Pietro Baldi

Sistemi Dinamici modulo 1

Appunti del corso settembre-dicembre 2018
Corso di Laurea Triennale in Matematica

Premessa

Queste dispense sono la trascrizione delle lezioni del corso di *Sistemi Dinamici modulo 1* tenuto nel primo semestre dell'anno accademico 2018-2019, da settembre a dicembre 2018, per gli studenti del Corso di Laurea Triennale in Matematica. Sono 25 lezioni da 2 ore, qui trascritte con poche e piccole modifiche.

Il corso è un'introduzione alla teoria delle equazioni differenziali ordinarie (lezioni 1-16), al calcolo differenziale in spazi di Banach con il teorema della funzione implicita (lezioni 17-20) e alla teoria delle serie di Fourier (lezioni 21-25).

Essendo un corso di primo semestre del terzo anno, i prerequisiti sono gli argomenti di analisi che si fanno in Analisi 1 e Analisi 2 e quelli di algebra lineare che si fanno in Geometria 1. In particolare, non viene usato l'integrale di Lebesgue ma solo quello di Riemann, e vari risultati già noti vengono comunque richiamati.

La parte sulle equazioni differenziali ordinarie (lezioni 1-16) contiene i teoremi classici alla base della teoria: Teorema di esistenza locale e unicità di Cauchy, Teorema di esistenza di Peano (con il Teorema di Ascoli-Arzelà), Teorema di esistenza globale, soluzioni massimali, criteri di prolungabilità, Teorema di fuga dai compatti, Lemma di Gronwall, Teorema di dipendenza continua dai dati iniziali, Teorema di dipendenza differenziabile dai dati iniziali. Alcuni esercizi sono dedicati all'esistenza globale e all'analisi qualitativa delle soluzioni di equazioni scalari.

Vengono trattati i principali metodi per la soluzione esatta di equazioni differenziali scalari di forma speciale: equazioni a variabili separabili, equazioni con integrale primo, equazioni lineari del primo ordine, equazioni di Bernoulli e altre equazioni che si possono risolvere per sostituzione.

Una parte è dedicata alle equazioni lineari: spazio vettoriale delle soluzioni, determinante wronskiano, matrice risolvente, metodo di variazione delle costanti, polinomio caratteristico, esponenziale di matrice.

Per le lezioni 1-16 ho seguito le dispense [6] di Coti Zelati, [5] di Berti, [3] mie, e i libri [9] di Fusco, Marcellini e Sbordone, [1] di Acerbi, Modica e Spagnolo, [11] di Pagani e Salsa, [7] di De Marco, [10] di Gentile. In particolare, i teoremi di Cauchy, Peano e Ascoli-Arzelà seguono da vicino [6] e [9]; l'analisi qualitativa è basata su [1]; la parte sulle equazioni lineari segue [5] quasi parola per parola.

La seconda parte (lezioni 17-20) è una breve introduzione al calcolo differenziale negli spazi di Banach, e tratta il Lemma delle contrazioni di Banach-Caccioppoli, l'invertibilità di operatori lineari per serie di Neumann, e il Teorema della funzione implicita. Per le lezioni 17-20 ho seguito le dispense [5] di Berti e i libri [7] di De Marco e [2] di Ambrosetti e Prodi.

La terza parte (lezioni 21-25) tratta la teoria delle serie di Fourier senza integrale di Lebesgue: convergenza puntuale, uniforme e in media quadratica, nuclei di Dirichlet e di Fejer, sommabilità alla Cesàro, densità dei polinomi trigonometrici nelle funzioni continue, Lemma di Riemann-Lebesgue, regolarità di una funzione e decadimento dei coefficienti di Fourier, lo spazio ℓ^2, spazi vettoriali complessi con prodotto scalare, ortogonalità, identità di Parseval, disuguaglianza di Bessel, e un cenno al fenomeno di Gibbs e alla soluzione del problema di Cauchy per l'equazione del calore e delle onde con condizioni periodiche tramite serie di Fourier.

Per le lezioni 21-25 ho seguito [12] da vicino e, in misura minore, [4].

Vari esercizi si possono trovare nell'ultima parte delle dispense [5], nelle prove scritte di Sistemi Dinamici sul sito docenti unina di V. Coti Zelati, nelle prove scritte di Metodi Matematici sul sito docenti unina mio (limitatamente alle serie di Fourier e equazioni delle onde e calore), in [8], e, per l'analisi qualitativa, nel libro [1], che si consiglia di svolgere per intero.

Indice

1 Lezione 1

La prima parte di questo corso è un'introduzione di base alla teoria delle equazioni differenziali ordinarie (ODE).

La teoria delle equazioni ordinarie tratta le equazioni e i sistemi di equazioni in cui l'incognita è una funzione di una variabile, e in cui compaiono le derivate della funzione rispetto a tale variabile. Vengono dette "ordinarie" per distinguerle dalle equazioni differenziali "alle derivate parziali" (PDE), in cui l'incognita è funzione di più variabili, e in cui compaiono derivate parziali dell'incognita rispetto a variabili diverse (esempi famosi di PDE: equazione delle onde, del calore, di Laplace, di Schrödinger, del trasporto).

Notazioni standard per le ODE: la variabile viene indicata x (classico nome per la variabile reale di Analisi 1), oppure t (pensando $t =$ tempo, cosicché l'equazione descrive l'evoluzione temporale di un sistema), oppure s, ecc.; la funzione incognita viene indicata $y(x)$, $y(t)$, $x(t)$, $u(t)$, ecc. e può essere scalare o vettoriale.

Definizione 1.1. (*Soluzione di un'equazione differenziale*). Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+2}$, e sia $F : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione. Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo, e sia $u : I \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile n volte in I. Diciamo che u è soluzione dell'equazione differenziale

$$F(t, u, u', \dots, u^{(n)}) = 0, \tag{1.1}$$

o che u risolve l'equazione (1.1) su I, se

(i) per ogni $t \in I$, il vettore $(t, u(t), u'(t), \dots, u^{(n)}(t))$ appartiene all'insieme Ω;

(ii) per ogni $t \in I$ si ha l'identità $F(t, u(t), u'(t), \dots, u^{(n)}(t)) = 0$.

Sottolineiamo che le soluzioni delle equazioni differenziali sono definite su *intervalli*.

Definizione 1.2. (*Ordine di un'equazione differenziale*). Si dice *ordine* (o *grado*) di un'equazione differenziale il massimo ordine di derivazione che compare nell'equazione.

Esempio: $u' = u^2$ è del primo ordine, $u'^2 - u''^3 + u^2 = 0$ è del secondo ordine.

Definizione 1.3. (*Equazione in forma normale*). Un'equazione di ordine n è *in forma normale* se è del tipo

$$u^{(n)} = f(t, u, u', \dots, u^{(n-1)}).$$

Quindi le equazioni in forma normale di ordine 1 sono del tipo $u' = f(t, u)$; di ordine 2 sono della forma $u'' = f(t, u, u')$; di ordine 3 sono $u''' = f(t, u, u', u'')$.

Definizione 1.4. (*Sistema di equazioni scalari, o equazione vettoriale, del primo ordine*). Un sistema di n equazioni differenziali (scalari) del primo ordine in n incognite (scalari) $u_1(t), \dots, u_n(t)$ è un sistema del tipo

$$\begin{cases} u_1' = f_1(t, u_1, \dots, u_n) \\ u_2' = f_2(t, u_1, \dots, u_n) \\ \dots \\ u_n' = f_n(t, u_1, \dots, u_n). \end{cases} \tag{1.2}$$

Il sistema (1.2) si scrive anche
$$u' = f(t, u) \tag{1.3}$$
dove $u(t) = (u_1(t), \ldots, u_n(t))$ è funzione a valori in $\mathbb{R}^n$, e $f = (f_1, \ldots, f_n)$ è definita su un sottoinsieme di $\mathbb{R}^{1+n}$ a valori in $\mathbb{R}^n$.

Definizione 1.5. (*Campo vettoriale, spazio delle fasi, traiettorie, sistema dinamico n-dimensionale*). Siano u, f come nella Definizione 1.4.

Il sistema (1.2) o (1.3) si dice *sistema dinamico n-dimensionale.*

Lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ in cui vive $u(t)$ si dice *spazio delle fasi.*

La funzione $f(t, u)$ si dice *campo vettoriale* del sistema dinamico.

Le soluzioni dell'equazione differenziale si dicono anche *traiettorie del sistema dinamico.*

Definizione 1.6. (*Sistema autonomo*). Quando il campo vettoriale f non dipende da t, ma solo da u, l'equazione diventa $u' = f(u)$ e si dice che il sistema dinamico è *autonomo.*

Esempio: $u' = u^2 + 3$ è un sistema autonomo, $u' = u^2 + 3t$ non lo è.

* * *

Riscaldamento: proviamo a calcolare (o, per ora, "indovinare") le soluzioni di alcune equazioni differenziali semplici.

1) Equazione $u' = u$: qual è la funzione che è uguale alla sua derivata? Certamente e^t, e anche i suoi multipli. L'equazione ha soluzioni $u(t) = ce^t$, definite per ogni t nell'intervallo $I = \mathbb{R}$, dove $c \in \mathbb{R}$ è una qualsiasi costante.

2) $u' = 2u$: ha soluzioni $u(t) = ce^{2t}$, $t \in I = \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$.

3) $u' = 1 - u$: soluzioni $u(t) = 1 + ce^{-t}$, $t \in I = \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$.

4) $u' = u^2$: soluzione $u(t) = \frac{1}{c-t}$, definita per ogni $t \neq c$; ma il dominio I deve essere un intervallo, quindi per ogni costante c c'è sia una soluzione $u(t) = \frac{1}{c-t}$ su $t \in I = (-\infty, c)$ che una soluzione $u(t) = \frac{1}{c-t}$ su $t \in I = (c, +\infty)$.

5) Trovare una soluzione dell'equazione $u''' - u'' + tu' - u = 2$: la più immediata è $u(t) = -2$ per ogni $t \in I = \mathbb{R}$. È facile da calcolare perché, essendo funzione costante, le sue derivate sono nulle e quindi spariscono dall'equazione differenziale.

6) $u'' + 4u = 0$: soluzioni $u(t) = \cos(2t)$, $u(t) = \sin(2t)$, e anche ogni loro combinazione lineare $u(t) = c_1 \cos(2t) + c_2 \sin(2t)$, su $I = \mathbb{R}$, per ogni $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Notiamo che per le equazioni degli esempi precedenti, che sono tutte equazioni del primo ordine, le soluzioni sono famiglie a 1 parametro, mentre per questa equazione, che è del secondo ordine, le soluzioni sono una famiglia a 2 parametri.

7) Sistema
$$\begin{cases} u' = v \\ v' = -4u. \end{cases}$$
Se $u' = v$, allora, derivando, si ottiene $u'' = v'$, ma $v' = -4u$, da cui $u'' + 4u = 0$, come nell'esempio 6). Soluzioni:
$$u(t) = c_1 \cos(2t) + c_2 \sin(2t), \quad v(t) = -2c_1 \sin(2t) + 2c_2 \cos(2t),$$

definite per ogni $t \in I = \mathbb{R}$, al variare dei due parametri $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Osserviamo che il sistema 7) (equazione vettoriale 2-dimensionale del primo ordine, o sistema di 2 equazioni scalari del primo ordine) e l'equazione 6) (equazione scalare del secondo ordine) sono strettamente legati. Prima di enunciare la relazione generale tra equazioni scalari di ordine n ed equazioni vettoriali del primo ordine, vediamo un altro esempio. Consideriamo

8) l'equazione scalare del terzo ordine

$$u''' = t^2 + u^2 + uu' + \sin(u'' - u') \tag{1.4}$$

nell'incognita scalare $u : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, e

9) il sistema di 3 equazioni scalari del primo ordine

$$\begin{cases} u' = v \\ v' = w \\ w' = t^2 + u^2 + uv + \sin(w - v), \end{cases} \tag{1.5}$$

nell'incognita vettoriale $(u(t), v(t), w(t)) \in \mathbb{R}^3$.

Supponiamo di avere una soluzione $u(t)$ di (1.4), cioè una funzione $u : I \to \mathbb{R}$ definita su un certo intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$, che supponiamo di classe $C^3(I)$, che soddisfa (1.4). Allora la funzione vettoriale

$$I \to \mathbb{R}^3, \quad t \mapsto \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(t) \\ u'(t) \\ u''(t) \end{pmatrix}$$

è soluzione del sistema (1.5), ed è di classe $C^1(I)$. Viceversa, se abbiamo una soluzione $(u(t), v(t), w(t)) \in C^1(I, \mathbb{R}^3)$ di (1.5), allora la sua prima componente $u(t)$ è soluzione di (1.4), ed è $C^3(I, \mathbb{R})$. Dunque in questo esempio 1 equazione di ordine 3 equivale a 3 equazioni di ordine 1. Questo vale in generale:

Osservazione 1.7. (*Equivalenza tra 1 equazione scalare di ordine n ed n equazioni scalari di ordine 1*). L'equazione differenziale scalare di ordine n

$$u^{(n)}(t) = f(t, u(t), u'(t), \dots, u^{(n-1)}(t)) \tag{1.6}$$

è equivalente al sistema di n equazioni differenziali scalari di ordine 1, cioè un'equazione del primo ordine a valori in $\mathbb{R}^n$,

$$\begin{cases} u_1'(t) = u_2(t) \\ \dots \\ u_{n-1}'(t) = u_n(t) \\ u_n'(t) = f(t, u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t)). \end{cases} \tag{1.7}$$

"Equivalente" in questo senso: se $u : I \to \mathbb{R}$ è soluzione di (1.6), allora la funzione vettoriale $(u_1, u_2, \dots, u_n) = (u, u', \dots, u^{(n-1)}) : I \to \mathbb{R}^n$ è soluzione di (1.7); viceversa, se $(u_1, \dots, u_n) : I \to \mathbb{R}^n$ è soluzione di (1.7), allora $u = u_1$ è soluzione di (1.6).

Torniamo all'esempio più semplice, e cerchiamo di rispondere a questa domanda: tra le soluzioni dell'equazione $u' = u$, quali soddisfano anche la condizione $u(0) = 1$? Tra le soluzioni $u(t) = ce^t$ dell'equazione $u' = u$ ce n'è una sola che soddisfa $u(0) = 1$, ed è quella che si ottiene per $c = 1$, cioè $u(t) = e^t$. Domanda simile:

$$\begin{cases} u' = u \\ u(2) = -3 \end{cases}$$

ha soluzione $u(t) = -3e^{t-2}$, ottenuta per $c = -3e^{-2}$. Se la condizione è $u(4) = 0$, la soluzione è quella costante $u(t) = 0$.

Definizione 1.8. (*Problema di Cauchy*). Si chiama *problema di Cauchy* del primo ordine il problema

$$\begin{cases} u' = f(t,u) & \text{(equazione differenziale)} \\ u(t_0) = y_0 & \text{(condizione iniziale),} \end{cases} \tag{1.8}$$

con t_0 = istante iniziale, y_0 = dato iniziale. La soluzione $u(t)$ deve essere definita su un intervallo I che contiene t_0.

Questa definizione vale anche per le equazioni differenziali in $\mathbb{R}^n$, con $t_0 \in I \subseteq \mathbb{R}$, $u : I \to \mathbb{R}^n$, $f(t,u) \in \mathbb{R}^n$, e $y_0 \in \mathbb{R}^n$.

Il problema di Cauchy (1.8) può essere riformulato come equazione integrale (equazione contenente un integrale invece di una derivata). Tale formulazione integrale verrà usata più volte nel seguito, ed è alla base del metodo delle "iterate di Picard" per la costruzione della soluzione. Prima ci serve la definizione di integrale di una funzione vettoriale.

Definizione 1.9. (*Integrale di funzione a valori in* $\mathbb{R}^N$). Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}^N$, $f(t) = (f_1(t), \dots, f_N(t))$ una funzione a valori in $\mathbb{R}^N$, e supponiamo che ogni funzione componente f_k sia integrabile sull'intervallo $[a,b]$. Allora $\int_a^b f(t)\,dt$ indica il vettore avente $\int_a^b f_k(t)\,dt$ come componente k-esima,

$$\int_a^b f(t)\,dt := \begin{pmatrix} \int_a^b f_1(t)\,dt \\ \vdots \\ \int_a^b f_N(t)\,dt \end{pmatrix}.$$

Lemma 1.10. (Formulazione integrale del problema di Cauchy). *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{1+n}$ un aperto, $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ una funzione continua, $(t_0, y_0) \in \Omega$. Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo, con $t_0 \in I$, e sia $u : I \to \mathbb{R}^n$ una funzione. Si ha*

$$\begin{cases} u \in C^1(I) \\ (t, u(t)) \in \Omega \quad \forall t \in I \\ u'(t) = f(t, u(t)) \quad \forall t \in I \\ u(t_0) = y_0 \end{cases} \tag{1.9}$$

se e solo se

$$\begin{cases} u \in C^0(I) \\ (t, u(t)) \in \Omega \quad \forall t \in I \\ u(t) = y_0 + \displaystyle\int_{t_0}^t f(s, u(s))\,ds \quad \forall t \in I. \end{cases} \tag{1.10}$$

2 Lezione 2

Dimostrazione del Lemma 1.10. Supponiamo che valga (1.9). Essendo u' continua, dal Teorema fondamentale del calcolo integrale si ha

$$u(t) - u(t_0) = \int_{t_0}^{t} u'(s)\, ds.$$

Per ipotesi, $u(t_0) = y_0$ e $u'(s) = f(s, u(s))$, da cui, sostituendo, segue (1.10).

Viceversa, supponiamo che valga (1.10). Essendo f e u continue per ipotesi, la funzione $f(t, u(t))$ è continua. Dunque la funzione

$$t \mapsto \int_{t_0}^{t} f(s, u(s))\, ds$$

è di classe C^1, e, ancora dal Teorema fondamentale del calcolo integrale, la sua derivata è $f(t, u(t))$. Quindi la funzione

$$t \mapsto y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, u(s))\, ds$$

(che, per (1.10), è uguale a $u(t)$) è di classe C^1, la sua derivata è $f(t, u(t))$, e in $t = t_0$ vale y_0, da cui otteniamo (1.9). □

Teorema 2.1. (Teorema di esistenza e unicità locale per il problema di Cauchy). *Sia $t_0 \in \mathbb{R}$, $y_0 \in \mathbb{R}^N$,*

$$I = [t_0 - a, t_0 + a], \quad J = \{y \in \mathbb{R}^N : |y - y_0| \le b\} = \overline{B(y_0, b)},$$

con $a > 0$, $b > 0$. Sia $f : I \times J \to \mathbb{R}^N$ una funzione che soddisfa

- *f è continua in $I \times J$;*
- *$f(t, y)$ è lipschitziana in y, uniformemente in t, su $I \times J$, cioè esiste $L \ge 0$ tale che*
$$|f(t, y) - f(t, z)| \le L|y - z| \quad \forall t \in I, \quad \forall y, z \in J.$$

Allora esiste $\delta > 0$ tale che il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' = f(t, u) \\ u(t_0) = y_0 \end{cases} \tag{2.1}$$

ha una e una sola soluzione definita nell'intervallo $I_\delta = [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$. Inoltre si può prendere

$$\delta = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\} \tag{2.2}$$

dove

$$M = \max\{|f(t, y)| : (t, y) \in I \times J\} \tag{2.3}$$

(se $M = 0$, prendere $\delta = a$), e si ha la stima

$$|u(t)| \le |y_0| + \frac{M}{L}(e^{\delta L} - 1) \quad \forall t \in I_\delta \tag{2.4}$$

(se $L = 0$ si ha $|u(t)| \le |y_0| + M\delta$ per ogni $t \in I_\delta$).

Dimostrazione. Supponiamo che M e L siano entrambi positivi, e rimandiamo alla fine della dimostrazione i casi (banali) in cui M o L è nullo.

Sia $\delta = \min\{a, b/M\}$. Sappiamo (Lemma 1.10) che trovare una soluzione del problema di Cauchy (2.1) è equivalente a trovare una soluzione del problema integrale

$$u(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, u(s))\, ds \quad \forall t \in I_\delta. \tag{2.5}$$

Costruiamo una soluzione u di (2.5) come limite di una successione di funzioni.

Passo 1: costruzione della successione (u_n). Definiamo

$$u_0(t) := y_0 \quad \forall t \in I_\delta.$$

Per $n \geq 0$, vogliamo definire ricorsivamente

$$u_{n+1}(t) := y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, u_n(s))\, ds \quad \forall t \in I_\delta. \tag{2.6}$$

L'integrale in (2.6) è ben posto se, per ogni $s \in I_\delta$, la coppia $(s, u_n(s))$ appartiene all'insieme $I \times J$ dove f è definita, e se la funzione composta $f(s, u_n(s))$ è integrabile. Essendo $I_\delta \subseteq I$, per ogni $s \in I_\delta$ si ha $(s, u_n(s)) \in I \times J$ se e solo se $u_n(s) \in J$. Dimostriamo dunque per induzione che:

Per ogni $n \geq 0$ *si ha*

$$u_n \in C^1(I_\delta), \quad u_n(t) \in J \quad \forall t \in I_\delta \tag{2.7}$$

e, di conseguenza, possiamo definire u_{n+1} *come in* (2.6).

Per $n = 0$ la (2.7) è banalmente vera perché $u_0(t) = y_0$. Supponiamo che (2.7) valga per un certo $n \geq 0$. Allora $(t, u_n(t)) \in I \times J$ per ogni $t \in I_\delta$, $f(t, u_n(t))$ è ben definita e continua, quindi integrabile. Dunque definiamo u_{n+1} come in (2.6). Si ha $u_{n+1} \in C^1(I_\delta)$ perché $f(s, u_n(s))$ è continua. Poiché $|f| \leq M$ in $I \times J$, e $\delta \leq b/M$, per ogni $t \in I_\delta$ si ha

$$|u_{n+1}(t) - y_0| = \left| \int_{t_0}^{t} f(s, u_n(s))\, ds \right| \leq \left| \int_{t_0}^{t} |f(s, u_n(s))|\, ds \right| \leq M|t - t_0| \leq M\delta \leq b.$$

Dunque $u_{n+1}(t) \in J$ per ogni $t \in I_\delta$, e (2.7) vale anche per u_{n+1}.

In questo modo abbiamo definito una successione (u_n) che soddisfa (2.7) e (2.6) per ogni $n \geq 0$.

Passo 2: stima di $|u_n - u_{n-1}|$. Dimostriamo, per induzione, che

$$|u_n(t) - u_{n-1}(t)| \leq \frac{M}{L} \frac{L^n |t - t_0|^n}{n!} \quad \forall t \in I_\delta, \; n \geq 1. \tag{2.8}$$

Per ogni $t \in I_\delta$ si ha

$$|u_1(t) - u_0(t)| = |u_1(t) - y_0| = \left| \int_{t_0}^{t} f(s, y_0)\, ds \right| \leq M|t - t_0| = \frac{M}{L} \frac{L^1 |t - t_0|^1}{1!},$$

quindi (2.8) è vera per $n = 1$. Supponiamo che (2.8) valga per un certo $n \geq 1$. Allora per $t \in [t_0, t_0 + \delta]$ si ha

$$\begin{aligned}
|u_{n+1}(t) - u_n(t)| &= \Big| y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, u_n(s))\, ds - y_0 - \int_{t_0}^{t} f(s, u_{n-1}(s))\, ds \Big| \\
&= \Big| \int_{t_0}^{t} \Big(f(s, u_n(s)) - f(s, u_{n-1}(s)) \Big)\, ds \Big| \\
&\leq \int_{t_0}^{t} \big| f(s, u_n(s)) - f(s, u_{n-1}(s)) \big|\, ds \\
&\leq \int_{t_0}^{t} L\, |u_n(s) - u_{n-1}(s)|\, ds \\
&\leq \int_{t_0}^{t} L\, \frac{M}{L}\, \frac{L^n |s - t_0|^n}{n!}\, ds = \frac{M}{L}\, \frac{L^{n+1}}{n!} \int_{t_0}^{t} (s - t_0)^n\, ds = \frac{M}{L}\, \frac{L^{n+1}}{n!}\, \frac{(t - t_0)^{n+1}}{n+1} \\
&= \frac{M}{L}\, \frac{L^{n+1} |t - t_0|^{n+1}}{(n+1)!}.
\end{aligned}$$

Per $t \in [t_0 - \delta, t_0]$, similmente,

$$\begin{aligned}
|u_{n+1}(t) - u_n(t)| &= \Big| \int_{t_0}^{t} \Big(f(s, u_n(s)) - f(s, u_{n-1}(s)) \Big)\, ds \Big| \\
&= \Big| \int_{t}^{t_0} \Big(f(s, u_n(s)) - f(s, u_{n-1}(s)) \Big)\, ds \Big| \\
&\leq \int_{t}^{t_0} \big| f(s, u_n(s)) - f(s, u_{n-1}(s) \big|\, ds \\
&\leq \int_{t}^{t_0} L\, |u_n(s) - u_{n-1}(s)|\, ds \\
&\leq \int_{t}^{t_0} L\, \frac{M}{L}\, \frac{L^n |s - t_0|^n}{n!}\, ds = \frac{M}{L}\, \frac{L^{n+1}}{n!} \int_{t}^{t_0} (t_0 - s)^n\, ds = \frac{M}{L}\, \frac{L^{n+1}}{n!}\, \frac{(t_0 - t)^{n+1}}{n+1} \\
&= \frac{M}{L}\, \frac{L^{n+1} |t - t_0|^{n+1}}{(n+1)!}.
\end{aligned}$$

Quindi (2.8) vale per $n+1$, per ogni $t \in I_\delta$. Per induzione, (2.8) vale per ogni $n \geq 1$.

