

Circuiti LC e RLC in assenza di generatore - risoluzione con numeri complessi

L'obiettivo di queste note è quello di mostrare in maniera completa come può essere determinata la corrente che circola in due circuiti (LC e RLC), risolvendo le equazioni differenziali a questi associate attraverso l'uso degli esponenziali complessi. Invito voi studenti a segnalarmi eventuali errori o passaggi poco chiari.

CIRCUITO LC – OSCILLAZIONI ARMONICHE

Consideriamo il circuito mostrato in Figura 1, nel quale un condensatore di capacità C con carica iniziale q_0 viene collegato in serie ad un induttore di induttanza L . All'istante di tempo $t = 0$ l'interruttore viene chiuso ed inizierà a circolare una corrente elettrica. Il nostro scopo è quello di determinare l'espressione della carica del condensatore $q(t)$, assumendo che al tempo $t = 0$ la carica sia quella iniziale q_0 e la corrente sia nulla (condizioni iniziali). Fissiamo il verso della corrente ed il segno delle cariche sul condensatore come mostrato in figura.

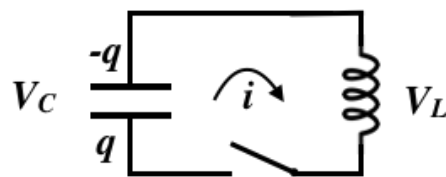


Figura 1

La seconda legge di Kirchhoff ci dice che la somma delle cadute di potenziale ai capi degli elementi della maglia sia nulla, ossia $V_L + V_C = 0$. Ricordiamo che queste differenze di potenziale sono calcolate come differenza tra il "punto" in cui si entra nell'elemento e quello in cui si esce, dato il verso di percorrenza fissato all'inizio. Noi percorriamo la maglia nello stesso verso della corrente; fissata questa convenzione, abbiamo che $V_C = q/C$ e $V_L = L di/dt$, ed otteniamo quindi la seguente equazione:

$$L \frac{di}{dt} + \frac{q}{C} = 0 \quad (1)$$

Usando il fatto che $i = dq/dt$, l'Eq. (1) diventa:

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{LC} = 0 \quad (2)$$

L'espressione finale di $q(t)$ sarà data dalla soluzione dell'equazione differenziale (2), utilizzando le due condizioni iniziali:

$$\begin{cases} q(0) = q_0; \\ i(0) = \frac{dq}{dt}(t=0) = 0; \end{cases} \quad (3)$$

Il metodo degli esponenziali complessi consente di risolvere facilmente equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti come la (2). L'applicazione di tale metodo consiste nel definire la seguente soluzione di prova:

$$\tilde{q}(t) = A e^{\alpha t} \quad (4)$$

Dove A e α sono due numeri complessi. Usiamo il simbolo $\sim$ (tilde) per riferirci a carica e corrente complesse. Per prima cosa, inseriamo l'espressione (4) all'interno dell'equazione (2), ottenendo un'equazione algebrica di secondo grado con incognita α :

$$\alpha^2 + \omega^2 = 0 \quad (5)$$

dove abbiamo definito la grandezza $\omega = 1/\sqrt{LC}$, che corrisponde alla pulsazione propria del circuito. Risolvendo la (5), vediamo che $\alpha_{\pm} = \pm j \omega$. Abbiamo quindi due possibili valori di α , dati da numeri complessi $\alpha_{\pm}$ puramente immaginari. Le due soluzioni associate $e^{\alpha_{\pm} t}$ rappresentano degli esponenziali complessi indipendenti, oscillanti con frequenza angolare opposta $\pm \omega$. La soluzione generale sarà data quindi da una combinazione lineare delle due soluzioni:

$$\tilde{q}(t) = A_+ e^{j\omega t} + A_- e^{-j\omega t} \quad (6)$$

I coefficienti A_+ e A_- sono numeri complessi, e vanno determinati a partire dalle condizioni iniziali (3). Ricordiamo che le condizioni iniziali fanno riferimento alle grandezze fisiche, quindi alla parte reale della carica $\tilde{q}(t)$ e della corrente $\tilde{i}(t) = d\tilde{q}/dt$. Al tempo $t = 0$ abbiamo che:

$$\begin{cases} \tilde{q}(0) = A_+ + A_- \\ \tilde{i}(0) = j \omega (A_+ - A_-) \end{cases} \quad (7)$$

