento ha N spire in serie e che ciascuna spira concatena lo stesso flusso Φ .

Sviluppando la (2.5) si ha, quindi:

$$v(t) = R i(t) + \frac{N d\Phi}{dt} = R i(t) + \frac{d[L(t)i(t)]}{dt} \quad (2.8)$$

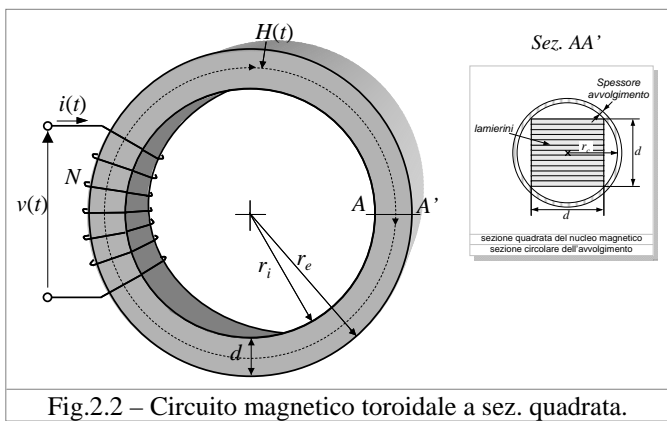
La (2.8) è un'equazione differenziale del primo ordine in $i(t)$ a coefficienti non costanti. Se l'induttanza L è indipendente dal tempo, cosa che si verifica se si assume la curva di magnetizzazione lineare (ULTERIORE IPOTESI DA AGGIUNGERSI ALLE PRECEDENTI ALL'INIZIO DEL PARAGRAFO), cioè permeabilità costante, la (2.8) diviene:

$$v(t) = R i(t) + L \frac{di(t)}{dt} \quad (2.9)$$

La (2.9) è un'equazione differenziale del primo ordine in $i(t)$ a coefficienti costanti.

2.2 – Altri esempi di circuiti magnetici semplici

In fig. 2.2 è rappresentato un circuito toroidale a sezione del nucleo quadrata. Tale tipo di nucleo è più facilmente ottenibile rispetto a quello di fig.2.1 se si impiegano lamierini. Infatti, nel circuito di fig.2.2. si utilizzano lamierini a forma di corona circolare, tutti uguali e sovrapposti in numero tale da avere una profondità 'd' pari alla larghezza $d=r_e-r_i$ della corona circolare. Il toro di fig.2.1, invece, è ottenibile semplicemente solo se utilizza materiale magnetico massiccio; volendo utilizzare dei lamierini sovrapposti, tali lamierini dovrebbero essere tutti di larghezza diversa, al fine di ottenere una sezione trasversale pseudocircolare.



Con il toro di fig.2.2, l'avvolgimento a sezione circolare di raggio r_c è circoscritto al nucleo e vi sono degli spazi interni all'avvolgimento non occupati da materiale magnetico. L'ipotesi di ritenere che il campo magnetico prodotto dalla corrente $i(t)$ sia presente solo nel nucleo ferromagnetico è meno 'vera' del caso precedente, in quanto vi saranno delle linee di forza che interesseranno proprio lo spazio non occupato dalla sezione quadrata dei lamierini magnetici sovrapposti.

Un altro circuito magnetico di forma semplice che verrà utilizzato nel seguito è riportato in fig.2.3. E' disegnata la linea di forza media di lunghezza l_m , in maniera analoga al circuito toroidale. A livello di ipotesi semplificative, non è assicurata la costanza della sezione del circuito magnetico, pur se la sezione di *colonna* (DD' in figura) è uguale a quella di *giogo* AA'. La colonna è la parte del circuito magnetico su cui è presente l'avvolgimento; giogo è invece la parte di circuito magnetico priva di avvolgimento, ma utile soltanto alla richiusura delle linee di flusso. Nelle zone di transizione tra colonna e giogo la sezione di ferro è maggiore di quella di colonna o giogo.