Passo 3: (u_n) converge uniformemente in I_δ. Scriviamo ogni u_n come somma parziale di una serie telescopica,

$$\begin{aligned}
u_n(t) &= u_0(t) + \big(u_1(t) - u_0(t)\big) + \big(u_2(t) - u_1(t)\big) + \ldots + \big(u_n(t) - u_{n-1}(t)\big) \\
&= y_0 + \sum_{k=1}^{n} \big(u_k(t) - u_{k-1}(t)\big). \qquad (2.9)
\end{aligned}$$

Dalla stima (2.8), ogni termine soddisfa

$$|u_k(t) - u_{k-1}(t)| \leq \frac{M}{L}\, \frac{L^k |t - t_0|^k}{k!} \leq \frac{M}{L}\, \frac{L^k \delta^k}{k!} \qquad \forall t \in I_\delta,\ k \geq 1.$$

Quindi

$$\|u_k - u_{k-1}\|_{\infty, I_\delta} := \sup\{|u_k(t) - u_{k-1}(t)| : t \in I_\delta\} \leq \frac{M}{L}\, \frac{(L\delta)^k}{k!} \qquad \forall k \geq 1. \qquad (2.10)$$

La serie numerica di termine generale $\frac{M}{L}\frac{(L\delta)^k}{k!}$ è convergente, perché

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{M}{L}\,\frac{(L\delta)^k}{k!} = \frac{M}{L}\Big(\Big(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(L\delta)^k}{k!}\Big) - 1\Big) = \frac{M}{L}\,(e^{L\delta}-1) < \infty.$$

Quindi, dalla (2.10), anche la serie numerica $\sum_{k=1}^{\infty}\|u_k - u_{k-1}\|_{\infty,I_\delta}$ converge, e la serie di funzioni $\sum_{k=1}^{\infty}(u_k(t)-u_{k-1}(t))$ è totalmente convergente in I_δ. Di conseguenza (criterio di Weierstrass) la serie di funzioni converge uniformemente in I_δ, cioè la successione delle sue somme parziali converge uniformemente in I_δ. Quindi, per la (2.9), u_n converge uniformemente in I_δ. Chiamiamo u il suo limite, $u(t) := \lim_{(n\to\infty)} u_n(t)$.

Inoltre, per ogni $t \in I_\delta$ si ha

$$\begin{aligned} |u_n(t)| &= \Big|y_0 + \sum_{k=1}^{n}(u_k(t)-u_{k-1}(t))\Big| \le |y_0| + \sum_{k=1}^{n}|u_k(t)-u_{k-1}(t)| \\ &\le |y_0| + \sum_{k=1}^{n}\frac{M}{L}\,\frac{(L\delta)^k}{k!} \le |y_0| + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{M}{L}\,\frac{(L\delta)^k}{k!} = |y_0| + \frac{M}{L}\,(e^{L\delta}-1). \end{aligned}$$

Passando al limite per $n \to \infty$ nella disuguaglianza $|u_n(t)| \le |y_0| + \frac{M}{L}\,(e^{L\delta}-1)$ appena dimostrata si ottiene la (2.4).

Passo 4: esistenza della soluzione. Abbiamo dimostrato che $u_n \to u$ uniformemente in I_δ. Poiché f è continua, la funzione composta $f(t,u_n(t))$ converge a $f(t,u(t))$ uniformemente in I_δ. Allora, grazie alla convergenza uniforme, si ha il passaggio al limite sotto il segno di integrale,

$$\lim_{n\to\infty}\Big(\int_{t_0}^{t} f(s,u_n(s))\,ds\Big) = \int_{t_0}^{t} f(s,u(s))\,ds \qquad \forall t \in I_\delta.$$

Ricordando la (2.6), per ogni $t \in I_\delta$ abbiamo

$$u(t) = \lim_{n\to\infty} u_n(t) = \lim_{n\to\infty}\Big(y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,u_{n-1}(s))\,ds\Big) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,u(s))\,ds,$$

cioè u soddisfa l'equazione integrale (2.5).

Passo 5: unicità della soluzione. Supponiamo che u e v siano due soluzioni su I_δ dell'equazione integrale (2.5), cioè

$$u(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,u(s))\,ds, \quad v(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,v(s))\,ds \quad \forall t \in I_\delta. \tag{2.11}$$

In $t = t_0$ le due soluzioni coincidono; dimostriamo che coincidono su tutto l'intervallo $I_\delta = [t_0-\delta, t_0+\delta]$. In particolare, dimostriamo che $u = v$ nell'intervallo $[t_0, t_0+\delta]$ (la dimostrazione per l'intervallo $[t_0-\delta, t_0]$ è simile). Sia

$$\tau := \sup\{c \in [t_0, t_0+\delta] : u(t) = v(t)\ \forall t \in [t_0, c]\}$$

e supponiamo, per assurdo, che sia $t_0 \le \tau < t_0 + \delta$. Fissiamo $\tilde\delta > 0$ abbastanza piccolo da soddisfare

$$L\tilde\delta \le \frac{1}{2}, \quad \tau + \tilde\delta \le t_0 + \delta.$$

In particolare, la seconda disuguaglianza assicura che $[\tau, \tau + \tilde{\delta}] \subseteq [t_0, t_0 + \delta]$. Sia

$$\lambda := \sup\{|u(t) - v(t)| : t \in [\tau, \tau + \tilde{\delta}]\}.$$

Usando le identità in (2.11) e il fatto che, per costruzione, $u = v$ su $[t_0, \tau]$, si ha, per ogni $t \in [\tau, \tau + \tilde{\delta}]$,

$$\begin{aligned} u(t) - v(t) &= \int_{t_0}^{t} \Big(f(s, u(s)) - f(s, v(s)) \Big)\, ds = \int_{t_0}^{\tau} (\ldots)\, ds + \int_{\tau}^{t} (\ldots)\, ds \\ &= \int_{\tau}^{t} \Big(f(s, u(s)) - f(s, v(s)) \Big)\, ds. \end{aligned}$$

Dunque, per ogni $t \in [\tau, \tau + \tilde{\delta}]$,

$$\begin{aligned} |u(t) - v(t)| &\leq \int_{\tau}^{t} |f(s, u(s)) - f(s, v(s))|\, ds \\ &\leq \int_{\tau}^{t} L|u(s) - v(s)|\, ds \\ &\leq \int_{\tau}^{t} L\lambda\, ds = L\lambda(t - \tau) \leq L\lambda\tilde{\delta} \leq \frac{1}{2}\lambda. \end{aligned}$$

Abbiamo provato che $|u(t) - v(t)| \leq \frac{1}{2}\lambda$ per ogni $t \in [\tau, \tau + \tilde{\delta}]$. Di conseguenza

$$\sup\{|u(t) - v(t)| : t \in [\tau, \tau + \tilde{\delta}]\} \leq \frac{1}{2}\lambda,$$

cioè $\lambda \leq \frac{1}{2}\lambda$. Questo implica che $\lambda = 0$, da cui $u = v$ in $[\tau, \tau + \tilde{\delta}]$. D'altra parte, come già osservato, $u = v$ su $[t_0, \tau]$. Quindi $u = v$ in tutto l'intervallo $[t_0, \tau + \tilde{\delta}]$, da cui

$$\sup\{c \in [t_0, t_0 + \delta] : u(t) = v(t)\ \forall t \in [t_0, c]\} \geq \tau + \tilde{\delta},$$

cioè $\tau \geq \tau + \tilde{\delta}$, assurdo. Abbiamo dimostrato che $\tau = t_0 + \delta$, cioè che $u = v$ in tutto $[t_0, t_0 + \delta]$. Analogamente si prova che $u = v$ in $[t_0 - \delta, t_0]$.

Passo 6: casi banali di M, L nulli. Concludiamo la dimostrazione trattando i casi che rimangono, cioè quelli banali in cui M o L è nullo.

Se $M = 0$, allora f è la funzione nulla, l'equazione differenziale in (2.1) diventa $u'(t) = 0$, e l'unica soluzione è la funzione costante $u(t) = y_0$ definita su $I_\delta = I$ (prendiamo $\delta = a$).

Supponiamo dunque $M > 0$. Sia $\delta = \min\{a, b/M\}$. Se $L = 0$, allora $f(t, y) = f(t, y_0)$ per ogni $y \in J$, l'equazione in (2.1) diventa $u'(t) = f(t, y_0)$ (campo vettoriale indipendente da u), e, per integrazione, l'unica soluzione è

$$u(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y_0)\, ds \quad \forall t \in I_\delta.$$

Essendo $|f(s, y_0)| \leq M$ per ogni $s \in I_\delta$, si ha

$$|u(t)| \leq |y_0| + \Big| \int_{t_0}^{t} f(s, y_0)\, ds \Big| \leq |y_0| + M|t - t_0| \leq |y_0| + M\delta,$$

e la dimostrazione è conclusa. $\square$

Osservazione 2.2. (*Problema di punto fisso*). Per ogni funzione $u(t)$ sia

$$\Phi(u)(t) := y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, u(s))\, ds.$$

L'equazione (2.5) si riscrive come

$$u = \Phi(u),$$

che è un *problema di punto fisso*: risolvere il problema di Cauchy nella formulazione integrale (2.5) significa trovare u che sia "punto fisso" di Φ, cioè tale che $\Phi(u) = u$.

In questo tipo di problemi l'approccio classico consiste nel costruire una successione (u_n) definita ricorsivamente ponendo

$$u_{n+1} = \Phi(u_n). \tag{2.12}$$

Se si riesce a dimostrare che u_n converge, in una norma opportuna, ad un certo limite u, e se $\Phi(u_n)$ converge a $\Phi(u)$, allora passando al limite nella (2.12) si ottiene $u = \Phi(u)$, la soluzione cercata. La dimostrazione del Teorema 2.1 segue questo approccio (vedere la definizione ricorsiva (2.6) della successione (u_n) per risolvere il problema (2.5)).

Esercizio 2.3. Nella dimostrazione del Teorema 2.1 abbiamo usato questo fatto: *Sia $I_\delta = [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$, $J = \{y \in \mathbb{R}^N : |y - y_0| \le b\}$. Sia $f : I_\delta \times J \to \mathbb{R}^N$ continua, e sia $u_n : I_\delta \to J$ una successione di funzioni continue che convergono uniformemente alla funzione $u : I_\delta \to J$. Sia $g_n(t) := f(t, u_n(t))$ e $g(t) := f(t, u(t))$. Allora $g_n \to g$ uniformemente in I_δ.* Dimostrarlo.

3 Lezione 3

Svolgimento dell'Esercizio 2.3. Sia $\varepsilon > 0$. La funzione f è continua, l'insieme $I \times J$ è compatto, quindi (Teorema di Cantor) f è uniformemente continua in $I \times J$. Dunque esiste $\delta > 0$ tale che

$$|f(t, y) - f(s, z)| < \varepsilon \qquad \forall (t, y), (s, z) \in I \times J, \quad |(t, y) - (s, z)| < \delta.$$

Per ipotesi, $u_n \to u$ uniformemente in I. Quindi esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che

$$\|u_n - u\|_{\infty, I} = \sup_{t \in I} |u_n(t) - u(t)| < \delta \qquad \forall n \ge \bar{n}.$$

Di conseguenza, per ogni $n \ge \bar{n}$, per ogni $t \in I$ si ha

$$|(t, u_n(t)) - (t, u(t))| = |u_n(t) - u(t)| < \delta$$

e quindi

$$|f(t, u_n(t)) - f(t, u(t))| < \varepsilon \quad \forall t \in I,\ n \ge \bar{n}.$$

Abbiamo dimostrato che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $|g_n(t) - g(t)| < \varepsilon$ per ogni $t \in I$, per ogni $n \ge \bar{n}$, cioè che $g_n \to g$ uniformemente in I. □

Osservazione 3.1. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ un aperto, e sia $f : \Omega \to \mathbb{R}^N$ una funzione continua e localmente lipschitziana in y uniformemente in t, cioè:

Per ogni punto $(t_0, y_0) \in \Omega$ esistono costanti $a > 0$, $b > 0$, $L \ge 0$ tali che

- *il "rettangolo" $I \times J = [t_0 - a, t_0 + a] \times \overline{B(y_0, b)}$ è contenuto in Ω;*
- $|f(t,y) - f(t,z)| \leq L|y - z|$ *per ogni $t \in I$, per ogni $y, z \in J$.*

Allora per ogni $(t_0, y_0) \in \Omega$ il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' = f(t,u) \\ u(t_0) = y_0 \end{cases}$$

ha una, e solo una, soluzione locale, cioè esiste $\delta > 0$ tale che il problema di Cauchy ha un'unica soluzione nell'intervallo $I_\delta = [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$.

In altre parole, l'ipotesi di continuità e locale lipschitzianità in y della funzione f assicura che intorno a ogni punto (t_0, y_0) dell'aperto Ω c'è un rettangolo $I \times J$ centrato in (t_0, y_0) in cui vale il Teorema di esistenza locale e unicità per il problema di Cauchy.

Nella prossima proposizione (Proposizione 3.8) osserviamo che se f è di classe C^1, o anche solo se f è continua e ha, continue, le derivate parziali rispetto alle variabili y, allora f è localmente lipschitziana in y. Questo permette di applicare il Teorema di esistenza locale e unicità senza fare verifiche dirette di lipschitzianità per f (e questo è conveniente anche per lo svolgimento degli esercizi).

Prima di enunciare e dimostrare la proposizione, apriamo una parentesi sulle norme delle matrici e vediamo come la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz

$$|x \cdot y| \leq |x||y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^N$$

si può applicare al prodotto righe per colonne di una matrice contro un vettore e all'integrale di una funzione vettoriale.

Definizione 3.2. (*Norma euclidea di una matrice*). Sia A una matrice a n righe e q colonne,

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1q} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & \dots & A_{nq} \end{pmatrix}.$$

La norma euclidea della matrice A è

$$|A| = |A|_{\mathrm{E}} = |A|_{\mathrm{Euclidea}} := \Big(\sum_{\substack{k=1,\dots,n \\ j=1,\dots,q}} A_{kj}^2 \Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Lemma 3.3. (Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz per matrice contro vettore). *Per ogni A matrice $n \times q$, per ogni vettore $x \in \mathbb{R}^q$ si ha*

$$|Ax| \leq |A||x|$$

dove $|A|$ è la norma euclidea di A.

Dimostrazione. Sia $y = Ax$, e siano y_k le sue componenti. Allora, per ogni $k = 1, \dots, n$, si ha

$$y_k = \begin{pmatrix} A_{k1} & \dots & A_{kq} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_q \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{q} A_{kj} x_j = v_k \cdot x, \qquad v_k := \begin{pmatrix} A_{k1} \\ \vdots \\ A_{kq} \end{pmatrix}$$

(il vettore v_k è la riga k-esima di A scritta come colonna). Dalla disuguaglianza di Cauchy-Schwarz,

$$|y_k| = |v_k \cdot x| \leq |v_k||x|,$$

da cui

$$\begin{aligned} |Ax| = |y| &= \Big(\sum_{k=1}^n y_k^2\Big)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \Big(\sum_{k=1}^n |v_k|^2|x|^2\Big)^{\frac{1}{2}} = \Big(\sum_{k=1}^n |v_k|^2\Big)^{\frac{1}{2}}|x| = \Big(\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^q A_{kj}^2\Big)^{\frac{1}{2}}|x| = |A||x|. \qquad \square \end{aligned}$$

Lemma 3.4. (Disuguaglianza per l'integrale di funzione vettoriale). *Sia $[a,b] \subset \mathbb{R}$ un intervallo, e sia $g : [a,b] \to \mathbb{R}^N$, $g(t) = (g_1(t), \dots, g_N(t))$ una funzione a valori vettoriali. Supponiamo che le funzioni componenti $g_k : [a,b] \to \mathbb{R}$, $k = 1, \dots, N$, siano integrabili in $[a,b]$. Allora*

$$\Big|\int_a^b g(t)\,dt\Big| \leq \int_a^b |g(t)|\,dt.$$

Dimostrazione. Sia $c_k := \int_a^b g_k(t)\,dt$, dove g_k è la funzione componente k-esima di g, e sia c il vettore $(c_1, \dots, c_N) \in \mathbb{R}^N$, cioè $c = \int_a^b g(t)\,dt$. La tesi è $|c| \leq \int_a^b |g(t)|\,dt$. Se $c = 0$, la tesi è banalmente vera. Sia dunque $c \neq 0$. Allora

$$\begin{aligned} |c|^2 &= \sum_{k=1}^N c_k^2 = \sum_{k=1}^N \int_a^b g_k(t)\,dt\,c_k = \int_a^b \sum_{k=1}^N g_k(t) c_k\,dt = \int_a^b g(t) \cdot c\,dt \\ &\leq \int_a^b |g(t)||c|\,dt = |c| \int_a^b |g(t)|\,dt. \end{aligned}$$

Poiché $|c| > 0$, la disuguaglianza $|c|^2 \leq |c| \int_a^b |g(t)|\,dt$ dà la tesi. $\square$

Definizione 3.5. (*Norma operatoriale di matrice*). Sia A una matrice a n righe e q colonne. La norma operatoriale della matrice A è

$$|A|_{\text{op}} = |A|_{\text{operatoriale}} := \sup \Big\{ \frac{|Ax|}{|x|} : x \in \mathbb{R}^q,\ x \neq 0 \Big\}.$$

Esercizio 3.6. Dimostrare che

$$\sup_{x \neq 0} \frac{|Ax|}{|x|} = \sup_{|x|=1} |Ax| = \sup_{|x| \leq 1} |Ax|.$$

Esercizio 3.7. Dimostrare che la norma euclidea $|A|_{\text{E}}$ e quella operatoriale $|A|_{\text{op}}$ sono equivalenti, cioè dimostrare che esistono due costanti C_1, C_2 tali che

$$C_1 |A|_{\text{E}} \leq |A|_{\text{op}} \leq C_2 |A|_{\text{E}}$$

per ogni A matrice $n \times q$. Calcolare le costanti ottimali C_1, C_2.

Proposizione 3.8. *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ un aperto, sia $f : \Omega \to \mathbb{R}^N$ una funzione continua, e supponiamo che esistano, continue, le derivate parziali di f rispetto alle variabili $y_1, \dots, y_N$. Allora f è localmente lipschitziana in y uniformemente in t.*

Dimostrazione. Sia $(t_0, y_0) \in \Omega$. Poiché Ω è un aperto, esistono $a > 0$, $b > 0$ tali che $I \times J \subset \Omega$, dove $I = [t_0 - a, t_0 + a]$, $J = \overline{B(y_0, b)} = \{y \in \mathbb{R}^N : |y - y_0| \leq b\}$.

Sia $D_y f(t, y)$ la matrice delle derivate parziali di f rispetto a y (matrice jacobiana rispetto a y),

$$D_y f(t,y) = \begin{pmatrix} \partial_{y_1} f_1(t,y) & \dots & \partial_{y_N} f_1(t,y) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_{y_1} f_N(t,y) & \dots & \partial_{y_N} f_N(t,y) \end{pmatrix}$$

dove $f_1, \dots, f_N$ sono le funzioni componenti di f. Dal Teorema di Weiestrass, esiste finito il massimo

$$M := \max\{|D_y f(t,y)| : (t,y) \in I \times J\},$$

dove $|D_y f(t, y)|$ è la norma euclidea della matrice. Notiamo che, per ogni $t \in I$ fissato, la funzione $J \to \mathbb{R}^N$, $y \mapsto f(t, y)$ è differenziabile ed è di classe C^1 (Teorema del differenziale, Analisi 2).

Sia $t \in I$, $y, z \in J$. Poiché la palla J è convessa, il segmento di estremi (t, y) e (t, z) è contenuto in $I \times J$. Consideriamo la funzione f lungo tale segmento:

$$\varphi(s) := f(t, y + s(z - y)), \quad s \in [0, 1].$$

Per ogni $k = 1, \dots, N$, la funzione componente

$$\varphi_k : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad \varphi_k(s) = f_k(t, y + s(z - y))$$

è di classe C^1 (essendo composizione di funzioni C^1), e ha derivata

$$\varphi_k'(s) = \sum_{j=1}^{N} (\partial_{y_j} f_k)(t, y + s(z - y))\,(z_j - y_j).$$

Quindi il vettore $\varphi'(s)$ è

$$\varphi'(s) = (D_y f)(t, y + s(z - y))\,(z - y).$$

Dalla disuguaglianza di Cauchy-Schwarz per il prodotto di una matrice contro un vettore (Lemma 3.3),

$$|\varphi'(s)| \leq |(D_y f)(t, y + s(z - y))|\,|z - y| \leq M|z - y|.$$

Il Teorema fondamentale del calcolo integrale applicato a ogni funzione componente $\varphi_k : [0, 1] \to \mathbb{R}$ dà

$$\varphi_k(1) - \varphi_k(0) = \int_0^1 \varphi_k'(s)\,ds \quad \forall k = 1, \dots, N,$$

quindi i vettori $\varphi(1), \varphi(0)$ soddisfano la stessa formula in $\mathbb{R}^N$,

$$\varphi(1) - \varphi(0) = \int_0^1 \varphi'(s)\,ds.$$

Dalla disuguaglianza per l'integrale di funzione vettoriale (Lemma 3.4) abbiamo

$$|\varphi(1) - \varphi(0)| = \Big|\int_0^1 \varphi'(s)\,ds\Big| \leq \int_0^1 |\varphi'(s)|\,ds \leq \int_0^1 M|z - y|\,ds = M|z - y|.$$

Poiché $\varphi(1) = f(t, z)$, $\varphi(0) = f(t, y)$, abbiamo provato che per ogni $t \in I$, per ogni $y, z \in J$, si ha $|f(t, z) - f(t, y)| \leq M|z - y|$. □

Vediamo qualche esempio.

1) $u' = tu^3$. Il campo vettoriale è $f(t,y) = ty^3$, che è di classe $C^\infty(\Omega)$ nel dominio $\Omega = \mathbb{R}^2$. Quindi f è localmente lipschitziana in y, uniformemente in t, intorno a ogni punto $(t_0, y_0) \in \Omega$. Perciò si può applicare il Teorema di esistenza locale e unicità intorno a ogni dato iniziale. Di conseguenza, per ogni coppia $(t_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' = tu^3 \\ u(t_0) = y_0 \end{cases}$$

ha una e una sola soluzione locale (cioè definita in un intervallo $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ per un certo $\delta > 0$).