Prendendo la parte reale di entrambe le quantità, possiamo utilizzare le condizioni iniziali ottenendo:

$$\begin{cases} q(0) = A'_+ + A'_- = q_0 \\ i(0) = \omega (A''_- - A''_+) = 0 \end{cases} \quad (8)$$

Dove abbiamo indicato con un apostrofo (') la parte reale di ciascun numero, e con due apostrofi (') la sua parte immaginaria. Potete notare subito che abbiamo un sistema di due equazioni in quattro incognite, e da questo capiamo che due di queste sono sovrabbondanti e possono essere poste a zero. Scegliamo quindi di "eliminare" interamente il coefficiente A_- , e dall'equazione (8) otteniamo:

$$\begin{cases} A'_+ = q_0 \\ A''_+ = 0 \end{cases} \quad (9)$$

Alla fine di questo apparentemente lungo percorso abbiamo determinato l'espressione della carica in funzione del tempo:

$$q(t) = q_0 \cos \omega t \quad (10)$$

In figura 2 mostriamo un esempio esplicito, che fa riferimento ad un circuito LC con $L = 1$ mH, $C = 10$ μ F, e con carica iniziale $q_0 = 1$ C.

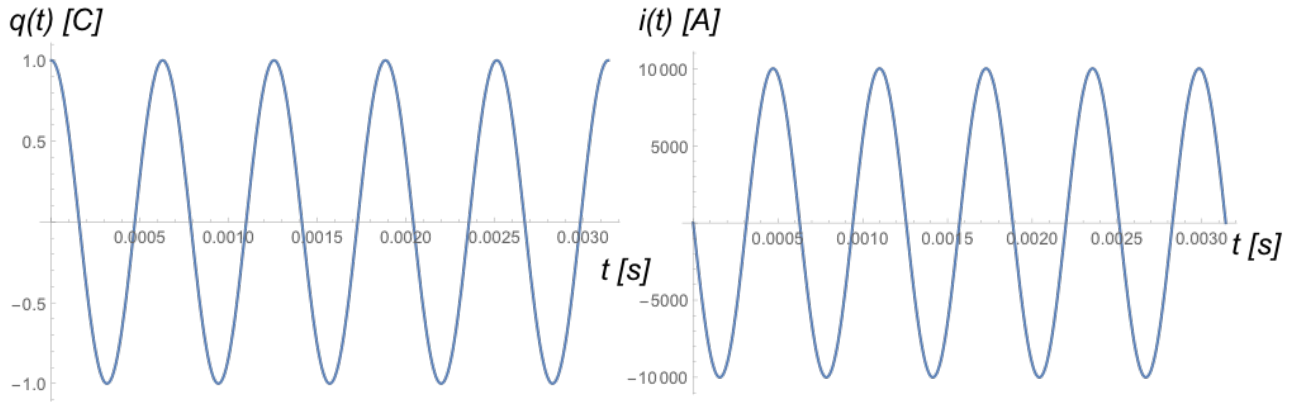
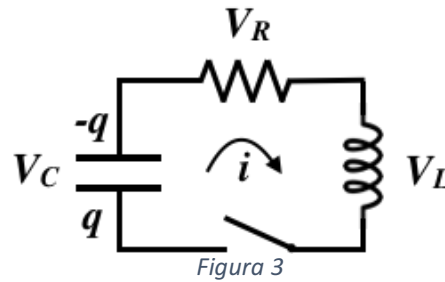


Figura 2: Andamento della carica $q(t)$ ai capi del condensatore (sinistra) e della corrente $i(t)$ che circola in un circuito LC con $L = 1 \text{ mH}$, $C = 10 \text{ } \mu\text{F}$, e con carica iniziale $q_0 = 1 \text{ C}$.

CIRCUITO RLC

Passiamo ora alla risoluzione di un sistema più complesso, dato dal circuito LC con l'aggiunta di un resistore di resistenza R , come mostrato in figura 3.