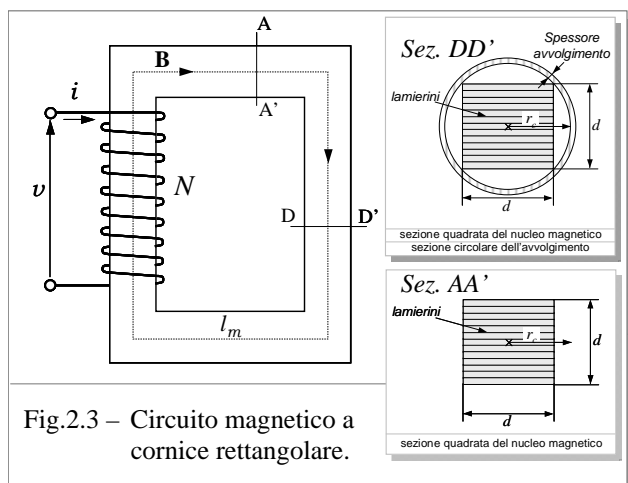


Fig.2.3 – Circuito magnetico a cornice rettangolare.

Se si assume che tale diversità di sezione ha un peso modesto sull'andamento del campo magnetico e si ritiene, quindi, che l'induzione B sia uniforme nel nucleo, continuano a valere le relazioni scritte al §.2.1. Anche la situazione dell'avvolgimento, circoscritto alla colonna a sezione quadrata, è del tutto analoga a quella descritta per il circuito di fig. 2.2.

Il nucleo a cornice di fig.2.3 presenta il vantaggio di poter essere ottenuto attraverso la combinazione di due parti, ad esempio di tipo a “doppio C” o di tipo “U+I” rappresentati in fig.2.4. In tale modo è possibile realizzare la (o le) bobina dell'avvolgimento separatamente dalla costruzione del nucleo (avvolgimento “precostituito”), per poi infilarla sulla colonna, con notevole risparmio di tempo di realizzazione rispetto al nucleo toroidale, per il quale l'avvolgimento deve essere realizzato sul nucleo stesso. Un altro vantaggio è rappresentato dal fatto che nuclei a base piana si mantengono più facilmente sulle superfici di appoggio.

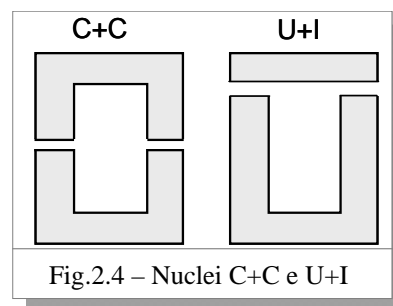


Fig.2.4 – Nuclei C+C e U+I

Nel caso, poi, molto frequente di impiego di materiali magnetici a cristalli orientati (trasformatori di media-grande potenza, $P > 5$ kVA), il nucleo toroidale a più lamierini sovrapposti non può essere usato, in quanto la linea di forza del campo magnetico sarebbe

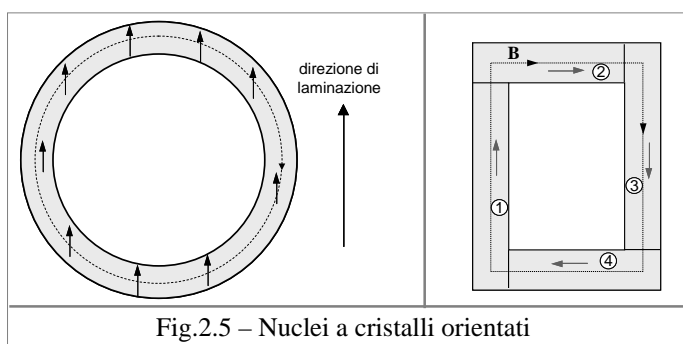


Fig.2.5 – Nuclei a cristalli orientati

diretta prevalentemente in direzione non concorde con il senso di laminazione e, quindi, la permeabilità media sarebbe bassa, probabilmente più bassa di quella dei materiali isotropi a cristalli non orientati (cfr. fig.2.5 a sinistra). Il nucleo a cornice,