2) $u'' = u'^2 - t + \sin(u+t)$. È un'equazione del secondo ordine: per poter applicare il Teorema di esistenza locale e unicità dobbiamo scriverla come sistema del primo ordine:

$$\begin{cases} u' = v \\ v' = v^2 - t + \sin(u+t). \end{cases}$$

Il campo vettoriale è la funzione

$$f : \Omega = \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad f(t, y_1, y_2) = \begin{pmatrix} y_2 \\ y_2^2 - t + \sin(y_1 + t) \end{pmatrix},$$

che è $C^\infty(\mathbb{R}^3)$. Quindi, ragionando come nell'esempio 1), otteniamo che per ogni dato iniziale $(t_0, u_0, v_0) \in \mathbb{R}^3$ il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' = v, \\ v' = v^2 - t + \sin(u+t), \\ u(t_0) = u_0, \\ v(t_0) = v_0 \end{cases}$$

ha un'unica soluzione locale $(u(t), v(t))$ definita in un certo intervallo $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$. Possiamo a questo punto tornare all'equazione del secondo ordine, e concludiamo che per ogni $(t_0, u_0, v_0) \in \mathbb{R}^3$ il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u'' = u'^2 - t + \sin(u+t), \\ u(t_0) = u_0, \\ u'(t_0) = v_0 \end{cases}$$

ha un'unica soluzione locale $u(t)$.

3) $u' = |t|e^{u^2}$. Il campo vettoriale è la funzione $f(t,y) = |t|e^{y^2}$, che è continua in (t,y) in $\Omega = \mathbb{R}^2$, è derivabile in y, con derivata parziale $\partial_y f(t,y) = 2yf(t,y)$, anch'essa continua in Ω. Quindi f è localmente lipschitziana in y, uniformemente in t, in Ω. Di conseguenza per ogni $(t_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ il problema di Cauchy con dato iniziale $u(t_0) = y_0$ ha un'unica soluzione locale. (Notiamo che f non è $C^1(\Omega)$).

4) $u' = |u|$. È un'equazione autonoma. Il campo vettoriale è la funzione $f(t,y) = |y|$, che è continua in $\Omega = \mathbb{R}^2$, ma non è derivabile rispetto a y in $y = 0$. Potremmo restringere il dominio a sottoinsiemi aperti ($y > 0$, $y < 0$) in cui f ammette derivate parziali rispetto a y, e poi ragionare per casi ($y > 0$, $y < 0$, $y = 0$), osservando che

$u(t) = 0$ è soluzione costante. Tuttavia, in questo caso è più rapido fare una verifica diretta della lipschitzianità: per ogni $t, y, z \in \mathbb{R}$ si ha

$$|f(t, y) - f(t, z)| = ||y| - |z|| \leq |y - z|$$

e quindi il Teorema di esistenza locale e unicità si può applicare intorno a ogni punto $(t_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

D'altra parte il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' = |u|, \\ u(t_0) = y_0 \end{cases}$$

è molto semplice, e può essere risolto in modo immediato. La sua soluzione è

$$\begin{aligned} u(t) &= y_0 e^{t-t_0} && \text{se } y_0 > 0, \\ u(t) &= 0 && \text{se } y_0 = 0, \\ u(t) &= y_0 e^{t_0-t} && \text{se } y_0 < 0, \end{aligned}$$

e in tutti i casi la soluzione è definita su tutto $\mathbb{R}$ (soluzione "globale").

5) $u' = \sqrt{|u|}$. Il campo vettoriale è la funzione $f(t, y) = \sqrt{|y|}$, che è continua in $\Omega = \mathbb{R}^2$, ma non è localmente lipschitziana in Ω. Quindi non possiamo applicare il Teorema di esistenza locale e unicità ad un qualunque dato iniziale (t_0, y_0). Vedremo nelle prossime lezioni cosa succede al problema di Cauchy in assenza dell'ipotesi di locale lipschitzianità.

Esercizio 3.9. Dimostrare che per ogni $b > 0$ non esiste alcuna costante $L \geq 0$ tale che

$$|\sqrt{|y|} - \sqrt{|z|}| \leq L|y - z| \quad \forall y, z \in [-b, b].$$

Vediamo un importante corollario del Teorema di esistenza locale e unicità.

Corollario 3.10. (Conseguenza dell'unicità della soluzione del problema di Cauchy). *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ un aperto, sia $f : \Omega \to \mathbb{R}^N$ continua e localmente lipschitziana in y, uniformemente in t, in Ω. Siano $u(t), v(t)$ due funzioni, definite entrambe in un intervallo I, tali che*

$$u'(t) = f(t, u(t)), \quad v'(t) = f(t, v(t)) \quad \forall t \in I.$$

Se esiste $t_0 \in I$ tale che $u(t_0) = v(t_0)$, allora $u(t) = v(t)$ per ogni $t \in I$.

Dimostrazione. Sia $y_0 := u(t_0) = v(t_0)$. Dal Teorema di esistenza locale e unicità, esiste $\delta > 0$ tale che nell'intervallo $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ esiste ed è unica la soluzione del problema di Cauchy con dato iniziale (t_0, y_0). Le funzioni u e v sono soluzioni di questo problema di Cauchy, e quindi coincidono in $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$.

Proviamo che $u(t) = v(t)$ per ogni $t \in I_+ := \{t \in I : t \geq t_0\}$.

Se $\sup I \leq t_0 + \delta$, allora $I_+ \subseteq [t_0, t_0 + \delta]$, e quindi $u = v$ in I_+.

Se invece $\sup I > t_0 + \delta$, consideriamo l'insieme

$$E = \{c \in I_+ : u(t) = v(t) \ \forall t \in [t_0, c]\}.$$

Si ha $E \neq \emptyset$ perché $t_0 + \delta \in E$. Sia $p := \sup E$, e supponiamo, per assurdo, che $p < \sup I_+$. Per definizione di p, si ha $u(t) = v(t)$ per ogni $t \in [t_0, p)$, e, poiché u

e v sono funzioni continue, $u(p) = v(p)$. Sia $y_1 := u(p) = v(p)$. Dal Teorema di esistenza locale e unicità, esiste $\delta_1 > 0$ tale che nell'intervallo $[p - \delta_1, p + \delta_1]$ esiste ed è unica la soluzione del problema di Cauchy con dato iniziale (p, y_1). Le funzioni u e v sono entrambe soluzioni di questo problema di Cauchy, e quindi coincidono nell'intervallo $[p - \delta_1, p + \delta_1]$. Dunque $u = v$ in $[t_0, p + \delta_1]$, contro la definizione di $p = \sup E$, assurdo. Questo dimostra che $p = \sup I_+$, e quindi $u = v$ su tutto I_+.

In modo simile si dimostra che u e v coincidono in $I_- = \{t \in I : t \leq t_0\}$. □

Vediamo un esempio.

Esercizio 3.11. Sia $u : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' = u^2 \sin(u), \\ u(t_0) = y_0 \end{cases}$$

con $0 < y_0 < \pi$. Dimostrare che $0 < u(t) < \pi$ per ogni $t \in I$.

Svolgimento. La funzione $v(t) = 0$ definita su $\mathbb{R}$ è soluzione dell'equazione differenziale $v' = v^2 \sin(v)$. Se fosse $u(t_1) = 0$ in un certo istante $t_1 \in I$, dal Corollario 3.10 avremmo $u(t) = v(t)$ per ogni $t \in I$. Ma in t_0 si ha $u(t_0) = y_0 > 0$ mentre $v(t_0) = 0$, quindi un tale t_1 non esiste. Poiché $u(t_0) = y_0 > 0$, e poiché u è continua, ne segue che $u(t) > 0$ per ogni $t \in I$.

In modo simile, osserviamo che la funzione $w(t) = \pi$ definita su $\mathbb{R}$ è soluzione dell'equazione differenziale $w' = w^2 \sin(w)$, e ne deduciamo che $u(t) < \pi$ per ogni $t \in I$. □

Il Corollario 3.10 impedisce che due soluzioni distinte si tocchino. Quindi la soluzione $u(t)$ dell'esercizio 3.11 è imprigionata tra gli equilibri $v(t) = 0$ e $w(t) = \pi$. Vedremo in seguito (criteri di prolungabilità) che in una situazione del genere la soluzione $u(t)$ è definita per ogni $t \in \mathbb{R}$ (esistenza globale).

4 Lezione 4

Lemma 4.1. (Regolarità delle soluzioni). *Supponiamo che valgano le ipotesi del Teorema di esistenza locale e unicità, e sia inoltre $f \in C^k(\Omega)$, per un certo k intero positivo. Allora la soluzione u è di classe C^{k+1} nell'intervallo $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$. Se $f \in C^\infty(\Omega)$, allora $u \in C^\infty$.*

Dimostrazione. Sia $f \in C^k(\Omega)$ per un certo $k \geq 1$. Poiché f è continua, dal Teorema di esistenza locale e unicità (Teorema 2.1), ricordando anche il Lemma di formulazione integrale del problema di Cauchy (Lemma 1.10), sappiamo che la soluzione u è di classe C^1.

Poiché f e u sono entrambe di classe C^1, la loro composizione $f(t, u(t))$ è C^1. Poi $u'(t) = f(t, u(t))$, da cui $u' \in C^1$. Abbiamo provato che $u \in C^2$.

Iteriamo questo ragionamento: supponiamo di avere dimostrato che $u \in C^n$ per un certo $n \geq 2$. Per ipotesi, $f \in C^k$. Se $k \geq n$, allora sia f che u sono di classe C^n, e la composizione $f(t, u(t))$ è C^n. Poi $u'(t) = f(t, u(t))$, quindi $u' \in C^n$, cioè $u \in C^{n+1}$.

In questo modo, per induzione, abbiamo dimostrato che $u \in C^{n+1}$ per ogni $n \leq k$, cioè che $u \in C^{k+1}$. Notiamo che il ragionamento non può proseguire oltre: $u \in C^{k+1}$, ma per ipotesi $f \in C^k$, quindi la composizione è soltanto C^k, e non C^{k+1}.

Se $f \in C^\infty$, l'argomento induttivo non ha la restrizione $n \leq k$ e quindi si ha $u \in C^n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, cioè $u \in C^\infty$. $\square$

Osservazione 4.2. Il tipo di procedimento usato nella dimostrazione del Lemma 4.1 viene spesso chiamato *bootstrap*.

Cosa succede quando manca l'ipotesi di locale lipschitzianità per il campo f? L'esistenza della soluzione rimane intatta (Teorema di esistenza di Peano, vedi poco più sotto), ma non è più garantita l'unicità della soluzione, come mostra il famoso esempio seguente.

Il pennello di Peano: esistenza senza unicità. Il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' = \sqrt{|u|} \\ u(0) = 0 \end{cases}$$

ha la soluzione $u(t) = 0$, $t \in \mathbb{R}$. D'altra parte, anche la funzione

$$v(t) = \begin{cases} \frac{1}{4}t^2 & \text{se } t \geq 0, \\ 0 & \text{se } t < 0 \end{cases}$$

è soluzione, e, più in generale, per ogni $\lambda > 0$ la funzione

$$v_\lambda(t) = \begin{cases} \frac{1}{4}(t-\lambda)^2 & \text{se } t \geq \lambda, \\ 0 & \text{se } t < \lambda \end{cases}$$

è soluzione (farne la verifica diretta). Il problema di Cauchy ha infinite soluzioni.

Teorema 4.3. (Teorema di esistenza di Peano). *Sia $t_0 \in \mathbb{R}$, $y_0 \in \mathbb{R}^N$,*

$$I = [t_0 - a, t_0 + a], \quad J = \{y \in \mathbb{R}^N : |y - y_0| \leq b\} = \overline{B(y_0, b)},$$

con $a > 0$, $b > 0$. Sia $f : I \times J \to \mathbb{R}^N$ una funzione continua. Allora esiste $\delta > 0$ tale che il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' = f(t, u) \\ u(t_0) = y_0 \end{cases} \tag{4.1}$$

ha una soluzione definita nell'intervallo $I_\delta = [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$. Inoltre si può prendere

$$\delta = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\} \tag{4.2}$$

dove

$$M = \max\{|f(t, y)| : (t, y) \in I \times J\} \tag{4.3}$$

(se $M = 0$, prendere $\delta = a$).

Per dimostrare il Teorema di esistenza di Peano ci serve un altro risultato classico e importante, il Teorema di Ascoli-Arzelà.

Teorema 4.4. (Teorema di Ascoli-Arzelà). *Sia $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}^N$, $n \in \mathbb{N}$, una successione di funzioni*

- equilimitata*, cioè esiste* $M > 0$ *tale che*

$$|f_n(x)| \leq M \quad \forall x \in [a,b],\ \forall n \in \mathbb{N};$$

- equicontinua*, cioè per ogni* $\varepsilon > 0$ *esiste* $\delta > 0$ *tale che*

$$|f_n(x) - f_n(y)| \leq \varepsilon \quad \forall x, y \in [a,b],\ |x-y| \leq \delta,\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Allora (f_n) *ammette una sottosuccessione che converge uniformemente in* $[a,b]$.

Dimostrazione. Sia $\mathcal{D} = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$ un sottoinsieme denso e numerabile dell'intervallo $[a,b]$, per esempio $\mathcal{D} = [a,b] \cap \mathbb{Q}$.

Dall'ipotesi di equilimitatezza, la successione $(f_n(x_1))$ (la successione ottenuta valutando tutte le f_n nel punto x_1) è limitata, $|f_n(x_1)| \leq M$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Quindi (Bolzano-Weierstrass) esiste una sua sottosuccessione convergente, cioè esiste una successione strettamente crescente di naturali

$$S_1 = (n(1,1), n(1,2), n(1,3), n(1,4), \ldots) \subseteq \mathbb{N}$$

tale che la successione

$$(f_{n(1,k)}(x_1))_{k \in \mathbb{N}} = (f_{n(1,1)}(x_1), f_{n(1,2)}(x_1), f_{n(1,3)}(x_1), f_{n(1,4)}(x_1), \ldots)$$

converge. Chiamiamo

$$y_1 := \lim_{k \to \infty} f_{n(1,k)}(x_1),$$

e osserviamo che $|y_1| \leq M$.

Ora consideriamo la successione di funzioni

$$(f_n)_{n \in S_1} = (f_{n(1,k)})_{k \in \mathbb{N}} = (f_{n(1,1)}, f_{n(1,2)}, f_{n(1,3)}, \ldots),$$

e valutiamola nel punto x_2. Anche $(f_n(x_2))_{n \in S_1}$ è una successione limitata, quindi ammette una sottosuccessione convergente, cioè esiste una successione strettamente crescente di naturali

$$S_2 = (n(2,1), n(2,2), n(2,3), n(2,4), \ldots) \subseteq S_1$$

tale che la successione

$$(f_{n(2,k)}(x_2))_{k \in \mathbb{N}} = (f_{n(2,1)}(x_2), f_{n(2,2)}(x_2), f_{n(2,3)}(x_2), f_{n(2,4)}(x_2), \ldots)$$

converge. Chiamiamo

$$y_2 := \lim_{k \to \infty} f_{n(2,k)}(x_2),$$

e osserviamo che $|y_2| \leq M$. Osserviamo inoltre che

$$\lim_{k \to \infty} f_{n(2,k)}(x_1) = y_1,$$

perché $(f_n(x_1))_{n \in S_1}$ è successione che converge a y_1, e $(f_n(x_1))_{n \in S_2}$ è una sua sottosuccessione.

Ora consideriamo la successione $(f_n)_{n \in S_2}$ che abbiamo appena ottenuto, e la valutiamo nel punto x_3: anche $(f_n(x_3))_{n \in S_2}$ è successione limitata, quindi ammette una sottosuccessione convergente, cioè esiste una successione strettamente crescente di naturali

$$S_3 = (n(3,1), n(3,2), n(3,3), n(3,4), \ldots) \subseteq S_2$$

tale che la successione

$$(f_{n(3,k)}(x_3))_{k\in\mathbb{N}} = (f_{n(3,1)}(x_3), f_{n(3,2)}(x_3), f_{n(3,3)}(x_3), f_{n(3,4)}(x_3), \ldots)$$

converge. Chiamiamo

$$y_3 := \lim_{k\to\infty} f_{n(3,k)}(x_3),$$

e osserviamo che $|y_3| \leq M$. Osserviamo inoltre che

$$\lim_{k\to\infty} f_{n(3,k)}(x_1) = y_1, \quad \lim_{k\to\infty} f_{n(3,k)}(x_2) = y_2,$$

perché $(f_n(x_1))_{n\in S_2}$ converge a y_1 e $(f_n(x_1))_{n\in S_3}$ è una sua sottosuccessione, e similmente $(f_n(x_2))_{n\in S_2}$ converge a y_2 e $(f_n(x_2)_{n\in S_3}$ è una sua sottosuccessione.

Procediamo in questo modo, e otteniamo infinite successioni strettamente crescenti di naturali

$$S_1 \supseteq S_2 \supseteq S_3 \supseteq S_4 \supseteq \ldots,$$

i cui elementi sono indicati

$$S_p = (n(p,1), n(p,2), n(p,3), n(p,4), \ldots) = (n(p,k))_{k\in\mathbb{N}}, \quad \forall p \geq 1,$$

con la proprietà che la successione $(f_n)_{n\in S_p}$ valutata nei punti $x_1, x_2, \ldots, x_p$ converge a $y_1, y_2, \ldots, y_p$ rispettivamente, cioè

$$\lim_{k\to\infty} f_{n(p,k)}(x_1) = y_1, \quad \lim_{k\to\infty} f_{n(p,k)}(x_2) = y_2, \quad \ldots \quad \lim_{k\to\infty} f_{n(p,k)}(x_p) = y_p.$$

Ora consideriamo la successione "diagonale" di naturali che otteniamo prendendo il primo elemento di S_1, il secondo elemento di S_2, il terzo elemento di S_3, eccetera: definiamo

$$D_0 := (n(1,1), n(2,2), n(3,3), n(4,4), \ldots) = (n(k,k))_{k\in\mathbb{N}}.$$

Osserviamo che

$$(n(1,1), n(2,2), n(3,3), n(4,4), \ldots) \subseteq S_1$$

perché $n(1,1) \in S_1$, $n(2,2) \in S_2 \subseteq S_1$, $n(3,3) \in S_3 \subseteq S_2 \subseteq S_1$, eccetera; inoltre osserviamo che

$$(n(2,2), n(3,3), n(4,4), \ldots) \subseteq S_2$$

perché $n(2,2) \in S_2$, $n(3,3) \in S_3 \subseteq S_2$, $n(4,4) \in S_4 \subseteq S_3 \subseteq S_2$, eccetera; similmente,

$$(n(3,3), n(4,4), \ldots) \subseteq S_3$$

e, più in generale, per ogni $p \geq 1$ si ha

$$(n(p,p), n(p+1,p+1), \ldots) = (n(k,k))_{k\geq p} \subseteq S_p.$$

In altre parole, D_0 è definitivamente contenuta in S_p, per ogni $p \geq 1$.

Di conseguenza, per ogni $p \geq 1$, la successione

$$(f_{n(k,k)}(x_p))_{k\geq p} = (f_{n(p,p)}(x_p), f_{n(p+1,p+1)}(x_p), f_{n(p+2,p+2)}(x_p), \ldots) \tag{4.4}$$

è una sottosuccessione di $(f_n(x_p))_{n\in S_p}$. Come già osservato, $(f_n(x_p))_{n\in S_p}$ converge a y_p, quindi anche la successione (4.4), essendo sua sottosuccessione, converge a y_p. Perciò

$$\lim_{k\to\infty} f_{n(k,k)}(x_p) = y_p.$$

Abbiamo dimostrato che la successione $(f_n(x_p))_{n\in D_0}$ converge a y_p, per ogni $p \in \mathbb{N}$. In altre parole, se indichiamo

$$g_k := f_{n(k,k)},$$

abbiamo dimostrato che $\lim_{(k\to\infty)} g_k(x_p) = y_p$ per ogni p, cioè (g_k) converge puntualmente in ogni punto dell'insieme $\mathcal{D} = \{x_1, x_2, \ldots\}$.

Resta da dimostrare che (g_k) converge uniformemente in $[a, b]$. Sia $\varepsilon > 0$. Dall'ipotesi di equicontinuità, esiste $\delta > 0$ tale che

$$|f_n(x) - f_n(y)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall x, y \in [a, b], \ \ |x - y| < \delta, \ \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Questa disguguaglianza vale, in particolare, per gli indici $n \in D_0$:

$$|f_{n(k,k)}(x) - f_{n(k,k)}(y)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall x, y \in [a, b], \ \ |x - y| < \delta, \ \ \forall k \in \mathbb{N},$$

cioè

$$|g_k(x) - g_k(y)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall x, y \in [a, b], \ \ |x - y| < \delta, \ \ \forall k \in \mathbb{N}. \tag{4.5}$$

Poiché $\mathcal{D}$ è denso in $[a, b]$, per ogni $x \in [a, b]$ esiste un punto $x_j \in \mathcal{D}$ tale che $|x - x_j| < \delta$, quindi $x \in (x_j - \delta, x_j + \delta)$. Di conseguenza,

$$[a, b] \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} (x_j - \delta, x_j + \delta).$$

Per compattezza di $[a, b]$, esiste un sottoricoprimento finito,

$$[a, b] \subseteq \bigcup_{j=1}^{q} (x_j - \delta, x_j + \delta).$$

Poiché $(g_k(x_1))$ è convergente, esiste $\bar{k}_1 \in \mathbb{N}$ tale che

$$|g_k(x_1) - g_j(x_1)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall k, j \geq \bar{k}_1.$$

Similmente, per ogni $\ell = 2, \ldots, q$ esiste $\bar{k}_\ell$ tale che

$$|g_k(x_\ell) - g_j(x_\ell)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall k, j \geq \bar{k}_\ell.$$

Sia $\bar{k} := \max\{\bar{k}_1, \ldots, \bar{k}_q\}$, cosicché

$$|g_k(x_\ell) - g_j(x_\ell)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall k, j \geq \bar{k}, \ \ \forall \ell = 1, \ldots, q. \tag{4.6}$$

Ora sia $x \in [a, b]$. Allora $x \in (x_\ell - \delta, x_\ell + \delta)$ per un certo $\ell \in \{1, \ldots, q\}$. Allora, usando (4.5) e (4.6),

$$|g_k(x) - g_j(x)| \leq |g_k(x) - g_k(x_\ell)| + |g_k(x_\ell) - g_j(x_\ell)| + |g_j(x_\ell) - g_j(x)| < \varepsilon \quad \forall k, j \geq \bar{k}.$$

Abbiamo dimostrato che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\bar{k} \in \mathbb{N}$ tale che $|g_k(x) - g_j(x)| < \varepsilon$ per ogni $k, j \geq \bar{k}$, per ogni $x \in [a, b]$. Dunque la successione (g_k) è uniformemente di Cauchy in $[a, b]$, e quindi converge uniformemente in $[a, b]$. $\square$

Nell'ultimo passaggio della dimostrazione appena conclusa abbiamo usato il fatto che se una successione è uniformemente di Cauchy allora converge uniformemente, o, in altre parole, che lo spazio vettoriale delle funzioni continue su $[a, b]$ con la norma del sup è uno spazio di Banach: vedi Proposizione 4.5 poco sotto.