Ripetendo gli stessi passaggi fatti per il circuito LC, ponendo la somma delle cadute di potenziale ai capi degli elementi uguale a zero, ossia $V_C + V_R + V_L = 0$, come previsto dalla seconda legge di Kirchhoff, otteniamo:

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{dq}{dt} \frac{R}{L} + \frac{q}{LC} = 0 \quad (11)$$

Le condizioni iniziali sono le stesse del caso precedente, riportate nell'equazione (3). Consideriamo come prima la soluzione di prova complessa $\tilde{q}(t) = Ae^{\alpha t}$ e la inseriamo nella (11), ottenendo la seguente equazione:

$$\alpha^2 + 2\gamma \alpha + \omega^2 = 0 \quad (12)$$

dove abbiamo introdotto le costanti reali $\gamma = \frac{R}{2L}$ e $\omega = 1/\sqrt{LC}$. La (12) è un'equazione algebrica di secondo grado, che ammette due soluzioni complesse date da:

$$\alpha_{\pm} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega^2} \quad (13)$$

Questa volta, a differenza del caso precedente, i due numeri complessi $\alpha_{\pm}$ hanno una parte reale non nulla, ed hanno una parte immaginaria solo se $\gamma^2 - \omega^2 < 0$. Studiamo dapprima questo caso, ed alla fine quello in cui $\gamma^2 - \omega^2 \geq 0$.

$\gamma^2 - \omega^2 < 0$: OSCILLAZIONI SMORZATE.

Partiamo definendo la grandezza $\Omega^2 = \omega^2 - \gamma^2$. Dalla (13) otteniamo che

$$\alpha_{\pm} = -\gamma \pm j \Omega \quad (14)$$

La soluzione sarà quindi data, come prima, dalla combinazione lineare:

$$\tilde{q}(t) = A_+ e^{(-\gamma + j\Omega)t} + A_- e^{(-\gamma - j\Omega)t} \quad (15)$$

Le due costanti A_+ e A_- sono numeri complessi, di cui possiamo come nel caso precedente esplicitare parte reale e parte immaginaria come segue:

$$\begin{aligned} A_+ &= A'_+ + j A''_+ \\ A_- &= A'_- + j A''_- \end{aligned} \quad (16)$$

All'istante $t = 0$, otteniamo le seguenti uguaglianze per i valori complessi della carica e della corrente:

$$\begin{cases} \tilde{q}(0) = A_+ + A_- \\ \tilde{i}(0) = (-\gamma + j\Omega)A_+ + (-\gamma - j\Omega)A_- = -\gamma(A_+ + A_-) + j\Omega(A_+ - A_-) \end{cases} \quad (17)$$

Prendendo la parte reale di $\tilde{q}(0)$ e di $\tilde{i}(0)$ otteniamo i valori "fisici" di tali quantità, che devono rispettare le condizioni iniziali (3):

$$\begin{cases} q(0) = A'_+ + A'_- = q_0 \\ i(0) = -\gamma(A'_+ + A'_-) - \Omega(A''_+ - A''_-) = 0 \end{cases} \quad (18)$$

Come nel caso del circuito LC, abbiamo un sistema di due equazioni in 4 incognite. Due di queste sono sovrabbondanti e possono essere eliminate, e scegliamo di eliminare interamente il coefficiente A_- . Capiamo che questa scelta è legittima dal fatto che ponendo $A_- = 0$ nella (18) otteniamo:

$$\begin{cases} A'_+ = q_0 \\ -\gamma A'_+ - \Omega A''_+ = 0 \end{cases} \quad (19)$$

La cui soluzione è:

$$\begin{cases} A'_+ = q_0 \\ A''_+ = -\frac{q_0 \gamma}{\Omega} \end{cases} \quad (20)$$

A differenza del circuito LC, il coefficiente A_+ ha sia una parte reale che una parte immaginaria. L'espressione finale della carica $q(t)$ si ottiene inserendo questi valori nell'equazione (15), e prendendone la parte reale:

$$q(t) = e^{-\gamma t} \left(q_0 \cos \Omega t + \frac{q_0 \gamma}{\Omega} \sin \Omega t \right) \quad (21)$$

Invece di avere nell'espressione della carica sia le oscillazioni con il seno che quelle con il coseno, possiamo riscrivere la (20) in termini di una sola funzione:

$$q(t) = B e^{-\gamma t} \cos(\Omega t + \phi) \quad (22)$$

Vediamo però come sono definite le due quantità B e ϕ . Partiamo dalla (21) e usando la formula $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$, otteniamo

$$B \cos(\Omega t + \phi) = B (\cos \Omega t \cos \phi - \sin \Omega t \sin \phi) \quad (23)$$