invece, può essere realizzato in più pezzi: due colonne (pezzi 1 e 3 in figura 2.5 a destra) e due gioghi (pezzi 2 e 4), montati in maniera da assecondare sempre la direzione di laminazione, che è indicato con frecce di color grigio su ciascuno dei lamierini. Solo in corrispondenza delle giunzioni colonna-giogo si ha che le linee di forza di discostano dalla direzione di laminazione. Un inconveniente dei nuclei del tipo a cornice con materiali a grani orientati è dovuto al fatto che nelle giunzioni si determineranno dei “traferri” indesiderati, perché la linea di forza non giace sempre su un lamierino, come nel caso dei nuclei toroidali, ma deve passare da colonna a giogo e viceversa. Opportuni accorgimenti costruttivi limitano fortemente tali traferri, che farebbero aumentare molto la riluttanza del circuito, ma non li riescono ad eliminare del tutto.

Vi è, infine, da osservare che i nuclei semplici di tipo C+C o U+I di fig.2.4 non possono essere realizzati a cristalli orientati, ma sono costruiti con materiali magneticamente isotropi.

Con riferimento ancora ai nuclei toroidali, i materiali a cristalli orientati possono essere utilizzati se il nucleo si ottiene avvolgendo il nastro di lamiera magnetica “a spirale” a partire dal diametro interno del toro stesso.

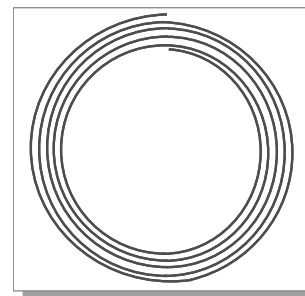


Fig.2.6 – Schematizzazione di nucleo toroidale con nastro magnetico avvolto a spirale.

2.3 – Circuiti magnetici a sezione variabile

In generale, i circuiti magnetici delle macchine elettriche sono a sezione trasversale variabile; essi, però, possono essere suddivisi in ‘tronchi’ a sezione costante, in ciascuno dei quali, in un fissato istante di tempo, l’induzione \mathbf{B} ed il campo magnetico \mathbf{H} possono ritenersi di ampiezza costante. In tal caso, la legge della circuitazione di Ampère (2.3) può scriversi come:

$$\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \sum_{k=1}^n H_k l_k = Ni \quad (2.10)$$

in cui l è una linea di forza, n è il numero di tronchi in cui è possibile suddividere il circuito in

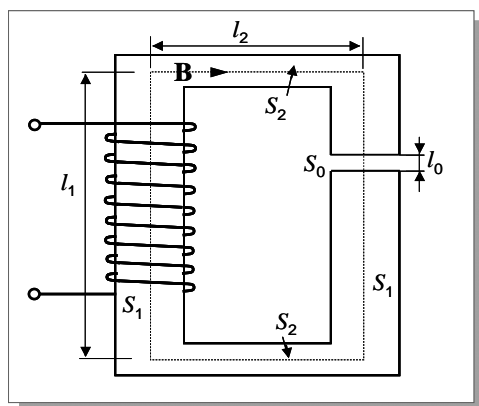


Fig.2.7– Circuito magnetico diviso in tronchi

oggetto, H_k e l_k sono rispettivamente l’ampiezza del campo magnetico e la lunghezza del tronco k -esimo, Ni è la f.m.m. concatenata dall’avvolgimento. In particolare, con riferimento alla fig.2.7, si ha:

$$\sum_{k=1}^n H_k l_k = 2H_1 l_1 + 2H_2 l_2 + H_0 l_0 = Ni \quad (2.11)$$

se si assume $l_0 \ll l_1$.