Riportiamo anche l'esempio numerico fatto a lezione per aiutare a seguire la costruzione delle sottosuccessioni $S_1 \supseteq S_2 \supseteq S_3 \supseteq \ldots$ nella dimostrazione del Teorema di Ascoli-Arzelà: partiamo dalla successione $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} = (f_1, f_2, f_3, \ldots)$, da questa estraiamo la prima sottosuccessione, diciamo, per esempio,

$$(f_n)_{n\in S_1} = (f_{n(1,k)})_{k\in\mathbb{N}} = (f_3, f_7, f_{11}, f_{12}, f_{15}, f_{20}, f_{21}, f_{22}, f_{28}, f_{30}, f_{32}, f_{37}, f_{42}, f_{43},\\ f_{50}, f_{54}, f_{70}, f_{80}, f_{81}, f_{90}, f_{103}, \ldots)$$

cosicché S_1 è la successione di naturali

$$S_1 = (3,\ 7,\ 11,\ 12,\ 15,\ 20,\ 21,\ 22,\ 28,\ 30,\ 32,\ 37,\ 42,\ 43,\ 50,\ 54,\ 70,\\ 80,\ 81,\ 90,\ 103,\ \ldots),$$

$$\begin{array}{lllll} n(1,1) = 3, & n(1,2) = 7, & n(1,3) = 11, & n(1,4) = 12, & n(1,5) = 15, \\ n(1,6) = 20, & n(1,7) = 21, & n(1,8) = 22, & n(1,9) = 28, & n(1,10) = 30, \\ n(1,11) = 32, & n(1,12) = 37, & n(1,13) = 42, & n(1,14) = 43, & n(1,15) = 50, \\ n(1,16) = 54, & n(1,17) = 70, & n(1,18) = 80, & n(1,19) = 81, & n(1,20) = 90, \\ n(1,21) = 103, & \ldots \end{array}$$

Da S_1 estraiamo la seconda successione $S_2 \subseteq S_1$, diciamo

$$S_2 = (7,\ 12,\ 20,\ 28,\ 30,\ 37,\ 43,\ 70,\ 80,\ 90,\ 103,\ \ldots),$$

$$\begin{array}{lllll} n(2,1) = 7, & n(2,2) = 12, & n(2,3) = 20, & n(2,4) = 28, & n(2,5) = 30, \\ n(2,6) = 37, & n(2,7) = 43, & n(2,8) = 70, & n(2,9) = 80, & n(2,10) = 90, \\ n(2,11) = 103, & \ldots, \end{array}$$

$$(f_n)_{n\in S_2} = (f_{n(2,k)})_{k\in\mathbb{N}} = (f_7, f_{12}, f_{20}, f_{28}, f_{30}, f_{37}, f_{43}, f_{70}, f_{80}, f_{90}, f_{103}, \ldots).$$

Poi da S_2 estraiamo la terza successione $S_3 \subseteq S_2$, diciamo

$$S_3 = (20,\ 30,\ 43,\ 80,\ 103,\ \ldots),$$

$$n(3,1) = 20, \quad n(3,2) = 30, \quad n(3,3) = 43, \quad n(3,4) = 80, \quad n(3,5) = 103, \ \ldots,$$
$$(f_n)_{n\in S_3} = (f_{n(3,k)})_{k\in\mathbb{N}} = (f_{20}, f_{30}, f_{43}, f_{80}, f_{103}, \ldots).$$

Da S_3 estraiamo la quarta successione $S_4 \subseteq S_3$, diciamo

$$S_4 = (20,\ 30,\ 80,\ 103,\ \ldots),$$

$$n(4,1) = 20, \quad n(4,2) = 30, \quad n(4,3) = 80, \quad n(4,4) = 103, \ \ldots,$$
$$(f_n)_{n\in S_4} = (f_{n(4,k)})_{k\in\mathbb{N}} = (f_{20}, f_{30}, f_{80}, f_{103}, \ldots),$$

eccetera. La successione diagonale D_0 è dunque

$$D_0 = (n(1,1), n(2,2), n(3,3), n(4,4), \ldots) = (3,\ 12,\ 43,\ 103,\ \ldots)$$

e

$$(f_n)_{n\in D_0} = (f_{n(k,k)})_{k\in\mathbb{N}} = (f_3, f_{12}, f_{43}, f_{103}, \ldots),$$

$$g_1 = f_{n(1,1)} = f_3, \qquad g_2 = f_{n(2,2)} = f_{12}, \quad g_3 = f_{n(3,3)} = f_{43},$$
$$g_4 = f_{n(4,4)} = f_{103}, \quad \ldots$$

Osserviamo che

$$(g_1, g_2, g_3, g_4, \ldots) = (f_3, f_{12}, f_{43}, f_{103}, \ldots) \subseteq (f_n)_{n\in S_1};$$

g_1 non è elemento della successione $(f_n)_{n\in S_2}$, ma da g_2 in poi si ha

$$(g_2, g_3, g_4, \ldots) = (f_{12}, f_{43}, f_{103}, \ldots) \subseteq (f_n)_{n\in S_2};$$

g_1, g_2 non sono elementi della successione $(f_n)_{n\in S_3}$, ma da g_3 in poi si ha

$$(g_3, g_4, \ldots) = (f_{43}, f_{103}, \ldots) \subseteq (f_n)_{n\in S_3};$$

g_1, g_2, g_3 non sono elementi della successione $(f_n)_{n\in S_4}$, ma da g_4 in poi si ha

$$(g_4, \ldots) = (f_{103}, \ldots) \subseteq (f_n)_{n\in S_4};$$

in generale, $(g_k)_{k\geq p} \subseteq (f_n)_{n\in S_p}$. Fine dell'esempio.

Proposizione 4.5. *Lo spazio vettoriale*

$$C([a,b], \mathbb{R}^N) = \{f : [a,b] \to \mathbb{R}^N,\ f \ \textit{continua}\}$$

munito della norma del sup

$$\|f\|_\infty = \|f\|_{\infty,[a,b]} = \sup\{|f(x)| : x \in [a,b]\}$$

è uno spazio di Banach.

Dimostrazione. Che $C([a,b], \mathbb{R}^N)$ sia spazio vettoriale è immediato, e che $\|\cdot\|_\infty$ sia una norma è una facile verifica; resta da dimostrare la completezza.

Sia (f_n) una successione di Cauchy in $C([a,b])$, cioè per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $\|f_n - f_m\|_\infty \leq \varepsilon$ per ogni $n, m \geq \bar{n}$. Per ogni punto $x \in [a,b]$ si ha

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|_\infty \leq \varepsilon \quad \forall n, m \geq \bar{n}. \tag{4.7}$$

Dunque la successione $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy in $\mathbb{R}^N$, che è completo; quindi $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge in $\mathbb{R}^N$. Diciamo $f(x)$ il suo limite, $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. Dimostriamo che $f_n \to f$ uniformemente in $[a,b]$.

Sia $\varepsilon > 0$. Come già osservato, esiste $\bar{n}$ tale che valga (4.7). Sia $n \geq \bar{n}$ e $x \in [a,b]$. Allora $f_m(x) \in \overline{B(f_n(x), \varepsilon)}$ (palla chiusa di centro $f_n(x)$ e raggio ε) per ogni $m \geq \bar{n}$. È successione convergente, quindi anche il suo limite $f(x) = \lim_{(m\to\infty)} f_m(x)$

appartiene alla stessa palla, cioè $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$. Poiché questo vale per ogni $x \in [a, b]$, ne segue che

$$\|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon \quad \forall n \geq \bar{n}.$$

Abbiamo dimostrato che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $\|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon$ per ogni $n \geq \bar{n}$, cioè che $\lim_{(n\to\infty)} \|f_n - f\|_\infty = 0$, cioè che f_n converge a f uniformemente in $[a, b]$.

Infine f è continua in $[a, b]$ in quanto limite uniforme di una successione di funzioni continue in $[a, b]$ (Analisi 2). □

Osservazione 4.6. Nella dimostrazione della Proposizione 4.5 abbiamo usato la completezza di $\mathbb{R}^N$, e nessun'altra proprietà di $\mathbb{R}^N$; per questo, la stessa dimostrazione vale se al posto di $\mathbb{R}^N$ come codominio delle funzioni f_n abbiamo un qualunque altro spazio di Banach Y.

5 Lezione 5

Dimostrazione del Teorema di esistenza di Peano (Teorema 4.3). Siano a, b, M, δ come nell'enunciato. Costruiamo una successione (u_n) di funzioni lineari a tratti e dimostriamo che converge a una soluzione del problema di Cauchy.

Passo 1: definizione di u_n. Consideriamo l'intervallo $[t_0, t_0 + \delta]$ (nell'intervallo $[t_0 - \delta, t_0]$ la dimostrazione procede in modo simile). Fissiamo n intero positivo, e dividiamo $[t_0, t_0 + \delta]$ in n parti uguali, cioè in n sottointervalli

$$[t_0^{(n)}, t_1^{(n)}], \quad [t_1^{(n)}, t_2^{(n)}], \quad \dots \quad [t_{n-1}^{(n)}, t_n^{(n)}],$$

ciascuno di lunghezza δ/n, dove

$$t_k^{(n)} := t_0 + k\frac{\delta}{n}, \qquad k = 0, \dots, n.$$

Sul primo intervallo definiamo

$$u_n(t) := y_0 + f(t_0, y_0)(t - t_0) \quad \forall t \in [t_0, t_1^{(n)}], \tag{5.1}$$

$$y_1^{(n)} := u_n(t_1^{(n)}). \tag{5.2}$$

Dunque

$$y_1^{(n)} = y_0 + f(t_0, y_0)\frac{\delta}{n}, \tag{5.3}$$

e, poiché $|f(t_0, y_0)| \leq M$, si ha

$$|y_1^{(n)} - y_0| = |f(t_0, y_0)|\frac{\delta}{n} \leq M\frac{\delta}{n}.$$

Quindi $|y_1^{(n)} - y_0| \leq M\delta/n \leq M\delta \leq b$, perciò $y_1^{(n)} \in J$, e la coppia $(t_1^{(n)}, y_1^{(n)})$ appartiene al dominio $I \times J$ del campo f. Per $n \geq 2$, gli intervalli in cui definire u_n sono almeno due; essendo $f(t_1^{(n)}, y_1^{(n)})$ ben definito, possiamo "aggiornare" in $t_1^{(n)}$ i valori del dato y e del campo f per definire u_n sul secondo intervallo: definiamo

$$u_n(t) := y_1^{(n)} + f(t_1^{(n)}, y_1^{(n)})(t - t_1^{(n)}) \quad \forall t \in [t_1^{(n)}, t_2^{(n)}],$$

$$y_2^{(n)} := u_n(t_2^{(n)}).$$

Osserviamo che, usando la (5.3), si ha

$$\begin{aligned} y_2^{(n)} &= y_1^{(n)} + f(t_1^{(n)}, y_1^{(n)})\frac{\delta}{n} \\ &= y_0 + \Big(f(t_0, y_0) + f(t_1^{(n)}, y_1^{(n)})\Big)\frac{\delta}{n}. \end{aligned}$$

Quindi, ricordando che $|f(t,y)| \le M$ per ogni $(t,y) \in I \times J$,

$$|y_2^{(n)} - y_1^{(n)}| \le M\frac{\delta}{n}, \qquad |y_2^{(n)} - y_0| \le 2M\frac{\delta}{n}. \tag{5.4}$$

Di conseguenza $|y_2^{(n)} - y_0| \le 2M\delta/n \le M\delta \le b$, dunque $y_2^{(n)} \in J$, $f(t_2^{(n)}, y_2^{(n)})$ è ben definito, e, per $n \ge 3$, possiamo "aggiornare" il dato y e il campo f per definire u_n sul terzo intervallo, e così via.

Vediamo in generale il passo induttivo: supponiamo di avere definito u_n sugli intervalli $[t_0, t_1^{(n)}]$, …, $[t_{k-1}^{(n)}, t_k^{(n)}]$, per un certo $k \le n-1$, con

$$u_n(t) := y_j^{(n)} + f(t_j^{(n)}, y_j^{(n)})(t - t_j^{(n)}) \quad \forall t \in [t_j^{(n)}, t_{j+1}^{(n)}], \quad \forall j = 0, \dots, k-1,$$

$$y_j^{(n)} := u_n(t_j^{(n)}) \quad \forall j = 1, \dots, k,$$

e supponiamo di avere osservato che

$$\begin{aligned} y_k^{(n)} &= y_{k-1}^{(n)} + f(t_{k-1}^{(n)}, y_{k-1}^{(n)})\frac{\delta}{n} \\ &= y_0 + \Big(f(t_0, y_0) + f(t_1^{(n)}, y_1^{(n)}) + \ldots + f(t_{k-1}^{(n)}, y_{k-1}^{(n)})\Big)\frac{\delta}{n} \end{aligned}$$

e

$$|y_k^{(n)} - y_j^{(n)}| \le M(k-j)\frac{\delta}{n} \quad \forall j = 0, \dots, k$$

(dove $y_0^{(n)} := y_0$). Allora $|y_k^{(n)} - y_0| \le Mk\delta/n \le M\delta \le b$, e $y_k^{(n)} \in J$. Quindi $f(t_k^{(n)}, y_k^{(n)})$ è ben definito, e possiamo proseguire a definire u_n sull'intervallo successivo: definiamo

$$u_n(t) := y_k^{(n)} + f(t_k^{(n)}, y_k^{(n)})(t - t_k^{(n)}) \quad \forall t \in [t_k^{(n)}, t_{k+1}^{(n)}],$$

$$y_{k+1}^{(n)} := u_n(t_{k+1}^{(n)}).$$

Usando le ipotesi induttive, osserviamo che

$$\begin{aligned} y_{k+1}^{(n)} &= y_k^{(n)} + f(t_k^{(n)}, y_k^{(n)})\frac{\delta}{n} \\ &= y_0 + \Big(f(t_0, y_0) + \ldots + f(t_k^{(n)}, y_k^{(n)})\Big)\frac{\delta}{n} \end{aligned}$$

e, per ogni $0 \le j \le k$,

$$\begin{aligned} |y_{k+1}^{(n)} - y_j^{(n)}| &\le |y_{k+1}^{(n)} - y_k^{(n)}| + |y_k^{(n)} - y_j^{(n)}| \\ &\le M\frac{\delta}{n} + M(k-j)\frac{\delta}{n} = M(k+1-j)\frac{\delta}{n}, \end{aligned}$$

mentre per $j = k+1$ la disuguaglianza $|y_{k+1}^{(n)} - y_j^{(n)}| \leq M(k+1-j)\delta/n$ è banalmente vera. Questo dimostra il passo induttivo. Dunque, per induzione, u_n è ben definita su tutti gli intervalli $[t_0, t_1^{(n)}]$, ..., $[t_{n-1}^{(n)}, t_n^{(n)}]$, cioè su tutto $[t_0, t_0+\delta]$.

In conclusione, abbiamo

$$u_n(t) = y_k^{(n)} + f(t_k^{(n)}, y_k^{(n)})(t - t_k^{(n)}) \quad \forall t \in [t_k^{(n)}, t_{k+1}^{(n)}], \quad \forall k = 0, \dots, n-1, \tag{5.5}$$

$$y_k^{(n)} = u_n(t_k^{(n)}) \quad \forall k = 1, \dots, n, \tag{5.6}$$

$$\begin{aligned} y_k^{(n)} &= y_{k-1}^{(n)} + f(t_{k-1}^{(n)}, y_{k-1}^{(n)})\frac{\delta}{n} \\ &= y_0 + \Big(f(t_0, y_0) + f(t_1^{(n)}, y_1^{(n)}) + \ldots + f(t_{k-1}^{(n)}, y_{k-1}^{(n)})\Big)\frac{\delta}{n} \quad \forall k = 1, \dots, n, \end{aligned} \tag{5.7}$$

$$|y_k^{(n)} - y_j^{(n)}| \leq M(k-j)\frac{\delta}{n} \quad \forall k, j \in \{0, \dots, n\},\ j \leq k. \tag{5.8}$$

Passo 2: applicazione di Ascoli-Arzelà. Per ogni $k = 0, \dots, n-1$, per ogni $t \in [t_k^{(n)}, t_{k+1}^{(n)}]$, usando (5.5) e (5.8), e ricordando che $M = \max\{|f(t,y)| : (t,y) \in I \times J\}$, si ha

$$\begin{aligned} |u_n(t)| &\leq |u_n(t) - y_k^{(n)}| + |y_k^{(n)} - y_0| + |y_0| \\ &\leq |f(t_k^{(n)}, y_k^{(n)})(t - t_k^{(n)})| + Mk\frac{\delta}{n} + |y_0| \\ &\leq M\frac{\delta}{n} + Mk\frac{\delta}{n} + |y_0| \leq M\delta + |y_0|. \end{aligned}$$

Dunque

$$|u_n(t)| \leq M\delta + y_0 \quad \forall t \in [t_0, t_0+\delta], \quad \forall n \geq 1,$$

cosicché la successione (u_n) è equilimitata in $[t_0, t_0+\delta]$.

Dimostriamo che (u_n) è anche equicontinua. Siano $t, \tau \in [t_0, t_0+\delta]$, e sia $n \geq 1$. Se t e τ appartengono a uno stesso intervallo $[t_k^{(n)}, t_{k+1}^{(n)}]$, allora da (5.5) segue che

$$|u_n(t) - u_n(\tau)| = |f(t_k^{(n)}, y_k^{(n)})(t - \tau)| \leq M|t - \tau|.$$

Se invece t e τ non appartengono allo stesso intervallo, si ha

$$\tau \in [t_j^{(n)}, t_{j+1}^{(n)}], \quad t \in [t_k^{(n)}, t_{k+1}^{(n)}]$$

per certi $j, k \in \{0, \dots, n-1\}$, con $j \neq k$. Supponiamo che sia $j < k$. Allora $\tau \leq t_{j+1}^{(n)} \leq t_k^{(n)} \leq t$, e

$$|u_n(t) - u_n(\tau)| \leq |u_n(t) - u_n(t_k^{(n)})| + |u_n(t_k^{(n)}) - u_n(t_{j+1}^{(n)})| + |u_n(t_{j+1}^{(n)}) - u_n(\tau)|.$$

Poiché $t \in [t_k^{(n)}, t_{k+1}^{(n)}]$, da (5.5) segue che

$$|u_n(t) - u_n(t_k^{(n)})| \leq M|t - t_k^{(n)}| = M(t - t_k^{(n)}).$$

Poiché $\tau \in [t_j^{(n)}, t_{j+1}^{(n)}]$, da (5.5) segue che

$$|u_n(t_{j+1}^{(n)}) - u_n(\tau)| \leq M|t_{j+1}^{(n)} - \tau| = M(t_{j+1}^{(n)} - \tau).$$

Da (5.8),

$$|u_n(t_k^{(n)}) - u_n(t_{j+1}^{(n)})| = |y_k^{(n)} - y_{j+1}^{(n)}| \leq M(k-j-1)\frac{\delta}{n} = M(t_k^{(n)} - t_{j+1}^{(n)}).$$

Sommando le stime dei tre termini otteniamo

$$|u_n(t) - u_n(\tau)| \leq M(t-\tau).$$

Perciò in ogni caso si ha

$$|u_n(t) - u_n(\tau)| \leq M|t-\tau| \quad \forall t, \tau \in [t_0, t_0+\delta], \quad \forall n \geq 1.$$

Tutte le funzioni u_n sono lipschitziane in $[t_0, t_0+\delta]$ con la stessa costante di Lipschitz M, e dunque la successione (u_n) è equicontinua in $[t_0, t_0+\delta]$.

Dal Teorema di Ascoli-Arzelà, esiste una sottosuccessione di (u_n), che indichiamo ancora (u_n), che converge uniformemente in $[t_0, t_0+\delta]$. Indichiamo u il suo limite uniforme. Poiché ogni u_n è continua, anche u è continua.

Passo 3: u è soluzione. Dimostriamo che $u_n(t)$ converge uniformemente a

$$y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, u(s))\, ds.$$

Poiché $u_n(t)$ converge a $u(t)$, l'unicità del limite e la formulazione integrale del problema di Cauchy daranno la tesi.

Sia $\varepsilon > 0$. Dalla uniforme continuità di f in $I \times J$ esiste $\delta_0 > 0$ tale che

$$|f(t,y) - f(s,z)| \leq \frac{\varepsilon}{\delta} \quad \forall (t,y), (s,z) \in I \times J, \quad |t-s| + |y-z| \leq \delta_0.$$

Poiché $u_n \to u$ uniformemente, esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che

$$(M+1)\frac{\delta}{n} + \|u_n - u\|_\infty \leq \delta_0 \quad \forall n \geq \bar{n},$$

dove $\| \ \|_\infty$ indica la sup-norma su $[t_0, t_0+\delta]$.

Sia $n \geq \bar{n}$, sia $0 \leq j \leq n-1$, e sia $s \in [t_j^{(n)}, t_{j+1}^{(n)}]$. Stimiamo la distanza tra i punti $(s, u(s))$ e $(t_j^{(n)}, y_j^{(n)})$:

$$\begin{aligned}
|s - t_j^{(n)}| + |u(s) - y_j^{(n)}| &\leq \frac{\delta}{n} + |u(s) - u_n(s)| + |u_n(s) - u_n(t_j^{(n)})| \\
&\leq \frac{\delta}{n} + \|u - u_n\|_\infty + |f(t_j^{(n)}, y_j^{(n)})(s - t_j^{(n)})| \\
&\leq \frac{\delta}{n} + \|u - u_n\|_\infty + M\frac{\delta}{n} \\
&\leq \delta_0.
\end{aligned}$$

Di conseguenza per ogni $s \in [t_j^{(n)}, t_{j+1}^{(n)}]$, $j = 0, \ldots, n-1$, $n \geq \bar{n}$ si ha

$$|f(s, u(s)) - f(t_j^{(n)}, y_j^{(n)})| \leq \frac{\varepsilon}{\delta}. \tag{5.9}$$

Sia ora $n \geq \bar{n}$, $k \in \{0, \ldots, n-1\}$, e $t \in [t_k^{(n)}, t_{k+1}^{(n)}]$. Usando (5.5) e (5.7) si ha

$$u_n(t) = y_0 + \Big(f(t_0, y_0) + \ldots + f(t_{k-1}^{(n)}, y_{k-1}^{(n)})\Big)\frac{\delta}{n} + f(t_k^{(n)}, y_k^{(n)})(t - t_k^{(n)}).$$

Ricordando che $t_{j+1}^{(n)} - t_j^{(n)} = \delta/n$ per ogni j, possiamo riscrivere l'ultima identità come

$$u_n(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t_1^{(n)}} f(t_0, y_0)\, ds + \ldots + \int_{t_{k-1}^{(n)}}^{t_k^{(n)}} f(t_{k-1}^{(n)}, y_{k-1}^{(n)})\, ds + \int_{t_k^{(n)}}^{t} f(t_k^{(n)}, y_k^{(n)})\, ds.$$

D'altra parte, spezzando l'integrale sui vari intervalli, si ha

$$\int_{t_0}^{t} f(s, u(s))\, ds = \int_{t_0}^{t_1^{(n)}} f(s, u(s))\, ds + \ldots + \int_{t_{k-1}^{(n)}}^{t_k^{(n)}} f(s, u(s))\, ds + \int_{t_k^{(n)}}^{t} f(s, u(s))\, ds.$$

Quindi

$$\begin{aligned}
&y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, u(s))\, ds - u_n(t) \\
&= \int_{t_0}^{t_1^{(n)}} \Big(f(s, u(s)) - f(t_0, y_0)\Big)\, ds + \ldots + \int_{t_{k-1}^{(n)}}^{t_k^{(n)}} \Big(f(s, u(s)) - f(t_{k-1}^{(n)}, y_{k-1}^{(n)})\Big)\, ds \\
&\quad + \int_{t_k^{(n)}}^{t} \Big(f(s, u(s)) - f(t_k^{(n)}, y_k^{(n)})\Big)\, ds.
\end{aligned}$$

Usando la stima (5.9) abbiamo allora

$$\begin{aligned}
\Big| y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, u(s))\, ds - u_n(t) \Big| &\le \int_{t_0}^{t_1^{(n)}} \frac{\varepsilon}{\delta}\, ds + \ldots + \int_{t_{k-1}^{(n)}}^{t_k^{(n)}} \frac{\varepsilon}{\delta}\, ds + \int_{t_k^{(n)}}^{t} \frac{\varepsilon}{\delta}\, ds \\
&\le (k+1) \frac{\varepsilon}{\delta} \frac{\delta}{n} \le \varepsilon.
\end{aligned}$$

Abbiamo provato che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che

$$\Big| y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, u(s))\, ds - u_n(t) \Big| \le \varepsilon$$

per ogni $t \in [t_0, t_0 + \delta]$, per ogni $n \ge \bar{n}$, cioè che $u_n(t)$ converge uniformemente a $y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, u(s))\, ds$ in $[t_0, t_0 + \delta]$. D'altra parte, $u_n(t)$ converge a $u(t)$, quindi

$$u(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, u(s))\, ds \quad \forall t \in [t_0, t_0 + \delta],$$

e u è soluzione del problema di Cauchy. □

Osservazione 5.1. Nella dimostrazione del Teorema di esistenza di Peano fatta a lezione (del tutto equivalente a quella scritta qua sopra) abbiamo usato la formula integrale

$$u_n(t) = \int_{t_0}^{t} u_n'(s)\, ds$$

dove l'integrale è da intendersi come somma degli integrali su ciascun sottointervallo $[t_0, t_1^{(n)}]$, ..., $[t_{k-1}^{(n)}, t_k^{(n)}]$, $[t_k^{(n)}, t]$, e la derivata $u_n'(s)$ è uguale alla costante $f(t_j^{(n)}, y_j^{(n)})$ per ogni $s \in (t_j^{(n)}, t_{j+1}^{(n)})$.