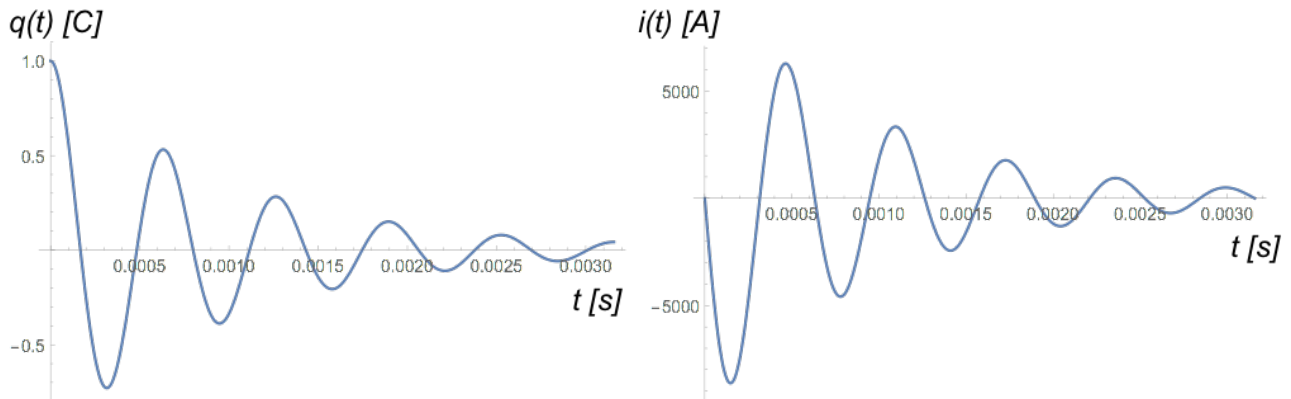


Figura 4: Andamento della carica $q(t)$ ai capi del condensatore (sinistra) e della corrente $i(t)$ che circola in un circuito RLC con $L = 1 \text{ mH}$, $C = 10 \text{ } \mu\text{F}$ e $R = 2 \text{ Ohm}$, e con carica iniziale $q_0 = 1 \text{ C}$.

Per ottenere la (20), occorre che

$$\begin{cases} B \cos \phi = q_0 \\ B \sin \phi = -q_0 \gamma / \Omega \end{cases} \quad (24)$$

Facendo il rapporto tra le due equazioni, vediamo che

$$\phi = -\tan^{-1} \left(\frac{\gamma}{\Omega} \right) \quad (25)$$

invece sommando i quadrati delle due, otteniamo

$$B = q_0 \sqrt{1 + \gamma^2 / \Omega^2} \quad (26)$$

Per concludere questa sezione, consideriamo un sistema specifico in cui $L = 1 \text{ mH}$, $C = 10 \text{ } \mu\text{F}$ e $R = 2 \text{ Ohm}$, e con carica iniziale $q_0 = 1 \text{ C}$. Per questo sistema abbiamo $\gamma = 10^3 \text{ s}^{-1}$, $\omega = 10^4 \text{ s}^{-1}$, $\Omega \simeq \omega$. L'andamento di $q(t)$ e $i(t)$ in cinque periodi di oscillazione $T = 2\pi/\Omega$ è mostrato in figura 4:

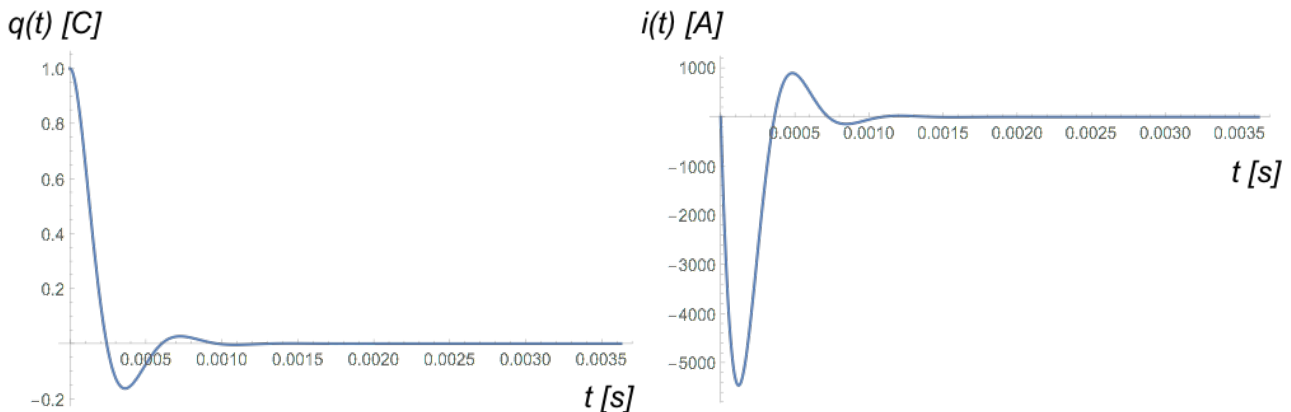


Figura 5: Andamento della carica $q(t)$ ai capi del condensatore (sinistra) e della corrente $i(t)$ che circola in un circuito RLC con $L = 1 \text{ mH}$, $C = 10 \text{ } \mu\text{F}$ e $R = 10 \text{ Ohm}$, e con carica iniziale $q_0 = 1 \text{ C}$.

In figura 5 mostriamo le stesse quantità per lo stesso circuito, considerando però un resistore di resistenza $R = 10 \text{ Ohm}$. In questo caso le oscillazioni vengono smorzate più rapidamente.

$\gamma^2 - \omega^2 > 0$: ANDAMENTO ESPONENZIALE DECRESCENTE.

Partiamo anche qui definendo la grandezza $\Gamma^2 = \gamma^2 - \omega^2$. Dalla (13) otteniamo che

$$\alpha_{\pm} = -\gamma \pm \Gamma \quad (27)$$

Ripetiamo tutti i passaggi del caso precedente. La soluzione complessa $\tilde{q}(t)$ sarà quindi data, come prima, dalla combinazione lineare:

$$\tilde{q}(t) = A_+ e^{(-\gamma + \Gamma)t} + A_- e^{(-\gamma - \Gamma)t} \quad (28)$$

Le due costanti A_+ e A_- sono numeri complessi. All'istante $t = 0$, otteniamo le seguenti uguaglianze per i valori complessi della carica e della corrente:

$$\begin{cases} \tilde{q}(0) = A_+ + A_- \\ \tilde{i}(0) = (-\gamma + \Gamma)A_+ + (-\gamma - \Gamma)A_- = -\gamma(A_+ + A_-) + \Gamma(A_+ - A_-) \end{cases} \quad (29)$$

Prendendo la parte reale di $\tilde{q}(0)$ e di $\tilde{i}(0)$ otteniamo i valori "fisici" di tali quantità, che devono rispettare le condizioni iniziali (3):

$$\begin{cases} q(0) = A'_+ + A'_- = q_0 \\ i(0) = -\gamma(A'_+ + A'_-) + \Gamma(A'_+ - A'_-) = A'_+(\Gamma - \gamma) - A'_-(\Gamma + \gamma) = 0 \end{cases} \quad (30)$$

Stavolta otteniamo un sistema di due equazioni in due sole incognite, ossia A'_+ e A'_- . Possiamo quindi porre a zero le parti immaginarie delle due costanti A_+ e A_- . La soluzione del sistema (25) può essere ottenuta per sostituzione, ed è data da:

$$\begin{cases} A'_+ = \frac{q_0(\Gamma + \gamma)}{2\Gamma} \\ A'_- = \frac{q_0(\Gamma - \gamma)}{2\Gamma} \end{cases} \quad (31)$$

Inserendo questi valori nella (23), otteniamo l'espressione finale della carica

$$q(t) = \frac{q_0(\Gamma + \gamma)}{2\Gamma} e^{(-\gamma + \Gamma)t} + \frac{q_0(\Gamma - \gamma)}{2\Gamma} e^{(-\gamma - \Gamma)t} \quad (32)$$

La soluzione è composta da due funzioni esponenziali decrescenti, che decadono con tempi caratteristici diversi. Vediamo se le soluzioni che abbiamo trovato sono compatibili con il fatto che, nel caso in cui il circuito ha una resistenza molto elevata, la corrente dovrebbe annullarsi e quindi la carica rimanere costante. Se la resistenza è molto elevata, abbiamo che $\gamma^2 \gg \omega^2$, per cui $\Gamma \rightarrow \gamma$. Dalla (26), vediamo che in questo caso $A'_+ \rightarrow q_0$ e $A'_- \rightarrow 0$, ed abbiamo un solo esponenziale $e^{(-\gamma + \Gamma)t}$. Questo esponenziale però decade molto lentamente, poichè $(-\gamma + \Gamma) \simeq 0$, e quindi nel limite in cui $R \rightarrow \infty$, $q(t) \rightarrow q_0$.