Assumendo, inoltre, che il circuito magnetico in fig.2.7 sia un “tubo di flusso” e che l’induzione è uniformemente distribuita in ciascuna sezione del circuito, dalla 2.11 si ha:

$$2 \frac{B_1 l_1}{\mu_1} + 2 \frac{B_2 l_2}{\mu_2} + \frac{B_0 l_0}{\mu_0} = 2 \frac{\Phi l_1}{\mu_1 S_1} + 2 \frac{\Phi l_2}{\mu_2 S_2} + \frac{\Phi l_0}{\mu_0 S_0} = N i \quad (2.12)$$

dalla quale si ottiene:

$$N i = (2 \mathfrak{R}_c + 2 \mathfrak{R}_g + \mathfrak{R}_0) \Phi = \mathfrak{R}_{tot} \Phi \quad (2.13)$$

in cui \mathfrak{R}_c , \mathfrak{R}_g e \mathfrak{R}_0 rappresentano la riluttanza della colonna, del giogo e del tratto di aria rispettivamente, e \mathfrak{R}_{tot} è la riluttanza complessiva del circuito magnetico

La “caratteristica magnetica del circuito”, cioè il diagramma del flusso Φ (o dell’induzione B) in funzione della f.m.m. di eccitazione $N i$ (o del campo $H = N i / l_m$), può essere determinata se sono note le dimensioni geometriche del nucleo ($l_0, l_1, l_2, S_0, S_1, S_2$) e la caratteristica magnetica del materiale magnetico utilizzato (curva $B-H$).

Per ciascun valore dell’induzione di colonna B_1 , si determina l’induzione di giogo $B_2 = B_1 S_1 / S_2$ e quella nel traferro $B_0 = B_1 S_1 / S_0$ (sfruttando l’ipotesi di tubo di flusso); da questi 3 valori di induzione si può risalire al valore del campo magnetico (o della permeabilità) nei diversi tronchi:

$$H_1 = f(B_1) ; \quad H_2 = f(B_2) ; \quad H_0 = B_0 / \mu_0$$

utilizzando la caratteristica magnetica $B-H$ del materiale per determinare i valori H_1 e H_2 nei tronchi in ferro e la permeabilità dell’aria per il traferro.

Grazie alla 2.11 (o alla 2.12) si può quindi determinare il valore $N i$ di f.m.m. cercato.

La *caratteristica magnetica del circuito* (fig.2.8) risulta ovviamente diversa dalla *caratteristica magnetica del materiale* (fig. 1.23); grazie alla presenza del tratto di aria, la caratteristica del circuito è più lineare, ma meno pendente di quella del solo materiale per valori bassi di $N i$; al crescere della f.m.m. di eccitazione $N i$, la caratteristica comincia a piegare (per valori maggiori di $N i_1$ in fig.2.8) fino ad arrivare in condizioni di saturazione (per valori maggiori di $N i_2$).

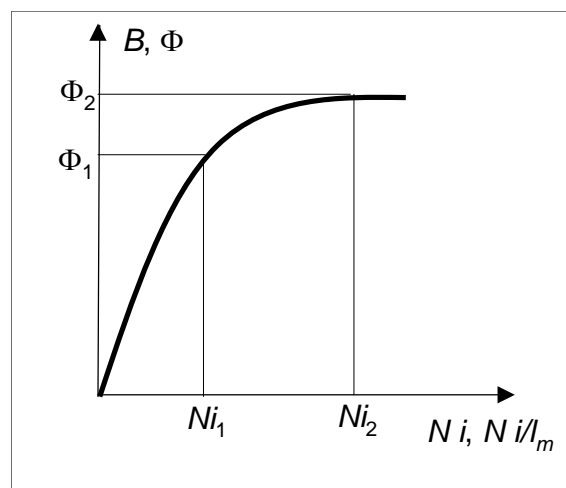


Fig.2.8– Caratteristica magnetica del circuito