* * *

Come osservato nella prima lezione, non esiste una formula generale che risolve *ogni* equazione differenziale. In alcuni casi significativi, tuttavia, esistono dei metodi per il calcolo esplicito delle soluzioni. Vediamo ora alcune di queste tecniche risolutive.

Equazioni a variabili separabili. Cominciamo con un esempio: consideriamo l'equazione

$$u' = (u-1)t^2.$$

Notiamo subito che la funzione costante $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $u(t) = 1$ è soluzione (equilibrio).

Osserviamo anche che il campo è $f(t, y) = (y-1)t^2$, definito in $(t, y) \in \Omega = \mathbb{R}^2$, di classe $C^\infty(\mathbb{R}^2)$, quindi vale il Teorema di esistenza locale e unicità. Come conseguenza dell'unicità, se una soluzione u, diversa dall'equilibrio 1, soddisfa $u(t_0) > 1$ in un certo istante t_0, allora soddisfa $u(t) > 1$ per ogni t in cui è definita (se fosse $u(t_1) = 1$ in un certo istante t_1, avremmo due soluzioni diverse dello stesso problema di Cauchy con dato iniziale $u(t_1) = 1$, impossibile). Analogamente, se una soluzione è minore di 1 in un certo istante, allora rimane minore di 1 in tutto il suo intervallo di esistenza. In conclusione, una soluzione o è sempre $= 1$, o è sempre $\neq 1$.

Cerchiamo le soluzioni $u \neq 1$. Dividiamo per $u - 1$ e riscriviamo l'equazione come

$$\frac{u'(t)}{u(t)-1} = t^2. \tag{5.10}$$

Dalla regola della derivata di funzione composta e dall'integrale indefinito (primitiva) di Analisi 1

$$\int \frac{1}{x-1}\,dx = \log|x-1| + c,$$

possiamo scrivere la frazione $u'/(u-1)$ come derivata rispetto a t di una funzione:

$$\frac{u'(t)}{u(t)-1} = \frac{d}{dt}\Big(\log|u(t)-1|\Big).$$

Scriviamo anche t^2 come derivata di una funzione:

$$t^2 = \frac{d}{dt}\Big(\frac{t^3}{3}\Big).$$

L'equazione (5.10) si riscrive dunque

$$\frac{d}{dt}\Big(\log|u(t)-1|\Big) = \frac{d}{dt}\Big(\frac{t^3}{3}\Big),$$

cioè

$$\frac{d}{dt}\Big(\log|u(t)-1| - \frac{t^3}{3}\Big) = 0,$$

cioè

$$\log|u(t)-1| - \frac{t^3}{3} = \text{costante},$$

cioè

$$\log|u(t)-1| = \frac{t^3}{3} + c,$$

con $c \in \mathbb{R}$ costante (cioè non dipendente da t). Abbiamo trovato una relazione che lega $u(t)$ e t, e non contiene la derivata $u'(t)$ (non è più un'equazione differenziale). Per ricavare u, facciamo l'esponenziale

$$|u(t) - 1| = \exp\left(\frac{t^3}{3} + c\right) = e^c e^{t^3/3}.$$

Se $u > 1$ ricaviamo

$$u(t) = 1 + e^c e^{t^3/3},$$

mentre se $u < 1$ si ha

$$u(t) = 1 - e^c e^{t^3/3}.$$

In ogni caso, rinominando c il fattore costante $\pm e^c$, abbiamo trovato la formula

$$u(t) = 1 + ce^{t^3/3}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Notiamo che questa formula, per $c = 0$, ci dà l'equilibrio $u = 1$.

Possiamo verificare immediatamente la validità della formula trovata: se $u(t) = 1 + ce^{t^3/3}$, calcoliamo la sua derivata, che è

$$u'(t) = ce^{t^3/3} t^2,$$

calcoliamo il campo

$$t^2(u - 1) = t^2 ce^{t^3/3},$$

e constatiamo che sono uguali.

Consiglio: in esercizi di questo tipo è bene verificare subito la validità della formula trovata, per eliminare eventuali errori di calcolo.

Il procedimento appena illustrato si applica ogni volta che il campo si fattorizza come prodotto di una funzione della sola u per una funzione della sola t:

Definizione 5.2 (Equazioni a variabili separabili)**.** Si chiamano *equazioni a variabili separabili* le equazioni della forma

$$u' = \varphi(t)g(u)$$

dove φ e g sono funzioni reali di variabile reale.

Ripercorriamo il procedimento visto sopra, adattandolo al caso generale. Consideriamo l'equazione

$$u' = \varphi(t)g(u).$$

Per prima cosa cerchiamo gli eventuali zeri di g: se $g(x_0) = 0$ in un certo valore $x_0 \in \mathbb{R}$, allora la funzione costante $u(t) = x_0$ è soluzione (equilibrio).

Se g è localmente lipschitziana, allora, per l'unicità della soluzione del problema di Cauchy, ogni soluzione che è diversa dagli equilibri in un certo istante lo è per tutti i tempi in cui è definita. Se u è diversa dagli equilibri, allora $g(u) \neq 0$, e l'equazione si riscrive

$$\frac{u'(t)}{g(u(t))} = \varphi(t).$$

Calcoliamo una primitiva $G(y)$ della funzione $1/g(y)$, cioè risolviamo l'integrale indefinito di Analisi 1

$$\int \frac{1}{g(y)}\, dy = G(y) + c,$$

cosicché
$$\frac{u'(t)}{g(u(t))} = \frac{d}{dt}\Big(G(u(t))\Big).$$
Calcoliamo una primitiva $\Phi(t)$ della funzione $\varphi(t)$, cosicché $\varphi(t) = \Phi'(t)$. L'equazione differenziale si riscrive dunque
$$\frac{d}{dt}\Big(G(u(t))\Big) = \Phi'(t),$$
cioè
$$\frac{d}{dt}\Big(G(u(t)) - \Phi(t)\Big) = 0,$$
da cui
$$G(u(t)) = \Phi(t) + c$$
con $c \in \mathbb{R}$ costante. A questo punto dobbiamo invertire G per ricavare u: poiché $g(u) \neq 0$, e $G'(y) = 1/g(y) \neq 0$, la funzione G è localmente invertibile in un intorno del valore $u(t)$ (Analisi 2). Quindi
$$u(t) = G^{-1}(\Phi(t) + c), \quad c \in \mathbb{R}, \tag{5.11}$$
famiglia a un parametro di soluzioni.

In alcuni casi la famiglia (5.11) include gli eventuali equilibri dell'equazione, in altri casi no; in generale, l'insieme di tutte le soluzioni dell'equazione $u' = g(u)\varphi(t)$ è dato dall'unione delle soluzioni (5.11) con le soluzioni costanti $u(t) = x_0$, dove $g(x_0) = 0$.

Esercizio 5.3. Si consideri l'equazione differenziale
$$u' = \frac{u^3}{t-1}.$$
(a) Scrivere tutte le soluzioni. (b) Risolvere il problema di Cauchy con dato iniziale (i) $u(0) = 1$; (ii) $u(2) = -1/2$; (iii) $u(2) = 0$.

Equazioni riconducibili ad equazioni a variabili separabili. Alcune equazioni, che non sono a variabili separabili, ammettono un cambio di variabile che trasforma il problema in un'equazione a variabili separabili. Illustriamo il procedimento tramite un esempio.

Esercizio 5.4. Risolvere l'equazione
$$u' = t^2 u + t^3 - 1.$$

Svolgimento. L'equazione non è a variabili separabili, perché il campo $f(t,y) = t^2 y + t^3 - 1$ non è della forma $\varphi(t)g(y)$. Tuttavia, se portiamo 1 a sinistra e mettiamo t^2 in evidenza, l'equazione diventa
$$u' + 1 = t^2(u + t).$$
Notiamo che $u' + 1$ è la derivata di $u + t$. Quindi usiamo $u + t$ come nuova incognita: facciamo cioè il *cambio di variabile*
$$v(t) := u(t) + t.$$

Calcoliamo $v' = u' + 1$, e riscriviamo l'equazione in termini della nuova incognita v:

$$v' = t^2 v.$$

L'equazione per v è a variabili separabili, e dunque la possiamo risolvere esplicitamente. Procedendo come prima, troviamo le soluzioni

$$v(t) = ce^{t^3/3}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Infine ritorniamo all'incognita di partenza u: essendo $u = v - t$, troviamo le soluzioni

$$u(t) = ce^{t^3/3} - t, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Il principio è abbastanza simile a quello degli integrali per sostituzione imparati in Analisi 1: un integrale che non sappiamo fare viene trasformato, tramite un cambio di variabile, in un altro che sappiamo risolvere, e come ultimo passaggio riscriviamo il risultato in termini della variabile di partenza.

6 Lezione 6

Formula risolutiva dell'equazione $u' + a(t)u = 0$. Consideriamo l'equazione *lineare omogenea del primo ordine*

$$u' + a(t)u = 0.$$

È a variabili separabili: $u' = -a(t)u$. La soluzione costante $u = 0$ è equilibrio, mentre per $u \neq 0$ l'equazione è

$$\frac{u'(t)}{u(t)} = -a(t).$$

Si ha

$$\frac{u'(t)}{u(t)} = \frac{d}{dt}\Big(\log |u(t)| \Big).$$

Fissiamo una primitiva A di a, cioè $A'(t) = a(t)$. L'equazione si riscrive

$$\frac{d}{dt}\Big(\log |u(t)| \Big) = -A'(t),$$

cioè

$$\frac{d}{dt}\Big(\log |u(t)| + A(t) \Big) = 0,$$

da cui $\log |u(t)| + A(t) =$ costante, cioè

$$\log |u(t)| = -A(t) + c.$$

Quindi

$$|u(t)| = e^{-A(t)+c} = e^c e^{-A(t)},$$

cioè

$$u(t) = \pm e^c e^{-A(t)},$$

e, rinominando la costante $\pm e^c$, troviamo la famiglia a un parametro di soluzioni

$$u(t) = ce^{-A(t)}, \quad c \in \mathbb{R}$$

(per $c = 0$ ritroviamo l'equilibrio $u = 0$). Data l'importanza di questa semplice formula, mettiamola bene in evidenza.

Le soluzioni dell'equazione lineare omogenea del primo ordine

$$u' + a(t)u = 0$$

sono le funzioni

$$u(t) = ce^{-A(t)}, \quad c \in \mathbb{R},$$

dove $A(t)$ è una primitiva di $a(t)$.
Fissato un istante t_0, le soluzioni si possono anche scrivere come

$$u(t) = c \exp\Big(-\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds\Big), \quad c \in \mathbb{R}. \tag{6.1}$$

Formula risolutiva dell'equazione $u' + a(t)u = b(t)$. Ora consideriamo l'equazione *lineare non omogenea del primo ordine*

$$u' + a(t)u = b(t). \tag{6.2}$$

Non è un'equazione a variabili separabili, ma può essere trasformata in un'equazione a variabili separabili tramite un cambio di variabile. Vedremo in seguito che il procedimento qua sotto è un caso particolare del *metodo di variazione delle costanti.*

Consideriamo il cambio di variabili

$$u(t) = h(t)v(t),$$

con v nuova incognita, e h da determinare. Poiché $u' = h'v + hv'$, l'equazione (6.2) diventa

$$h(t)v'(t) + [h'(t) + a(t)h(t)]v(t) = b(t). \tag{6.3}$$

Scegliamo h in modo che il coefficiente $h' + ah$ sia nullo: fissiamo dunque

$$h(t) := e^{-A(t)}$$

con A primitiva di a, cioè $A'(t) = a(t)$. L'equazione (6.3) diventa

$$e^{-A(t)}v'(t) = b(t),$$

cioè

$$v'(t) = e^{A(t)}b(t). \tag{6.4}$$

Fissiamo una primitiva $F(t)$ di $e^{A(t)}b(t)$, cioè $F'(t) = e^{A(t)}b(t)$. Le funzioni v che soddisfano (6.4) sono quelle della forma $v(t) = F(t)+c$, con $c \in \mathbb{R}$ costante. Ricordando che $u = hv$, troviamo

$$u(t) = e^{-A(t)}(F(t) + c).$$

Come sopra, data l'importanza di questa formula, riscriviamola bene in evidenza.

Le soluzioni dell'equazione lineare non omogenea del primo ordine

$$u' + a(t)u = b(t)$$

sono le funzioni

$$u(t) = e^{-A(t)}(c + F(t)), \quad c \in \mathbb{R},$$

dove $A(t)$ è una primitiva di $a(t)$ e $F(t)$ è una primitiva di $e^{A(t)}b(t)$.
Fissato un istante t_0, le soluzioni si possono anche scrivere come

$$u(t) = \exp\Big(-\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds\Big)\Big[c + \int_{t_0}^{t} \exp\Big(\int_{t_0}^{s} a(\sigma)\,d\sigma\Big) b(s)\,ds\Big], \quad c \in \mathbb{R}. \quad (6.5)$$

Esercizio 6.1. Risolvere

$$u' + \frac{u}{t} = e^{t^2} \quad (t > 0).$$

Esercizio 6.2. Risolvere

$$\begin{cases} u' + tu = t \\ u(1) = 2. \end{cases}$$

Esercizio 6.3. Risolvere

$$\begin{cases} u' + 2 = te^{u} \\ u(0) = 0 \end{cases}$$

(trasformare l'equazione in un'equazione a variabili separabili usando un opportuno cambio di variabile).

Vediamo altre situazioni in cui si calcolano esplicitamente le soluzioni per sostituzione, cioè tramite cambio di variabile.

Equazioni del tipo $u' = g(u/t)$. Per equazioni della forma

$$u' = g\Big(\frac{u}{t}\Big),$$

definite per t in un intervallo $I \subseteq (0, \infty)$ oppure $I \subseteq (-\infty, 0)$, si può fare il cambio di variabile

$$u(t) = tv(t).$$

Si ha $u' = v + tv'$. In termini della nuova incognita v, l'equazione diventa

$$v' = \frac{1}{t}\big(g(v) - v\big),$$

che è a variabili separabili. Si calcola v, quindi si ottiene u.

Esercizio 6.4. Calcolare le soluzioni dell'equazione

$$u' = \frac{t^2 u + u^3}{t^3} \quad (t > 0).$$

Equazioni di Bernoulli. Consideriamo l'equazione

$$u' + a(t)u + b(t)u^p = 0,$$

con $p \in \mathbb{R}$, $p \neq 0, 1$ (se $p = 0$ o $p = 1$ l'equazione è lineare, caso già trattato). Cerchiamo le soluzioni $u \neq 0$: dividiamo per u^p, e l'equazione diventa

$$\frac{u'}{u^p} + a(t)\frac{1}{u^{p-1}} + b(t) = 0.$$

Consideriamo il cambio di variabile

$$v(t) = \frac{1}{u^{p-1}(t)} = u^{1-p}(t).$$

Calcoliamo

$$v' = (1-p)u^{-p}u' = (1-p)\frac{u'}{u^p}.$$

L'equazione diventa

$$\frac{v'}{1-p} + a(t)v + b(t) = 0,$$

cioè

$$v' + (1-p)a(t)v + (1-p)b(t) = 0,$$

che è lineare non omogenea del primo ordine. Calcoliamo v, e quindi $u = v^{1/(1-p)}$.

Esercizio 6.5. Risolvere

$$\begin{cases} 2u' - t^2u + (t^3 + t^2 + 1)u^3 = 0 \\ u(0) = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Equazioni esatte (cioè equazioni con integrale primo). Consideriamo un'equazione

$$u' = f(t, u)$$

in cui il campo vettoriale $f(t, y)$ è dato dal quoziente

$$f(t, y) = -\frac{A(t, y)}{B(t, y)}$$

e il vettore (A, B) è il gradiente di una funzione scalare $W(t, y)$, cioè

$$A(t, y) = \partial_t W(t, y), \quad B(t, y) = \partial_y W(t, y). \tag{6.6}$$

In questo caso la funzione W calcolata lungo una qualunque soluzione dell'equazione differenziale è costante. Infatti, supponiamo che $u(t)$ sia soluzione di $u' = f(t, u)$. Allora

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\Big(W(t, u(t))\Big) &= (\partial_t W)(t, u(t)) + (\partial_y W)(t, u(t))u'(t) \\ &= (\partial_t W)(t, u(t)) + (\partial_y W)(t, u(t))f(t, u(t)) \\ &= A(t, u(t)) + B(t, u(t))\frac{-A(t, u(t))}{B(t, u(t))} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Quindi $W(t, u(t))$ è costante in t. Se u è la soluzione del problema di Cauchy con dato iniziale $u(t_0) = y_0$, allora

$$W(t, u(t)) = W(t_0, u(t_0)) = W(t_0, y_0)$$

per ogni t in cui $u(t)$ è definita. In altre parole, la curva $(t, u(t))$ è tutta contenuta nell'*insieme di livello*

$$\{(t, y) : W(t, y) = W(t_0, y_0)\}.$$

Si dice che W è un *integrale primo* dell'equazione differenziale. L'equazione si dice *esatta*.

Definizione 6.6. (*Integrale primo*). Una funzione che è costante lungo tutte le soluzioni di un'equazione differenziale viene detta un *integrale primo* dell'equazione.

Notiamo (Analisi 2) che (6.6) equivale a dire che la forma differenziale

$$\omega(t, y) := A(t, y)dt + B(t, y)dy$$

è esatta, e che $W(t, y)$ è una sua primitiva. Ricordiamo anche che se la forma differenziale ω è chiusa in un aperto Ω, cioè

$$\partial_y A(t, y) = \partial_t B(t, y) \quad \forall (t, y) \in \Omega,$$

e se Ω è semplicemente connesso, allora ω è esatta in Ω, cioè ammette una primitiva.

Vediamo un esempio di risoluzione di un'equazione differenziale esatta.

Esercizio 6.7. Risolvere il problema di Cauchy

$$u' = \frac{e^{2t} - tu^2}{t^2 u}, \qquad u(1) = 1$$

con $t > 0$, $u > 0$.

Svolgimento. Il campo vettoriale

$$f(t, y) = \frac{e^{2t} - ty^2}{t^2 y}$$

è dato dal quoziente

$$f(t, y) = -\frac{A(t, y)}{B(t, y)},$$

con

$$A(t, y) = -e^{2t} + ty^2, \qquad B(t, y) = t^2 y.$$

La forma differenziale $\omega(t, y) = A(t, y)dt + B(t, y)dy$ è chiusa se

$$\partial_y A(t, y) = \partial_t B(t, y),$$

cioè se $\partial_y(-e^{2t} + ty^2) = \partial_t(t^2 y)$, che è vero. Inoltre il dominio

$$\Omega = \{(t, y) \in \mathbb{R}^2 : t > 0, \; y > 0\}$$

è semplicemente connesso, quindi ω è esatta in Ω. Cerchiamo una sua primitiva, cioè cerchiamo una funzione scalare $W(t, y)$ tale che

$$\partial_t W(t, y) = A(t, y) = -e^{2t} + ty^2, \qquad \partial_y W(t, y) = B(t, y) = t^2 y.$$

La seconda di queste equazioni vale se $W(t,y) = \frac{1}{2}t^2y^2 + h(t)$ per una funzione $h(t)$ indipendente da y; la prima equazione diventa dunque

$$ty^2 + h'(t) = -e^{2t} + ty^2,$$

da cui si trova $h(t) = -\frac{1}{2}e^{-2t}$, e

$$W(t,y) = \frac{1}{2}(t^2y^2 - e^{2t}).$$

Il grafico $\{(t, u(t))\}$ della soluzione del problema di Cauchy con dato iniziale $u(1) = 1$ si trova dunque nell'insieme di livello

$$\{(t,y) \in \Omega : W(t,y) = W(1,1)\}$$

cioè

$$\Big\{(t,y) \in \mathbb{R}^2 : t > 0,\ y > 0,\ \frac{1}{2}(t^2y^2 - e^{2t}) = \frac{1}{2}(1 - e^2)\Big\}.$$

La soluzione $u(t)$ soddisfa allora

$$t^2u^2(t) - e^{2t} = 1 - e^2,$$

da cui, usando le condizioni $u > 0$, $t > 0$, ricaviamo la formula esplicita della soluzione

$$u(t) = \frac{\sqrt{e^{2t} + 1 - e^2}}{t}.$$

Il suo intervallo di definizione è

$$I = \{t > 0 : e^{2t} + 1 - e^2 > 0\} = (\log\sqrt{e^2 - 1}, +\infty). \qquad \square$$

Esercizio 6.8. Risolvere l'equazione

$$4t^3 - 4tu + 2(u - t^2)u' = 0$$

trovandone un integrale primo.

* * *

Riprendiamo l'analisi generale delle equazioni $u' = f(t,u)$ in $\mathbb{R}^N$.

Definizione 6.9. (*Prolungamento*). Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ un aperto, e sia $f : \Omega \to \mathbb{R}^N$ una funzione continua e localmente lipschitziana in y. Sia $(a,b) \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo, e sia $u : (a,b) \to \mathbb{R}^N$ una soluzione dell'equazione differenziale $u' = f(t,u)$ in (a,b).

Una funzione $v : (a_1,b_1) \to \mathbb{R}^N$ definita su un intervallo (a_1,b_1) è detta *un prolungamento di u* se

1. $(a,b) \subseteq (a_1,b_1)$,
2. $v = u$ in (a,b) (cioè $v(t) = u(t)$ per ogni $t \in (a,b)$),
3. v è soluzione dell'equazione differenziale in (a_1,b_1) (cioè $(t,v(t)) \in \Omega$ per ogni $t \in (a_1,b_1)$ e $v'(t) = f(t,v(t))$ per ogni $t \in (a_1,b_1)$).

Quando un tale prolungamento di v esiste, diciamo che u è *prolungabile all'intervallo* (a_1, b_1).

Osservazione 6.10. (*Unicità del prolungamento sull'intersezione*). Nelle ipotesi della Definizione 6.9, se

$$v_1 : (a_1, b_1) \to \mathbb{R}^N, \qquad v_2 : (a_2, b_2) \to \mathbb{R}^N$$

sono due prolungamenti di $u : (a, b) \to \mathbb{R}^N$, allora

$$v_1(t) = v_2(t) \quad \forall t \in (a_1, b_1) \cap (a_2, b_2).$$

Dimostrazione. Sia $t_0 \in (a, b)$, e sia $y_0 := u(t_0)$. Sia v_1 che v_2 sono soluzioni del problema di Cauchy

$$v' = f(t, v), \quad v(t_0) = y_0$$

nell'intervallo $I := (a_1, b_1) \cap (a_2, b_2)$, quindi (vedi Corollario 3.10) coincidono in tutto l'intervallo I. $\square$

Teorema 6.11. (Esistenza del prolungamento massimale). *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ un aperto, e sia $f : \Omega \to \mathbb{R}^N$ continua e localmente lipschitziana in y. Sia $u : (a, b) \to \mathbb{R}^N$ una soluzione dell'equazione $u' = f(t, u)$. Sia*

$$T_+ := \sup \big\{ b_1 \geq b : u \text{ è prolungabile ad } (a, b_1) \big\},$$
$$T_- := \inf \big\{ a_1 \leq a : u \text{ è prolungabile ad } (a_1, b) \big\}.$$

Allora u è prolungabile a (T_-, T_+).

Detto v il prolungamento di u a (T_-, T_+), v è prolungamento massimale*, cioè v non ammette alcun prolungamento ad un intervallo che contenga strettamente (T_-, T_+). In altre parole, se $w : I \to \mathbb{R}^N$ è un prolungamento di v, allora $I = (T_-, T_+)$ e $w = v$.*

Una tale soluzione v è detta soluzione massimale*; il corrispondente intervallo (T_-, T_+) è detto* intervallo massimale.

Dimostrazione. Definiamo v nell'intervallo (T_-, T_+) nel modo seguente.

Per prima cosa, definiamo $v(t) := u(t)$ per ogni $t \in (a, b)$.

Se $T_+ > b$, dobbiamo definire v nell'intervallo $[b, T_+)$. Sia

$$B := \big\{ b_1 \geq b : u \text{ è prolungabile ad } (a, b_1) \big\},$$

cosicché $T_+ = \sup B$. Sia $t \in [b, T_+)$. Dalla definizione di sup, esiste $b_1 \in B$ tale che $t < b_1 \leq T_+$. Dalla definizione di B, u è prolungabile ad (a, b_1), e diciamo w tale prolungamento. Definiamo $v(t) := w(t)$. In questo modo abbiamo definito $v(t)$ per ogni $t \in [b, T_+)$. Questa definizione è ben posta: per l'Osservazione 6.10, qualunque altro prolungamento di u che sia definito in t porta alla stessa definizione di $v(t)$.

Se invece $T_+ = b$, non c'è bisogno di definire v a destra di b.

A sinistra procediamo in modo analogo, e otteniamo v definita su tutto l'intervallo (T_-, T_+).

Per costruzione, v è prolungamento di u. Se v ammettesse un prolungamento w a (T_-, β) con $\beta > T_+$, allora w sarebbe anche un prolungamento di u a (T_-, β), quindi β apparterrebbe all'insieme B, contro la definizione di $T_+ = \sup B$, assurdo. Similmente, v non ammette prolungamenti ad (α, T_+) con $\alpha < T_-$. Quindi v è prolungamento massimale. $\square$

7 Lezione 7

Lemma 7.1. (Criterio di prolungabilità). *Sia* $\Omega \subseteq \mathbb{R}\times\mathbb{R}^N$ *aperto, e sia* $f : \Omega \to \mathbb{R}^N$ *continua e localmente lipschitziana in* y. *Sia* $u : (a, b) \to \mathbb{R}^N$ *soluzione dell'equazione* $u' = f(t, u)$ *nell'intervallo* (a, b), *e supponiamo che esista finito il limite*

$$\lim_{t\to b^-} u(t) = v_0,$$

con

$$(b, v_0) \in \Omega.$$

Allora u *è prolungabile a destra di* b, *cioè per un certo* $\delta > 0$ *esiste un prolungamento di* u *ad* $(a, b + \delta)$.

Analogamente, se esiste finito il limite $\lim_{(t\to a^+)} u(t) = v_1$, *con* $(a, v_1) \in \Omega$, *allora* u *è prolungabile a sinistra di* u, *cioè per un certo* $\delta > 0$ *esiste un prolungamento di* u *ad* $(a - \delta, b)$.

Dimostrazione. Poiché $(b, v_0) \in \Omega$, possiamo considerare il problema di Cauchy con dati iniziali (b, v_0). Dal Teorema di esistenza locale e unicità, esiste $\delta > 0$ tale che esiste una e una sola soluzione $\varphi : [b - \delta, b + \delta] \to \mathbb{R}^N$ di tale problema di Cauchy nell'intervallo $[b - \delta, b + \delta]$, cioè φ soddisfa

$$\begin{cases} \varphi'(t) = f(t, \varphi(t)) & \forall t \in [b - \delta, b + \delta], \\ \varphi(b) = v_0. \end{cases}$$

Definiamo $v : (a, b + \delta) \to \mathbb{R}^N$ in questo modo:

$$v(t) := \begin{cases} u(t) & \text{per } a < t < b, \\ v_0 & \text{per } t = b, \\ \varphi(t) & \text{per } b < t < b + \delta. \end{cases}$$

Per ogni $t \in (a, b)$ si ha

$$v'(t) = u'(t) = f(t, u(t)) = f(t, v(t))$$

perché $v = u$ in (a, b) e u è soluzione dell'equazione differenziale. Similmente, per ogni $t \in (b, b + \delta)$ si ha

$$v'(t) = \varphi'(t) = f(t, \varphi(t)) = f(t, v(t))$$

perché $v = \varphi$ in $(b, b + \delta)$ e φ è soluzione dell'equazione differenziale. Quindi l'uguaglianza

$$v'(t) = f(t, v(t))$$

vale per ogni $t \in (a, b) \cup (b, b + \delta)$. Vogliamo dimostrare che vale anche in $t = b$.

Calcoliamo dapprima i limiti sinistro e destro di v per $t \to b$: per ipotesi,

$$\lim_{t\to b^-} v(t) = \lim_{t\to b^-} u(t) = v_0 = v(b),$$

mentre, dalla continuità di φ,

$$\lim_{t\to b^+} v(t) = \lim_{t\to b^+} \varphi(t) = \varphi(b) = v_0 = v(b).$$

Quindi v è continua in b, e dunque è continua in tutto l'intervallo $(a, b+\delta)$.

Calcoliamo i limiti sinistro e destro del rapporto incrementale: dal Teorema di de l'Hôpital,

$$\lim_{t\to b^-} \frac{v(t)-v(b)}{t-b} = \lim_{t\to b^-} \frac{u(t)-v_0}{t-b} = \lim_{t\to b^-} \frac{u'(t)}{1} = \lim_{t\to b^-} f(t,u(t)) = f(b,v_0)$$

mentre, dalla derivabilità di φ,

$$\lim_{t\to b^+} \frac{v(t)-v(b)}{t-b} = \lim_{t\to b^+} \frac{\varphi(t)-v_0}{t-b} = \lim_{t\to b^-} \frac{\varphi(t)-\varphi(b)}{t-b} = \varphi'(b) = f(b,\varphi(b)) = f(b,v_0).$$

Quindi v è derivabile in b, e la sua derivata in b vale

$$v'(b) = f(b,v_0) = f(b,v(b)).$$

Dunque v soddisfa l'identità $v'(t) = f(t,v(t))$ per ogni $t \in (a,b+\delta)$. Poiché $v = u$ in (a,b), v è un prolungamento di u ad $(a,b+\delta)$. □

Lemma 7.2. (Criterio di prolungabilità con successione (t_n)). *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}\times\mathbb{R}^N$ aperto, e sia $f : \Omega \to \mathbb{R}^N$ continua e localmente lipschitziana in y. Sia $u : (a,b) \to \mathbb{R}^N$ soluzione dell'equazione $u' = f(t,u)$ nell'intervallo (a,b), e supponiamo che esista una successione $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e un punto $v_0 \in \mathbb{R}^N$ tali che*

- *$t_n \in (a,b)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$,*
- *$t_n \to b$ per $n \to \infty$,*
- *$u(t_n) \to v_0$ per $n \to \infty$*

con

$$(b,v_0) \in \Omega.$$

Allora

$$\lim_{t\to b^-} u(t) = v_0$$

e di conseguenza, dal criterio di prolungabilità precedente (Lemma 7.1), u è prolungabile a destra di b.

Analogo enunciato vale per la prolungabilità a sinitra di a.

Dimostrazione. Poiché $(b,v_0) \in \Omega$ e Ω è aperto, esistono $r > 0$, $\rho > 0$ tali che il rettangolo $I \times J$, dove

$$I := [b-r, b+r], \qquad J := \overline{B(v_0,\rho)},$$

sia contenuto in Ω. Essendo f continua e $I \times J$ compatto, f è limitata in $I \times J$; definiamo

$$M := \max_{I\times J} |f|, \qquad r_0 := \min\left\{r, \frac{\rho}{3M}\right\}.$$

Dalle ipotesi sulla successione (t_n), esiste $\bar{n}_1$ tale che per ogni $n \geq \bar{n}_1$ si ha

$$|t_n - b| = b - t_n \leq r_0, \quad |u(t_n) - v_0| \leq \frac{\rho}{2}.$$

Dimostriamo che

$$u(t) \in \overline{B(v_0,\rho)} \qquad \forall t \in [t_n, b), \quad \forall n \geq \bar{n}_1. \tag{7.1}$$

Sia $n \geq \bar{n}_1$, e sia

$$E := \{t \in [t_n, b) : u(t) \notin \overline{B(v_0, \rho)}\}.$$

Supponiamo, per assurdo, che E sia non vuoto. Sia $\tau := \inf E$. Notiamo che $\tau > t_n$: infatti in t_n si ha $|u(t_n) - v_0| \leq \rho/2$, cioè

$$u(t_n) \in \overline{B(v_0, \rho/2)} \subset B(v_0, \rho);$$

essendo u continua, u deve rimanere nella palla $B(v_0, \rho)$ per un certo intervallo di tempo oltre t_n, cioè esiste $h > 0$ tale che $u(t) \in B(v_0, \rho)$ per ogni $t \in [t_n, t_n + h]$. Quindi $E \subseteq (t_n + h, b)$, da cui $\tau \geq t_n + h > t_n$.

Inoltre si ha

$$u(t) \in \overline{B(v_0, \rho)} \qquad \forall t \in [t_n, \tau]$$

(perché $\tau = \inf E$) e

$$u(\tau) \in \partial B(v_0, \rho), \quad \text{cioè } \; |u(\tau) - v_0| = \rho$$

perché se fosse $|u(\tau) - v_0| > \rho$ avremmo, per continuità, $|u(t) - v_0| > \rho$ per ogni t in un intervallo $[\tau - h, \tau]$, contro la definizione di $\tau = \inf E$; se fosse $|u(\tau) - v_0| < \rho$ avremmo, per continuità, $|u(t) - v_0| < \rho$ per ogni t in un intervallo $[\tau, \tau + h]$, ancora contro la definizione di $\tau = \inf E$.

Dal fatto che $u(s) \in \overline{B(v_0, \rho)}$ per ogni $s \in [t_n, \tau]$ segue che $(s, u(s)) \in I \times J$ per ogni $s \in [t_n, \tau]$, e quindi

$$|f(s, u(s))| \leq M \qquad \forall s \in [t_n, \tau].$$

Dunque

$$\begin{aligned} |u(\tau) - u(t_n)| &= \Big| \int_{t_n}^{\tau} u'(s)\, ds \Big| = \Big| \int_{t_n}^{\tau} f(s, u(s))\, ds \Big| \\ &\leq \int_{t_n}^{\tau} M\, ds = M|\tau - t_n| \leq M(b - t_n) \leq M r_0 \leq M \frac{\rho}{3M} = \frac{\rho}{3}. \end{aligned}$$

D'altra parte,

$$\begin{aligned} |u(\tau) - u(t_n)| &= |(u(\tau) - v_0) - (u(t_n) - v_0)| \\ &\geq |u(\tau) - v_0| - |u(t_n) - v_0| = \rho - |u(t_n) - v_0| \geq \rho - \frac{\rho}{2} = \frac{\rho}{2} \end{aligned}$$

perché $|u(\tau) - v_0| = \rho$ e $|u(t_n) - v_0| \leq \rho/2$. Quindi

$$\frac{\rho}{2} \leq |u(\tau) - u(t_n)| \leq \frac{\rho}{3},$$

e poiché $\rho > 0$ arriviamo a $1/2 \leq 1/3$, assurdo. Questo prova che E è vuoto, e abbiamo dimostrato (7.1).

Da (7.1) segue, in particolare, che per ogni $t \in [t_{\bar{n}_1}, b)$ la coppia $(t, u(t))$ appartiene al rettangolo $I \times J$, e quindi

$$|f(t, u(t))| \leq M \qquad \forall t \in [t_{\bar{n}_1}, b). \tag{7.2}$$

Ora dimostriamo la tesi del lemma. Sia $\varepsilon > 0$. Fissiamo un naturale n abbastanza grande da avere

$$|b - t_n| \le \frac{\varepsilon}{2M}, \qquad |u(t_n) - v_0| \le \frac{\varepsilon}{2}, \qquad t_n \in [t_{\bar{n}_1}, b).$$

Sia $t \in [t_n, b)$. Si ha dunque $t_{\bar{n}_1} \le t_n \le t < b$. Stimiamo

$$|u(t) - v_0| \le |u(t) - u(t_n)| + |u(t_n) - v_0|.$$

Poiché $[t_n, t] \subseteq [t_{\bar{n}_1}, b)$, grazie a (7.2) per ogni s nell'intervallo $[t_n, t]$ vale la stima $|f(s, u(s))| \le M$. Quindi

$$\begin{aligned} |u(t) - u(t_n)| &= \Big| \int_{t_n}^{t} u'(s)\, ds \Big| = \Big| \int_{t_n}^{t} f(s, u(s))\, ds \Big| \\ &\le M|t - t_n| \le M(b - t_n) \le M \frac{\varepsilon}{2M} = \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Anche $|u(t_n) - v_0| \le \varepsilon/2$, e dunque

$$|u(t) - v_0| \le \varepsilon \qquad \forall t \in [t_n, b).$$

In conclusione, abbiamo dimostrato che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che $|u(t) - v_0| \le \varepsilon$ per ogni $t \in [b - \delta, b)$ (basta prendere $\delta = b - t_n$). Abbiamo cioè dimostrato che $u(t) \to v_0$ per $t \to b^-$. □

Teorema 7.3. (Fuga dai compatti). *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ aperto, e sia $f : \Omega \to \mathbb{R}^N$ continua e localmente lipschitziana in y. Sia $u : (T_-, T_+) \to \mathbb{R}^N$ soluzione dell'equazione $u' = f(t, u)$, con (T_-, T_+) intervallo massimale. Per ogni compatto $K \subset \Omega$ esistono $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ con*

$$T_- < \alpha \le \beta < T_+$$

tali che

$$(t, u(t)) \notin K \qquad \forall t \in (T_-, \alpha) \cup (\beta, T_+).$$

In altre parole, per ogni t fuori dall'intervallo $[\alpha, \beta]$ la coppia $(t, u(t))$ è fuori dal compatto K.

Dimostrazione. Supponiamo che non esista alcun β per cui $(t, u(t)) \notin K$ per ogni $t \in (\beta, T_+)$. Questo significa che per ogni $\beta \in (T_-, T_+)$ esiste $t \in (\beta, T_+)$ tale che $(t, u(t)) \in K$. Allora, presa una qualunque successione $(\beta_n) \subset (T_-, T_+)$ che converge a T_+, per ogni n esiste $t_n \in (\beta_n, T_+)$ tale che $(t_n, u(t_n)) \in K$. Quindi la successione $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ soddisfa

$$\begin{cases} t_n \in (T_-, T_+) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \\ t_n \to T_+ \quad (n \to \infty), \\ (t_n, u(t_n)) \in K \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Per compattezza, esiste una sottosuccessione $(t_{n_k}, u(t_{n_k}))$ convergente. Poiché $t_n \to T_+$, anche la sua sottosuccessione t_{n_k} ha lo stesso limite. Sia v_0 il limite di $u(t_{n_k})$, cosicché $(t_{n_k}, u(t_{n_k}))$ converge a (T_+, v_0). Essendo K chiuso, (T_+, v_0) appartiene a K. Inoltre $K \subset \Omega$, quindi $(T_+, v_0) \in \Omega$. Dal criterio di prolungabilità con successione (Lemma 7.2), u è prolungabile a destra di T_+, ma questo è impossibile perché u, per ipotesi, è soluzione massimale. Dunque un β come nell'enunciato esiste.

In modo analogo si prova che esiste anche α. □

Esercizio 7.4. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' = 2u - u^2, \\ u(0) = y_0. \end{cases}$$

1) Per $y_0 \in [0, 2]$ calcolare l'intervallo massimale della soluzione.
2) Per ogni $y_0 \in \mathbb{R}$ calcolare la soluzione esplicitamente.
3) Disegnare l'andamento qualitativo delle soluzioni.

Svolgimento. 1) Il campo vettoriale $f(t, y) = 2y - y^2 = y(2-y)$ è definito nell'aperto $\Omega = \mathbb{R}^2$ e ha due zeri, $y = 0$ e $y = 2$. Quindi il sistema ha due equilibri, le soluzioni costanti $u(t) = 0$ e $u(t) = 2$ definite per ogni $t \in \mathbb{R}$.

La funzione f è di classe $C^\infty(\mathbb{R}^2)$, quindi è lipschitziana in y, e dunque, per unicità della soluzione locale, due soluzioni distinte non si possono incontrare (Corollario 3.10). Di conseguenza, la soluzione u del problema di Cauchy con dato iniziale $u(0) = y_0 \in (0, 2)$ rimane confinata tra i due equilibri per tutta la sua esistenza, cioè

$$0 < u(t) < 2 \quad \forall t \in (T_-, T_+)$$

dove (T_-, T_+) è l'intervallo massimale di esistenza della soluzione u. Mostriamo che $(T_-, T_+) = \mathbb{R}$, cioè che $T_- = -\infty$ e $T_+ = \infty$.

L'istante iniziale $t = 0$ appartiene all'intervallo (T_-, T_+), quindi $T_+ > 0$. Supponiamo per assurdo che $T_+ < \infty$. Consideriamo il compatto $K = [0, T_+] \times [0, 2]$. Dal Teorema di fuga dai compatti (Teorema 7.3), esistono $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, con $T_- < \alpha \leq \beta < T_+$ tali che

$$(t, u(t)) \notin K \quad \forall t \in (T_-, \alpha) \cup (\beta, T_+).$$

In particolare, $(t, u(t)) \notin [0, T_+] \times [0, 2]$ per ogni $t \in (\beta, T_+)$. D'altra parte $u(t) \in (0, 2)$, quindi

$$t \notin [0, T_+] \quad \forall t \in (\beta, T_+).$$

Sia $c = \max\{0, \beta\}$, e sia $t \in (c, T_+)$. Allora $t \in (\beta, T_+)$, quindi $t \notin [0, T_+]$, dunque $t \notin [c, T_+]$, assurdo. Abbiamo provato che $T_+ = \infty$. In modo simile si dimostra che $T_- = -\infty$.

Altro modo. Sia $y_0 \in (0, 2)$, e supponiamo per assurdo che $T_+ < \infty$. Poiché $u(t) \in (0, 2)$ per ogni $t \in (T_-, T_+)$, si ha

$$u'(t) = f(t, u(t)) = u(t)(2 - u(t)) > 0 \quad \forall t \in (T_-, T_+).$$

Quindi u è crescente, e per monotonia esiste il suo limite per $t \to T_+$. Essendo $0 < u(t) < 2$, il limite $v_0 := \lim_{(t \to T_+)} u(t)$ appartiene all'intervallo $[0, 2]$. Perciò $(T_+, v_0) \in \Omega = \mathbb{R}^2$, e dal criterio di prolungabilità (Lemma 7.1) u è prolungabile a destra di T_+, assurdo. Questo dimostra che $T_+ = \infty$. In modo simile si dimostra che $T_- = -\infty$.

2) È un esercizio sulle equazioni a variabili separabili. Con calcoli elementari si trova che per ogni $y_0 \in \mathbb{R}$, $y_0 \neq 0, 2$,

$$u(t) = \frac{2}{1 + ce^{-2t}}, \qquad c = \frac{2 - y_0}{y_0},$$

con intervallo massimale

$$(T_-, T_+) = \begin{cases} (t_*, \infty) & \text{per } y_0 > 2, \\ (-\infty, \infty) & \text{per } y_0 \in [0, 2], \\ (-\infty, t_*) & \text{per } y_0 < 0, \end{cases} \qquad t_* := \frac{1}{2} \log\Big(1 - \frac{2}{y_0}\Big).$$

3) Disegno.

□

8 Lezione 8

Vediamo in dettaglio un esercizio sullo studio qualitativo delle soluzioni (è l'esercizio 13 di [1]).

Esercizio 8.1. Si consideri il problema di Cauchy

$$y'(t) = \frac{1}{y(t) - t^2}, \qquad y(0) = a \qquad (a > 0). \tag{8.1}$$

1) Dimostrare che esiste un'unica soluzione in un intorno di $t = 0$. Calcolare y', y'', y''' in $t = 0$.
2) Dimostrare che la soluzione è definita in $[0, \infty)$ e ha limite per $t \to +\infty$; calcolare tale limite.

Svolgimento. 1) Il campo vettoriale $f(t, y) = 1/(y - t^2)$ è definito nell'insieme $\{(t, y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq t^2\}$, che è l'unione di due aperti connessi, le regioni $\{y > t^2\}$ e $\{y < t^2\}$, cioè sopra/sotto la parabola $\mathcal{P} = \{y = t^2\}$. Il dato iniziale $(0, a)$ si trova nella regione $\{y > t^2\}$, quindi consideriamo l'aperto connesso

$$\Omega := \{(t, y) \in \mathbb{R}^2 : y > t^2\}$$

come dominio del campo f.

Poiché $f \in C^\infty(\Omega)$, f è localmente lipschitziana in y, quindi, dal Teorema di esistenza locale e unicità, esiste, unica, la soluzione del problema di Cauchy in un intorno di $t = 0$.

Per calcolare $y'(0)$ basta usare l'equazione in $t = 0$: si trova $y'(0) = 1/y(0) = 1/a$. Per calcolare le derivate successive di y deriviamo l'equazione differenziale: troviamo

$$y''(t) = -(y - t^2)^{-3} + 2t(y - t^2)^{-2},$$

e un'espressione simile per y'''. Calcolando in $t = 0$ troviamo $y''(0) = -1/a^3$ e $y'''(0) = 3/a^5 + 2/a^2$.

2) Da quanto osservato al punto precedente, la soluzione è definita nell'intervallo $[-\delta, \delta]$, per un certo $\delta > 0$. Sia (α, β) il suo intervallo massimale di esistenza. Si ha $[-\delta, \delta] \subset (\alpha, \beta)$. Dimostriamo che $\beta = +\infty$.

Osserviamo che $f > 0$ in Ω. Quindi $y' = f(t, y) > 0$ per ogni $t \in (\alpha, \beta)$. Perciò y è crescente in (α, β), e dunque esiste il limite

$$\lim_{t \to \beta} y(t). \tag{8.2}$$

Supponiamo che $\beta < \infty$. Se il limite (8.2) è un valore finito c, con $\beta^2 < c < \infty$, allora la coppia (β, c) appartiene a Ω, e per il Criterio di prolungabilità (Lemma 7.1) la soluzione sarebbe prolungabile a destra di β, assurdo. Dunque $c = \beta^2$ oppure $c = +\infty$ (non può essere $c < \beta^2$ perché $y(t) > t^2$ per $t \in (\alpha, \beta)$ quindi, passando al limite per $t \to \beta$, si trova $c \geq \beta^2$).

Supponiamo che $c = \beta^2$. Allora $y(t) - t^2 \to c - \beta^2 = 0$ per $t \to \beta$, ed essendo $y(t) - t^2 > 0$ per ogni $t \in (\alpha, \beta)$, si ha

$$\lim_{t\to\beta} y'(t) = \lim_{t\to\beta} \frac{1}{y(t) - t^2} = +\infty. \tag{8.3}$$

Mostriamo che questo è incompatibile con il fatto che in $t = \beta$ la curva $y(t)$ incontri la parabola $\mathcal{P}$ provenendo dalla regione al di sopra della parabola. L'idea geometrica è semplice: se la curva $y(t)$ arriva a incontrare la parabola con tangente verticale diretta verso l'alto (come dice il limite (8.3)), allora deve per forza arrivarci dalla regione al di sotto della parabola.

Da (8.3) segue che per ogni $M > 0$ esiste $\delta_0 > 0$ tale che $y'(t) \geq M$ per ogni $t \in (\beta - \delta_0, \beta)$ (M verrà fissata tra poco; per ora lasciamola libera). Quindi per ogni $t, t_1 \in (\beta - \delta_0, \beta)$ con $\beta - \delta_0 < t < t_1 < \beta$ si ha

$$y(t_1) - y(t) = \int_t^{t_1} y'(s)\, ds \geq M(t_1 - t).$$

Passando al limite per $t_1 \to \beta$ nella disuguaglianza $y(t_1) - y(t) \geq M(t_1 - t)$, e ricordando che $y(t_1) \to c = \beta^2$ per $t_1 \to \beta$, otteniamo

$$\beta^2 - y(t) \geq M(\beta - t), \qquad \forall t \in (\beta - \delta_0, \beta).$$

Poi $y(t) > t^2$ per ogni $t \in (\alpha, \beta)$, quindi

$$M(\beta - t) \leq \beta^2 - y(t) < \beta^2 - t^2 \qquad \forall t \in (\beta - \delta_0, \beta),$$

da cui

$$M < \frac{\beta^2 - t^2}{\beta - t} = \beta + t < 2\beta \qquad \forall t \in (\beta - \delta_0, \beta).$$

La disuguaglianza $M < 2\beta$ è in contrasto con l'arbitrarietà di M: possiamo quindi tornare indietro, fissare $M > 2\beta$ (per esempio, scegliamo $M = 2\beta + 1$) e arriviamo alla conclusione che $M < 2\beta$, assurdo. Questo dimostra che non può essere $c = \beta^2$.

Quindi $c = +\infty$, cioè $y(t) \to +\infty$ per $t \to \beta$. Ricordando che, per ipotesi, β è finito, si ha

$$\lim_{t\to\beta} y'(t) = \lim_{t\to\beta} \frac{1}{y(t) - t^2} = 0.$$

Ma anche questo è impossibile: $y(t) \to +\infty$ per $t \to \beta$, con $\beta \in \mathbb{R}$, significa che la funzione $y(t)$ ha la retta $t = \beta$ come asintoto verticale da sinistra, quindi la sua derivata $y'(t)$ non può certo tendere a zero avvicinandosi all'asintoto. Per dimostrarlo rigorosamente possiamo usare un ragionamento simile a prima: $y'(t) \to 0$ per $t \to \beta$ significa che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta_1 > 0$ tale che $|y'(t)| \leq \varepsilon$ per ogni $t \in [\beta - \delta_1, \beta)$. Scegliendo $\varepsilon = 1$, e usando anche il fatto che $y'(t) > 0$ per ogni $t \in (\alpha, \beta)$, si ha che esiste $\delta_1 > 0$ tale che

$$0 < y'(t) \leq 1 \qquad \forall t \in [\beta - \delta_1, \beta).$$

Per ogni $t \in [\beta - \delta_1, \beta)$ si ha

$$y(t) - y(\beta - \delta_1) = \int_{\beta-\delta_1}^{t} y'(s)\, ds \leq t - (\beta - \delta_1) \leq \delta_1,$$

da cui

$$y(t) \leq C = y(\beta - \delta_1) + \delta_1 \quad \forall t \in [\beta - \delta_1, \beta),$$

contro il fatto che $y(t) \to +\infty$ per $t \to \beta$, assurdo. Abbiamo dimostrato che in nessun caso β può essere finito. Dunque $\beta = +\infty$.

Poiché $y(t) > t^2$ per ogni $t \in (\alpha, \beta) = (\alpha, +\infty)$, e $t^2 \to +\infty$ per $t \to +\infty$, si ha

$$\lim_{t\to+\infty} y(t) = +\infty.$$

Questo conclude l'esercizio. □

Esercizio 8.2. Sia $y(t)$ come nell'esercizio precedente. Dimostrare che la soluzione $y(t)$ è asintotica alla parabola t^2, cioè che la differenza $y(t) - t^2$ tende a 0 per $t \to +\infty$.

Svolgimento. Sia $u(t) := y(t) - t^2$ la differenza da studiare. Che equazione differenziale soddisfa u? Usando l'equazione differenziale dell'esercizio precedente, calcoliamo

$$u'(t) = y'(t) - 2t = \frac{1}{y(t) - t^2} - 2t = \frac{1}{u(t)} - 2t.$$

Quindi $u(t)$ è soluzione del problema di Cauchy

$$u'(t) = \frac{1}{u(t)} - 2t \quad \forall t \in [0, +\infty), \qquad u(0) = a,$$

e inoltre $u(t) > 0$ per ogni $t \geq 0$ (perché, dall'esercizio precedente, $y(t) > t^2$).

Il campo

$$F(t, u) := \frac{1}{u} - 2t$$

è positivo se $u < 1/2t$, negativo se $u > 1/2t$ e nullo se $u = 1/2t$. Dunque

· la soluzione $u(t)$ è strettamente crescente quando si trova nella regione al di sotto dell'iperbole $\gamma(t) := 1/2t$, cioè quando $u(t) < \gamma(t)$;

· $u(t)$ è strettamente decrescente quando si trova nella regione al di sopra dell'iperbole, cioè quando $u(t) > \gamma(t)$;

· $u(t)$ ha derivata nulla quando u incontra l'iperbole, cioè quando $u(t) = \gamma(t)$.

Questa analisi del segno del campo $F(t, u)$ ci fa intuire l'andamento della soluzione $u(t)$ in $[0, \infty)$:

- al tempo $t = 0$ la soluzione u parte dal punto $(0, a)$ con pendenza positiva $u'(0) = 1/u(0) = 1/a$;

- per un certo intervallo di tempo u resta al di sotto dell'iperbole γ, e cresce, mentre γ decresce;

- u sale, e dunque $u(t) > u(0) = a$, mentre γ scende, e aspettando un tempo sufficiente γ scende al di sotto della quota a, dunque necessariamente u e γ arrivano ad incontrarsi;

- all'istante dell'incontro $u(t) = \gamma(t)$, u ha tangente orizzontale; subito dopo l'incontro, u avanza con pendenza vicina a zero, mentre γ ha sempre pendenza negativa: quindi, dopo l'incontro, u rimane al di sopra di γ, e dunque comincia a decrescere;

- per un motivo geometrico simile a quello dell'esercizio precedente, non ci può essere un secondo punto di incontro di u e γ: infatti, dove u e γ si incontrano, la pendenza di u deve essere nulla, ma questo, essendo γ decrescente, è possibile solo se u proviene dalla regione al di sotto di γ ed entra nella regione al di sopra di γ, non viceversa;

- non avendo più intersezioni con γ, u rimane per sempre al di sopra di γ, decrescendo. Da qui si arriva alla conclusione.

Dimostriamo tutto ciò.

In $t = 0$ si ha $u(0) = a$. Dalla continuità di u si ha $u(t) \in [a/2, 3a/2]$ per ogni $t \in [0, \delta_0]$, per un certo $\delta_0 > 0$, mentre $\gamma(t) = 1/2t \geq 2a$ per $t \in (0, 1/4a]$. Quindi $u(t) < \gamma(t)$ per ogni t in $(0, \delta_1]$, $\delta_1 = \min\{\delta_0, 1/4a\}$.

Se fosse $u(t) < \gamma(t)$ per ogni $t \in (0, \infty)$, u sarebbe crescente in $(0, \infty)$, da cui $u(t) > u(0) = a$ per ogni $t > 0$. Per $t > 1/2a$ si avrebbe allora $\gamma(t) < a < u(t) < \gamma(t)$, assurdo. Questo prova che non può essere $u < \gamma$ in $(0, \infty)$.

Sia
$$t_* := \sup\{t \in (0, \infty) : u < \gamma \text{ in } [0, t]\}.$$
Da quanto dimostrato, $t_* < \infty$ (e, di più, abbiamo dimostrato che $t_* < 1/2a$). Per definizione di t_* e per la continuità di u e γ si ha che
$$u(t_*) = \gamma(t_*).$$
Infatti, se fosse $u(t_*) > \gamma(t_*)$, allora $u > \gamma$ in un intervallo $[t_* - \delta, t_* + \delta]$, e il sup che definisce t_* sarebbe $\leq t_* - \delta$, assurdo; se fosse $u(t_*) < \gamma(t_*)$, allora $u < \gamma$ in un intervallo $[t_* - \delta, t_* + \delta]$, e il sup sarebbe $\geq t_* + \delta$, assurdo.

Mostriamo che $u > \gamma$ in un intorno destro di t_*. In t_* si ha
$$u(t_*) = \gamma(t_*), \qquad u'(t_*) = 0, \qquad \gamma'(t_*) < 0.$$
Poiché $u'(t_*) > \gamma'(t_*)$ e u' e γ' sono continue, si ha $u' > \gamma'$ in un certo intervallo $[t_* - \delta, t_* + \delta]$. Quindi per ogni $t \in (t_*, t_* + \delta]$ si ha
$$u(t) = u(t_*) + \int_{t_*}^{t} u'(s)\, ds > \gamma(t_*) + \int_{t_*}^{t} \gamma'(s)\, ds = \gamma(t),$$
cioè $u > \gamma$ in $(t_*, t_* + \delta]$.

Ora proviamo che $u > \gamma$ in (t_*, ∞). Sia
$$\xi := \sup\{t > t_* : u > \gamma \text{ in } (t_*, t)\},$$
e supponiamo per assurdo che $\xi < \infty$. Dal fatto che $u > \gamma$ in un certo intervallo $(t_*, t_* + \delta]$ segue che $\xi > t_*$. Dalla definizione di ξ segue che
$$u(t) > \gamma(t) \quad \forall t \in (t_*, \xi), \qquad u(\xi) = \gamma(\xi)$$

(come prima, se $u(\xi) > \gamma(\xi)$ o $u(\xi) < \gamma(\xi)$ si arriva a una contraddizione con la definizione di ξ). Per $t \in (t_*, \xi)$ si ha $u(t) - u(\xi) > \gamma(t) - \gamma(\xi)$ e $t - \xi < 0$, da cui

$$\frac{u(t) - u(\xi)}{t - \xi} < \frac{\gamma(t) - \gamma(\xi)}{t - \xi} \qquad \forall t \in (t_*, \xi).$$

Passando al limite per $t \to \xi$ otteniamo

$$u'(\xi) \leq \gamma'(\xi),$$

ma $u'(\xi) = 0$ perché $u(\xi) = \gamma(\xi)$ e il campo vettoriale F è nullo lungo l'iperbole γ, mentre $\gamma'(\xi) < 0$, assurdo. Questo prova che $\xi = \infty$, e dunque $u > \gamma$ in (t_*, ∞).

Dalla disuguaglianza $u > \gamma = 1/2t$ segue che $u' = 1/u - 2t < 0$ in (t_*, ∞). Quindi u è decrescente in (t_*, ∞), e dunque esiste il limite

$$\ell = \lim_{t \to \infty} u(t).$$

Poiché $u > \gamma > 0$, si ha $\ell \geq 0$. Se $\ell > 0$, allora $1/u(t) \to 1/\ell$, e $u' = 1/u - 2t \to -\infty$. Dalla definizione di limite, esiste $t_1 > 0$ tale che $u' \leq -1$ in $[t_1, \infty)$. Dunque

$$u(t) = u(t_1) + \int_{t_1}^{t} u'(s)\, ds \leq u(t_1) - (t - t_1) \qquad \forall t \in [t_1, \infty),$$

da cui, passando al limite per $t \to \infty$, si ha $u(t) \to -\infty$. D'altra parte $u(t) \to \ell \geq 0$, assurdo. Dunque $\ell = 0$. $\square$

Enunciamo ora due teoremi (utili anche negli esercizi di analisi qualitativa) che dimostriamo nella prossima lezione: il teorema del confronto e quello di esistenza globale.

Teorema 8.3. (Teorema del confronto). *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ un aperto, e siano $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ due funzioni continue, con g localmente lipschitziana in y. Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo, $t_0 \in I$, e siano $u, v : I \to \mathbb{R}$ due funzioni derivabili, con $(t, u(t)), (t, v(t)) \in \Omega$ per ogni $t \in I$. Sia*

$$u'(t) \leq f(t, u(t)), \quad v'(t) \geq g(t, v(t)) \quad \forall t \in I.$$

Supponiamo inoltre che

$$f(t, u(t)) \leq g(t, u(t)) \quad \forall t \in I.$$

(i) Se $u(t_0) \leq v(t_0)$, allora $u(t) \leq v(t)$ per ogni $t \geq t_0$, $t \in I$.
(ii) Se $u(t_0) \geq v(t_0)$, allora $u(t) \geq v(t)$ per ogni $t \leq t_0$, $t \in I$.

Teorema 8.4. (Teorema di esistenza globale). *Sia $(\alpha, \beta) \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo (sono ammessi anche i casi $\alpha = -\infty$ e/o $\beta = +\infty$). Sia $f : (\alpha, \beta) \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ una funzione*

(i) continua,

(ii) localmente lipschitziana in y,

(iii) a crescita al più lineare in y: esistono cioè due funzioni continue $A, B : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$, con $A(t) \geq 0$, $B(t) \geq 0$, tali che

$$|f(t, y)| \leq A(t)|y| + B(t) \qquad \forall t \in (\alpha, \beta), \quad \forall y \in \mathbb{R}^N.$$

Allora le soluzioni dell'equazione differenziale $u' = f(t, u)$ sono globali, cioè definite su tutto l'intervallo (α, β).

9 Lezione 9

Dimostrazione del Teorema del confronto. (*i*) Indichiamo

$$w(t) := u(t) - v(t).$$

Per ipotesi, $w(t_0) \leq 0$; dobbiamo dimostrare che $w(t) \leq 0$ per ogni $t \geq t_0$, $t \in I$. Supponiamo, per assurdo, che esista $t_1 > t_0$, $t_1 \in I$, tale che $w(t_1) > 0$. Sia

$$E := \{t \in [t_0, t_1] : w(t) \leq 0\}, \quad \xi := \sup E.$$

Notiamo che $E \neq \emptyset$ perché $t_0 \in E$. Inoltre $\xi \in [t_0, t_1]$ perché $E \subseteq [t_0, t_1]$. Si ha poi

$$\xi < t_1.$$

Infatti, dalla definizione di $\xi = \sup E$, esiste una successione (t_n) di elementi di E che converge a ξ; poiché $w(t_n) \leq 0$ e w è continua, passando al limite si ha $w(\xi) \leq 0$, mentre $w(t_1) > 0$, quindi $\xi \neq t_1$.

Dalla definizione di $\xi = \sup E$ si ha

$$w(t) > 0 \quad \forall t \in J := (\xi, t_1]. \tag{9.1}$$

Passando al limite per $t \to \xi$, $t \in J$, si ha dunque $w(\xi) \geq 0$. D'altra parte $w(\xi) \leq 0$, da cui

$$w(\xi) = 0.$$

Sia

$$c := u(\xi) = v(\xi).$$

Il punto $(\xi, c) = (\xi, u(\xi))$ appartiene a Ω. Quindi, per ipotesi, esistono $a > 0, b > 0, L \geq 0$ tali che il rettangolo $[\xi - a, \xi + a] \times [c - b, c + b]$ è contenuto in Ω e

$$|g(t, y) - g(t, z)| \leq L|y - z| \quad \forall t \in [\xi - a, \xi + a], \ \ \forall y, z \in [c - b, c + b].$$

Poiché u è continua, esiste $\delta_1 > 0$ tale che

$$|u(t) - u(\xi)| = |u(t) - c| \leq b \quad \forall t \in [\xi - \delta_1, \xi + \delta_1] \cap I,$$

e similmente esiste $\delta_2 > 0$ tale che

$$|v(t) - v(\xi)| = |v(t) - c| \leq b \quad \forall t \in [\xi - \delta_2, \xi + \delta_2] \cap I.$$

Sia

$$\delta_0 := \min\{a, \delta_1, \delta_2, t_1 - \xi\},$$

cosicché $[\xi, \xi + \delta_0] \subseteq [\xi, t_1]$ e

$$u(t), v(t) \in [c - b, c + b] \quad \forall t \in [\xi, \xi + \delta_0].$$

Perciò

$$|g(t, u(t)) - g(t, v(t))| \leq L|u(t) - v(t)| \quad \forall t \in [\xi, \xi + \delta_0].$$

Allora per ogni $t \in [\xi, \xi + \delta_0]$ si ha

$$\begin{aligned} w'(t) &= u'(t) - v'(t) \\ &\leq f(t, u(t)) - g(t, v(t)) \\ &\leq g(t, u(t)) - g(t, v(t)) \\ &\leq |g(t, u(t)) - g(t, v(t))| \\ &\leq L|u(t) - v(t)| = L|w(t)| = Lw(t) \end{aligned}$$

(nell'ultimo passaggio abbiamo usato il fatto che $w \geq 0$ in $[\xi, \xi + \delta_0]$). Dalla disuguaglianza $w' - Lw \leq 0$ in $[\xi, \xi + \delta_0]$ segue che

$$\big(w(t)e^{-Lt}\big)' = (w'(t) - Lw(t))e^{-Lt} \leq 0 \quad \forall t \in [\xi, \xi + \delta_0].$$

Perciò $w(t)e^{-Lt}$ è decrescente in $[\xi, \xi + \delta_0]$, e

$$w(t)e^{-Lt} \leq w(\xi)e^{-L\xi} = 0 \quad \forall t \in [\xi, \xi + \delta_0].$$

Dunque

$$w(t) \leq 0 \quad \forall t \in [\xi, \xi + \delta_0],$$

contro l'osservazione (vedi (9.1)) che $w > 0$ in tutti i punti di $J = (\xi, t_1]$, assurdo. Questo conclude la dimostrazione di (i).

Il caso (ii) è del tutto simile. Rapidamente: definiamo $w := u - v$. L'ipotesi ora è $w(t_0) \geq 0$, la tesi $w(t) \geq 0$ per ogni $t \leq t_0$, $t \in I$. Supponiamo, per assurdo, che esista $t_1 < t_0$, $t_1 \in I$, tale che $w(t_1) < 0$. Sia $E := \{t \in [t_1, t_0] : w(t) \geq 0\}$, e sia $\xi := \inf E$. Si ha $t_1 < \xi$, $w(\xi) = 0$, $w < 0$ in $[t_1, \xi)$. Esiste $\delta_0 > 0$ simile a sopra; si deduce che in $[\xi - \delta_0, \xi]$ si ha $w' = u' - v' \leq \ldots \leq L|w| = -Lw$ perché $w \leq 0$ a sinistra di ξ. Quindi $(w(t)e^{Lt})' \leq 0$, $w(t)e^{Lt}$ è decrescente, dunque per ogni $t \in [\xi - \delta_0, \xi]$ si ha $w(t)e^{Lt} \geq w(\xi)e^{L\xi} = 0$. Perciò $w \geq 0$ in $[\xi - \delta_0, \xi]$, assurdo. □

Dimostrazione del Teorema di esistenza locale. Sia u una soluzione dell'equazione $u' = f(t, u)$, e sia (T_-, T_+) il suo intervallo massimale di esistenza, $(T_-, T_+) \subseteq (\alpha, \beta)$. Dobbiamo dimostrare che $(T_-, T_+) = (\alpha, \beta)$, cioè che $T_- = \alpha$, $T_+ = \beta$.

Supponiamo per assurdo che $T_+ < \beta$. Quindi $T_+ < \infty$ (anche se $\beta = \infty$, comunque T_+ è finito). Fissiamo $T_0 \in (T_-, T_+)$, cosicché $[T_0, T_+] \subset (\alpha, \beta)$, e definiamo

$$A_0 := \max\{A(t) : t \in [T_0, T_+]\}, \qquad B_0 := \max\{B(t) : t \in [T_0, T_+]\},$$

che sono finiti per il Teorema di Weierstrass. Fissiamo $c \in (T_0, T_+)$ tale che

$$(T_+ - c)A_0 \leq \frac{1}{2}.$$

Per ogni $p \in (c, T_+)$, stimiamo la soluzione u sull'intervallo $[c, p]$. Ricapitolando, i punti sono in quest'ordine:

$$T_0 < c < p < T_+ < \beta.$$

Indichiamo, in breve,

$$\lambda := \max_{s \in [c,p]} |u(s)|.$$

Per ogni $t \in [c,p]$ si ha

$$\begin{aligned}
|u(t)| &= \left| u(c) + \int_c^t u'(s)\,ds \right| \\
&\le |u(c)| + \int_c^t |f(s,u(s))|\,ds \\
&\le |u(c)| + \int_c^t \big(A(s)|u(s)| + B(s)\big)\,ds \\
&\le |u(c)| + \int_c^t (A_0\lambda + B_0)\,ds \\
&= |u(c)| + (t-c)(A_0\lambda + B_0) \\
&\le |u(c)| + (T_+ - c)A_0\lambda + (T_+ - c)B_0 \\
&\le \frac{1}{2}\lambda + K, \qquad K := |u(c)| + (T_+ - c)B_0.
\end{aligned}$$

Dalla disuguaglianza $|u(t)| \le \lambda/2 + K$, passando al sup su $t \in [c,p]$, otteniamo

$$\lambda \le \frac{1}{2}\lambda + K,$$

cioè $\lambda/2 \le K$ (il termine $\lambda/2$ che compare a destra “viene assorbito”),

$$\lambda = \max_{s\in[c,p]} |u(s)| \le 2K.$$

In particolare, $|u(p)| \le \lambda \le 2K$. Abbiamo dimostrato che

$$|u(p)| \le 2K \qquad \forall p \in [c, T_+),$$

e K non dipende da p. Quindi esiste una successione (t_n) che tende a T_+ tale che $u(t_n)$ converge ad un certo limite v_0, con $|v_0| \le 2K$ (basta prendere una qualsiasi successione $t_n \to T_+$: essendo $(t_n, u(t_n))$ limitata, ammette una sottosuccessione convergente). Poiché $(T_+, v_0) \in \Omega = (\alpha,\beta) \times \mathbb{R}^N$, dal criterio di prolungabilità con successione (Lemma 7.2), u è prolungabile a destra di T_+, assurdo perché (T_-, T_+) è intervallo massimale. Questo dimostra che $T_+ = \beta$.

Allo stesso modo si prova che $T_- = \alpha$. □

Vedremo tra alcune lezioni un'altra dimostrazione del Teorema di esistenza globale, basata sul Lemma di Gronwall; altre dimostrazioni sono per esempio in [5].

Esercizio 9.1. Dimostrare il Teorema di esistenza globale usando il Teorema del confronto.

Vediamo qualche altro esercizio di analisi qualitativa delle soluzioni; l'esercizio che segue è il numero 121 di [1].

Esercizio 9.2. Consideriamo l'equazione

$$y'' = e^{-y^2} - \log t, \qquad t > 0.$$

Dimostrare che *(i)* la soluzione è definita in $(0,\infty)$; *(ii)* $y(t) \to -\infty$ per $t \to +\infty$.

Svolgimento. (*i*) È un'equazione scalare del secondo ordine. Per applicare il Teorema di esistenza globale, scriviamola come sistema del primo ordine:

$$\begin{cases} y' = v, \\ v' = e^{-y^2} - \log t, \end{cases}$$

cioè

$$u' = f(t,u), \qquad u = \begin{pmatrix} y \\ v \end{pmatrix}, \qquad f(t,u) = \begin{pmatrix} v \\ e^{-y^2} - \log t \end{pmatrix}.$$

Il campo $f : (0,\infty) \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ è di classe C^∞. Stimiamo

$$\begin{aligned} |f(t,u)| = \sqrt{v^2 + (e^{-y^2} - \log t)^2} &\leq |v| + |e^{-y^2} - \log t| \\ &\leq |v| + 1 + |\log t| \leq A(t)|u| + B(t) \end{aligned}$$

con $A(t) = 1$ e $B(t) = 1 + |\log t|$. Sono soddisfatte le ipotesi del Teorema di esistenza globale, quindi la soluzione $u = (y,v)$ è definita su tutto $(0,\infty)$. (Abbiamo usato la disuguaglianza elementare $\sqrt{a^2+b^2} \leq |a| + |b|$ per ogni $a, b \in \mathbb{R}$).

(*ii*) Si ha $e^{-y^2} - \log t \leq 1 - \log t \to -\infty$ per $t \to +\infty$, quindi $e^{-y^2} - \log t$ è definitivamente minore di qualunque numero $m < 0$; per esempio, scegliendo $m = -1$, si ha

$$e^{-y^2} - \log t \leq 1 - \log t \leq -1 \quad \forall t \geq e^2.$$

Dunque la soluzione $y(t)$ soddisfa

$$y''(t) = e^{-y^2(t)} - \log t \leq -1 \quad \forall t \geq e^2,$$

da cui

$$y'(t) - y'(e^2) = \int_{e^2}^t y''(s)\,ds \leq \int_{e^2}^t -1\,ds = -(t - e^2) \quad \forall t \geq e^2,$$

cioè

$$y'(t) \leq -t + c \quad \forall t \geq e^2, \qquad c := y'(e^2) + e^2,$$

e c è indipendente da t. Di conseguenza

$$y(t) - y(e^2) = \int_{e^2}^t y'(s)\,ds \leq \int_{e^2}^t (-s + c)\,ds = -\frac{t^2}{2} + \frac{e^4}{2} + c(t - e^2),$$

cioè

$$y(t) \leq -\frac{t^2}{2} + ct + c_0 \quad \forall t \geq e^2,$$

con $c_0 := y(e^2) - ce^2 + e^4/2$. Questo prova che $y(t) \to -\infty$ per $t \to \infty$. □

Esercizio 9.3. Si consideri l'equazione differenziale

$$u' = f(t,u) = \frac{u^4 + t^2}{u^2 t}, \qquad t > 0, \quad u > 0.$$

Studiare l'esistenza globale delle soluzioni.

Svolgimento. Il campo f soddisfa

$$f(t,y)=\frac{y^4+t^2}{y^2t}>\frac{y^4}{y^2t}=\frac{y^2}{t}=:g(t,y).$$

Vogliamo usare il Teorema del confronto: dato $(t_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$, con t_0,y_0 positivi, siano u e φ le soluzioni dei problemi di Cauchy $u'=f(t,u)$ e $\varphi'=g(t,\varphi)$ con lo stesso dato iniziale (t_0,y_0), cioè

$$\begin{cases} u'=f(t,u)=\dfrac{u^4+t^2}{u^2t}, \\ u(t_0)=y_0, \end{cases} \qquad \begin{cases} \varphi'=g(t,\varphi)=\dfrac{\varphi^2}{t}, \\ \varphi(t_0)=y_0. \end{cases}$$

L'equazione $\varphi'=\varphi^2/t$ è a variabili separabili. Riscriviamola come $\varphi'/\varphi^2=1/t$, cioè

$$(-1/\varphi)'=(\log t)',$$

cioè $(1/\varphi+\log t)'=0$. Quindi $1/\varphi+\log t=$ costante, da cui

$$\frac{1}{\varphi(t)}+\log t=\frac{1}{\varphi(t_0)}+\log t_0,$$

cioè, ricordando che $\varphi(t_0)=y_0$,

$$\varphi(t)=\frac{1}{1/y_0-\log(t/t_0)}, \qquad \forall t\in[t_0,c), \qquad c:=t_0\exp(1/y_0).$$

Inoltre φ "esplode" al tempo c (*blowup*), cioè

$$\varphi(t)\to+\infty \qquad (t\to c).$$

Dal Teorema del confronto (Teorema 8.3), poiché $f(t,y)>g(t,y)$, su ogni intervallo $[t_0,t_1]$ in cui u e φ sono entrambe definite si ha

$$u(t)\geq\varphi(t) \qquad \forall t\geq[t_0,t_1].$$

Questo mostra che anche u esplode a tempo finito, e ci dà anche una stima del tempo massimo di esistenza di u: si ha

$$u(t)\to+\infty \qquad (t\to\beta),$$

per un certo tempo massimale β nell'intervallo $t_0<\beta\leq c=t_0\exp(1/y_0)$. □

Esercizio 9.4. (*Soluzioni pari/dispari*). Sia $f:\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}^N$ continua e localmente lipschitziana in y.

(i) Dimostrare che se $f(-t,y)=-f(t,y)$ per ogni $(t,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N$, allora per ogni $y_0\in\mathbb{R}^N$ la soluzione del problema di Cauchy

$$u'=f(t,u), \qquad u(0)=y_0$$

è pari, cioè $u(-t)=u(t)$.

(ii) Dimostrare che se $f(-t,-y)=f(t,y)$ per ogni $(t,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N$, allora la soluzione del problema di Cauchy

$$u'=f(t,u), \qquad u(0)=0$$

è dispari, cioè $u(-t)=-u(t)$.

Esercizio 9.5. Si consideri il problema di Cauchy

$$u' = \frac{u^2}{t^2}, \qquad u(t_0) = y_0.$$

Si discuta esistenza globale/blowup per $t \geq t_0$ al variare dei dati iniziali (t_0, y_0), con $t_0 > 0$, $y_0 > 0$.

Esercizio 9.6. Come nell'esercizio precedente, ma più in generale: si consideri il problema di Cauchy

$$u' = a(t)u^2, \qquad u(t_0) = y_0,$$

e si discuta esistenza globale/blowup per $t \geq t_0$ al variare dei dati iniziali (t_0, y_0) e della funzione (continua) $a(t)$: esiste un criterio generale su $a(t)$ che determina l'esistenza globale o il blowup a tempo finito?

10 Lezione 10

Esercizio 10.1. Studiare l'esistenza globale delle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} u' = -v^3 \\ v' = u + u^5. \end{cases}$$

Svolgimento. Il campo vettoriale $f(u,v) = (-v^3, u + u^5)$ non soddisfa l'ipotesi di crescita al più lineare $|f(u,v)| \leq A|(u,v)| + B$ del Teorema di esistenza globale. D'altra parte, il sistema ha un integrale primo: sia

$$E(u,v) := \frac{u^2}{2} + \frac{u^6}{6} + \frac{v^4}{4}.$$

Se $(u(t), v(t))$ è soluzione del sistema in un certo intervallo I, allora

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\{E(u(t), v(t))\} &= uu' + u^5u' + v^3v' \\ &= (-v^3)(u + u^5) + v^3(u + u^5) = 0. \end{aligned}$$

Quindi E rimane costante lungo le soluzioni. Se la soluzione all'istante t_0 si trova in un certo dato iniziale $(u(t_0), v(t_0)) = (u_0, v_0)$, si ha

$$E(u(t), v(t)) = E(u(t_0), v(t_0)) = E(u_0, v_0) = \frac{u_0^2}{2} + \frac{u_0^6}{6} + \frac{v_0^4}{4} \qquad \forall t \in I.$$

Poiché

$$\frac{u^2(t)}{2} \leq E(u(t), v(t)) = E(u_0, v_0), \qquad \frac{v^4(t)}{4} \leq E(u(t), v(t)) = E(u_0, v_0),$$

si ha

$$u^2(t) \leq 2E(u_0, v_0), \qquad v^2(t) = (v^4(t))^{\frac{1}{2}} \leq (4E(u_0, v_0))^{\frac{1}{2}},$$

da cui

$$u^2(t) + v^2(t) \leq 2E(u_0, v_0) + \sqrt{4E(u_0, v_0)} =: M,$$

cioè la soluzione rimane nel cerchio $u^2 + v^2 \leq M$ (compatto) per ogni t nell'intervallo massimale di esistenza (T_-, T_+).

Se T_+ fosse finito, esisterebbe una successione di tempi t_n che converge a T_+ tale che $(u(t_n), v(t_n))$ converge ad un certo punto del cerchio (ragionando come già fatto altre volte, basta prendere una successione $t_n \to T_+$, e poi, per compattezza, esiste una sottosuccessione di $(t_n, u(t_n), v(t_n))$ che converge). Quindi, dal Criterio di prolungabilità con successione (t_n) (Lemma 7.2), la soluzione sarebbe prolungabile a destra di T_+, assurdo. Quindi $T_+ = +\infty$. Allo stesso modo si prova che $T_- = -\infty$.

In conclusione, ogni soluzione del sistema è globale, e rimane in un cerchio per tutti i tempi $t \in \mathbb{R}$. $\square$

Nell'esercizio precedente, l'integrale primo confina ogni soluzione a rimanere su una curva di equazione $E(u, v) = $ costante, che è un insieme limitato, e questo implica l'esistenza globale di ogni soluzione. Questo vale più in generale:

Proposizione 10.2. (Esistenza globale tramite integrale primo). *Sia $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ continua e localmente lipschitziana. Supponiamo che il sistema autonomo $u' = f(u)$ abbia un integrale primo $E : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$. Sia $y_0 \in \mathbb{R}^N$. Se l'insieme di livello $\{y \in \mathbb{R}^N : E(y) = E(y_0)\}$ è limitato, allora la soluzione del problema di Cauchy*

$$u' = f(u), \qquad u(t_0) = y_0$$

è globale, cioè definita per ogni $t \in \mathbb{R}$.

Dimostrazione. Sia u soluzione del problema di Cauchy, e sia (T_-, T_+) il suo intervallo di esistenza massimale. Poiché $E(u(t)) = E(u(t_0)) = E(y_0)$ per ogni $t \in (T_-, T_+)$, la soluzione $u(t)$ appartiene all'insieme di livello $\{y : E(y) = E(y_0)\}$ per ogni $t \in (T_-, T_+)$. Se T_+ (o T_-) fosse finito, usando il criterio di prolungabilità con successione (Lemma 7.2) come nello svolgimento dell'esercizio 10.1, oppure il Teorema di fuga dai compatti (Teorema 7.3), potremmo prolungare la soluzione oltre il suo intervallo massimale, assurdo. Quindi $(T_-, T_+) = \mathbb{R}$. $\square$

Esempio. Una classe importante di sistemi con integrale primo è quella dei sistemi meccanici conservativi: consideriamo l'equazione

$$\begin{cases} u' = v, \\ v' = -\nabla P(u), \end{cases} \tag{10.1}$$

dove $P : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ è una funzione scalare. Il valore $P(u)$ è l'energia potenziale del sistema, mentre la sua energia cinetica è $\frac{1}{2}|v|^2$. L'energia totale

$$E(u, v) = \frac{1}{2}|v|^2 + P(u), \tag{10.2}$$

data dalla somma di energia cinetica ed energia potenziale, è un integrale primo del sistema: infatti, lungo ogni soluzione $(u(t), v(t))$ dell'equazione, si ha

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\big\{E(u(t), v(t))\big\} &= \frac{d}{dt}\Big(\frac{1}{2}(v_1^2 + \ldots + v_N^2) + P(u_1, \ldots, u_N)\Big) \\ &= v \cdot v' + \nabla P(u) \cdot u' \\ &= v \cdot (-\nabla P(u)) + \nabla P(u) \cdot v \\ &= 0. \end{aligned}$$

In altre parole, l'energia si conserva.

Esercizio 10.3. Si consideri il sistema (10.1) e il suo integrale primo (energia) (10.2). Dimostrare che, se la funzione P è limitata dal basso, cioè se esiste $c_0 \in \mathbb{R}$ tale che $P(x) \geq c_0$ per ogni $x \in \mathbb{R}^N$, allora il sistema ha esistenza globale.

Svolgimento. Sia (u, v) soluzione di (10.1), e sia $I = (T_-, T_+)$ il suo intervallo massimale di esistenza. Sia $t_0 \in I$ un istante fissato, e sia $(u_0, v_0) := (u(t_0), v(t_0))$ il punto in cui si trova la soluzione all'istante t_0. Poiché E è costante lungo la soluzione, per ogni $t \in I$ si ha

$$E(u(t), v(t)) = \frac{1}{2}|v(t)|^2 + P(u(t)) = E(u_0, v_0) = \frac{1}{2}|v_0|^2 + P(u_0) =: E_0.$$

Inoltre, poiché $P \geq c_0$, si ha

$$E_0 = \frac{1}{2}|v(t)|^2 + P(u(t)) \geq \frac{1}{2}|v(t)|^2 + c_0 \geq c_0,$$

da cui $E_0 \geq c_0$ e

$$|v(t)|^2 \leq 2(E_0 - c_0),$$

quindi $v(t)$ è limitata,

$$|v(t)| \leq M := \sqrt{2(E_0 - c_0)} \quad \forall t \in I.$$

Di conseguenza per ogni $t \in I$ si ha

$$|u(t)| = \Big| u(t_0) + \int_{t_0}^{t} u'(s)\, ds \Big| \leq |u_0| + \Big| \int_{t_0}^{t} v(s)\, ds \Big| \leq |u_0| + M|t - t_0|.$$

Se T_+ fosse finito, avremmo

$$|v(t)| \leq M, \quad |u(t)| \leq |u_0| + M(T_+ - t_0) =: C \quad \forall t \in [t_0, T_+). \tag{10.3}$$

Quindi, ragionando come già visto negli esercizi precedenti, esisterebbe una successione $t_n \to T_+$ con $(t_n, u(t_n), v(t_n))$ convergente ad un certo limite finito (T_+, u_1, v_1), e allora, dal criterio di prolungabilità per successione (Lemma 7.2), la soluzione sarebbe prolungabile a destra di T_+, assurdo. In alternativa: se T_+ fosse finito, avremmo (10.3), e la terna $(t, u(t), v(t))$ starebbe nel compatto $[t_0, T_+] \times \{|u| \leq C\} \times \{|v| \leq M\}$ per tutti i tempi $t \in [t_0, T_+)$, contro il Teorema di fuga dai compatti (Teorema 7.3), assurdo. Dunque $T_+ = +\infty$. In modo analogo si prova che $T_- = -\infty$. □

Ora vediamo un risultato di Analisi 1 utile negli esercizi di studio qualitativo di equazioni differenziali.

Teorema 10.4. (Teorema dell'asintoto). *(i) Sia $a \in \mathbb{R}$, sia $u : (a, \infty) \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile, e supponiamo che esistano i limiti*

$$\ell = \lim_{t \to +\infty} u(t), \quad m = \lim_{t \to +\infty} u'(t).$$

Se ℓ è finito, allora $m = 0$.

(ii) Siano $a, b \in \mathbb{R}$, con $a < b$, sia $u : (a, b) \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile, e supponiamo che esistano i limiti

$$\ell = \lim_{t \to b} u(t), \quad m = \lim_{t \to b} u'(t).$$

Se $\ell = +\infty$, allora $m = +\infty$. Se $\ell = -\infty$, allora $m = -\infty$.

Risultati analoghi valgono per $t \to -\infty$ e per $t \to a$:

(iii) Sia $b \in \mathbb{R}$, sia $u : (-\infty, b) \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile, e supponiamo che esistano i limiti

$$\ell = \lim_{t \to -\infty} u(t), \qquad m = \lim_{t \to -\infty} u'(t).$$

Se ℓ è finito, allora $m = 0$.

(iv) Siano $a, b \in \mathbb{R}$, con $a < b$, sia $u : (a, b) \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile, e supponiamo che esistano i limiti

$$\ell = \lim_{t \to a} u(t), \qquad m = \lim_{t \to a} u'(t).$$

Se $\ell = +\infty$, allora $m = -\infty$. Se $\ell = -\infty$, allora $m = +\infty$.

Dimostrazione. (*i*) Sia $\ell \in \mathbb{R}$. Per ogni $n \in \mathbb{N}$, dal Teorema di Lagrange esiste $t_n \in (n, n+1)$ tale che $u(n+1) - u(n) = u'(t_n)$. Quindi

$$\lim_{n \to +\infty} u'(t_n) = \lim_{n \to +\infty} \big(u(n+1) - u(n)\big) = \ell - \ell = 0.$$

D'altra parte $u'(t) \to m$ per $t \to +\infty$, quindi $m = 0$.

(*ii*) Sia $\ell = +\infty$, e supponiamo che $\lim_{(t \to b)} u'(t) = m \in \mathbb{R}$. Dalla definizione di limite, esiste $t_0 \in (a, b)$ tale che $|u'(t) - m| \leq 1$ per ogni $t \in [t_0, b)$. Quindi si ha $|u'(t)| \leq m + 1$ per ogni $t \in [t_0, b)$.

Sia ora $t \in (t_0, b)$. Dal Teorema di Lagrange, $u(t) - u(t_0) = u'(s)(t - t_0)$ per un certo $s \in (t_0, t)$, quindi

$$|u(t)| = |u(t_0) + u'(s)(t - t_0)| \leq |u(t_0)| + (m+1)(b - t_0) =: C.$$

Questo prova che $u(t) \leq C$ per ogni $t \in (t_0, b)$, e C è indipendente da t. Quindi $\ell \leq C$, assurdo.

Se $m = -\infty$, dalla definizione di limite esiste $t_0 \in (a, b)$ tale che $u'(t) \leq 0$ per ogni $t \in [t_0, b)$. Quindi $u(t) \leq u(t_0)$ per ogni $t \in (t_0, b)$, e dunque $\ell \leq u(t_0)$, assurdo. Questo conclude la dimostrazione del fatto che se $\ell = +\infty$ allora $m = +\infty$.

Tutti gli altri casi dell'enunciato si dimostrano in modo simile.

[Anche così: ponendo $u(t) = -v(t)$ si deduce l'implicazione $\ell = -\infty \Rightarrow m = -\infty$ del caso (*ii*) dall'implicazione appena provata; ponendo $u(t) = v(-t)$ si deduce (*iii*) da (*i*); ponendo $u(t) = v(a + b - t)$ si deduce (*iv*) da (*ii*)]. □

Osserviamo che nel Teorema dell'asintoto l'ipotesi che esista il limite di $u'(t)$ non può essere rimossa.

Esercizio 10.5. (*i*) Costruire un esempio di funzione $u : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ tale che $u(t) \to \ell \in \mathbb{R}$ per $t \to +\infty$ e $u'(t)$ non ha limite per $t \to +\infty$.

(*ii*) Costruire un esempio di funzione $u : (0, 1) \to \mathbb{R}$ tale che $u(t) \to +\infty$ per $t \to 0$, e $u'(t)$ non ha limite per $t \to 0$.

Vediamo ora il Lemma di Gronwall, un risultato simile al Teorema del confronto, basato sul confronto con le equazioni lineari del primo ordine. L'enunciato standard si potrebbe limitare al punto 2) del lemma seguente, ma anche le altre versioni sono spesso utili sia negli esercizi che nelle dimostrazioni di altri teoremi, quindi, al prezzo di allungare un po' l'enunciato, pensiamo sia utile fornire anche le varianti seguenti.

Lemma 10.6. (Lemma di Gronwall). *Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo, $t_0 \in I$. Indichiamo*

$$I_+ = \{t \in I : t \geq t_0\}, \qquad I_- = \{t \in I : t \leq t_0\}.$$

1) Sia $\varphi : I_+ \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile, siano $a, b : I_+ \to \mathbb{R}$ due funzioni continue, e sia

$$\varphi'(t) \leq a(t)\varphi(t) + b(t) \quad \forall t \in I_+.$$

Allora

$$\varphi(t) \leq \exp\Big(\int_{t_0}^t a(s)\,ds\Big)\Big[\varphi(t_0) + \int_{t_0}^t \exp\Big(-\int_{t_0}^s a(\sigma)\,d\sigma\Big)b(s)\,ds\Big] \quad \forall t \in I_+.$$

2) (Versione standard). Sia $\varphi : I_+ \to \mathbb{R}$ derivabile, siano $a, b : I_+ \to \mathbb{R}$ continue, e

$$a(t) \geq 0, \quad b(t) \geq 0, \quad \varphi'(t) \leq a(t)\varphi(t) + b(t) \quad \forall t \in I_+.$$

Allora

$$\varphi(t) \leq \exp\Big(\int_{t_0}^t a(s)\,ds\Big)\Big(\varphi(t_0) + \int_{t_0}^t b(s)\,ds\Big) \quad \forall t \in I_+.$$

3) Sia $\varphi : I_- \to \mathbb{R}$ derivabile, siano $\alpha, \beta : I_- \to \mathbb{R}$ continue, e

$$\varphi'(t) \geq \alpha(t)\varphi(t) + \beta(t) \quad \forall t \in I_-.$$

Allora

$$\varphi(t) \leq \exp\Big(\int_{t_0}^t \alpha(s)\,ds\Big)\Big[\varphi(t_0) + \int_{t_0}^t \exp\Big(-\int_{t_0}^s \alpha(\sigma)\,d\sigma\Big)\beta(s)\,ds\Big] \quad \forall t \in I_-.$$

4) Sia $\varphi : I_- \to \mathbb{R}$ derivabile, siano $\alpha, \beta : I_- \to \mathbb{R}$ continue, e

$$\alpha(t) \leq 0, \quad \beta(t) \leq 0, \quad \varphi'(t) \geq \alpha(t)\varphi(t) + \beta(t) \quad \forall t \in I_-.$$

Allora

$$\varphi(t) \leq \exp\Big(\int_{t_0}^t \alpha(s)\,ds\Big)\Big(\varphi(t_0) + \int_{t_0}^t \beta(s)\,ds\Big) \quad \forall t \in I_-.$$

5) Sia $\varphi : I \to \mathbb{R}$ derivabile, siano $A, B : I \to \mathbb{R}$ continue, e

$$A(t) \geq 0, \quad B(t) \geq 0, \quad |\varphi'(t)| \leq A(t)\varphi(t) + B(t) \quad \forall t \in I.$$

Allora

$$\varphi(t) \leq \exp\Big(\int_{I(t_0,t)} A(s)\,ds\Big)\Big(\varphi(t_0) + \int_{I(t_0,t)} B(s)\,ds\Big) \quad \forall t \in I$$

dove $I(t_0, t)$ indica l'intervallo di estremi t_0 e t

$$I(t_0,t) := [\min\{t_0,t\}, \max\{t_0,t\}] = \begin{cases} [t_0,t] & \textit{se } t_0 \leq t, \\ [t,t_0] & \textit{se } t \leq t_0. \end{cases}$$

6) Sia $\varphi : I \to \mathbb{R}$ derivabile, siano A, B costanti, e

$$A \geq 0, \quad B \geq 0, \quad |\varphi'(t)| \leq A\varphi(t) + B \quad \forall t \in I.$$

Allora
$$\varphi(t) \le e^{A|t-t_0|}(\varphi(t_0) + B|t-t_0|) \qquad \forall t \in I.$$

7) Sia $u : I \to \mathbb{R}^N$ una funzione (vettoriale) derivabile, siano $A, B : I \to \mathbb{R}$ due funzioni continue, e sia

$$A(t) \ge 0, \qquad B(t) \ge 0, \qquad |u'(t)| \le A(t)|u(t)| + B(t) \qquad \forall t \in I.$$

Allora

$$|u(t)| \le \exp\Big(\int_{I(t_0,t)} A(s)\,ds\Big)\Big(|u(t_0)| + \int_{I(t_0,t)} B(s)\,ds\Big) \qquad \forall t \in I.$$

8) Sia $u : I \to \mathbb{R}^N$ funzione (vettoriale) derivabile, siano A, B costanti, e sia

$$A \ge 0, \qquad B \ge 0, \qquad |u'(t)| \le A|u(t)| + B \qquad \forall t \in I.$$

Allora
$$|u(t)| \le e^{A|t-t_0|}(|u(t_0)| + B|t-t_0|) \qquad \forall t \in I.$$

Dimostrazione. • *Dimostrazione di 1)* Sia $g(t,y) := a(t)y + b(t)$, cosicché $\varphi' \le g(t,\varphi)$ in I_+. Sia ψ la soluzione del problema di Cauchy

$$\psi' = g(t,\psi), \qquad \psi(t_0) = \varphi(t_0).$$

Dal Teorema del confronto si ha allora $\varphi \le \psi$ in I_+ (applicare il Teorema 8.3, punto (i), con $u = \varphi$, $v = \psi$, $f = g$). Inoltre, ricordando la formula (6.5) delle soluzioni delle equazioni lineari, non omogenee, del primo ordine, si ha

$$\psi(t) = \exp\Big(\int_{t_0}^t a(s)\,ds\Big)\Big[\varphi(t_0) + \int_{t_0}^t \exp\Big(-\int_{t_0}^s a(\sigma)\,d\sigma\Big) b(s)\,ds\Big].$$

• *Dimostrazione di 2)* Poiché $a \ge 0$ in I_+, per ogni $s \in I_+$ si ha

$$\int_{t_0}^s a(\sigma)\,d\sigma \ge 0,$$

quindi
$$\exp\Big(-\int_{t_0}^s a(\sigma)\,d\sigma\Big) \le 1.$$

Essendo $b \ge 0$ in I_+, si ha

$$\exp\Big(-\int_{t_0}^s a(\sigma)\,d\sigma\Big) b(s) \le b(s).$$

Da 1) segue dunque 2).

• *Dimostrazione di 3)* Sia $g(t,y) := \alpha(t)y + \beta(t)$, cosicché $\varphi' \ge g(t,\varphi)$ in I_-. Sia ψ la soluzione di $\psi' = g(t,\psi)$ con dato iniziale $\psi(t_0) = \varphi(t_0)$. Dal Teorema del confronto si ha allora $\varphi \le \psi$ in I_- (applicare il Teorema 8.3, punto (ii), con $u = \psi$, $v = \varphi$, $f = g$). Infine, ricordando (6.5),

$$\psi(t) = \exp\Big(\int_{t_0}^t \alpha(s)\,ds\Big)\Big[\varphi(t_0) + \int_{t_0}^t \exp\Big(-\int_{t_0}^s \alpha(\sigma)\,d\sigma\Big)\beta(s)\,ds\Big].$$

• *Dimostrazione di 4)* Siano $t, s \in I_-$, con $t \leq s \leq t_0$. Allora

$$-\int_{t_0}^{s} \alpha(\sigma)\, d\sigma = \int_{s}^{t_0} \alpha(\sigma)\, d\sigma \leq 0$$

perché $\alpha \leq 0$. Quindi

$$0 < \exp\Big(-\int_{t_0}^{s} \alpha(\sigma)\, d\sigma\Big) \leq 1.$$

Moltiplicando per $(-\beta)$, che è ≥ 0, si ha

$$0 \leq -\beta(s) \exp\Big(-\int_{t_0}^{s} \alpha(\sigma)\, d\sigma\Big) \leq -\beta(s).$$

Dunque

$$\begin{aligned}\int_{t_0}^{t} \exp\Big(-\int_{t_0}^{s} \alpha(\sigma)\, d\sigma\Big)\beta(s)\, ds &= \int_{t}^{t_0} -\beta(s) \exp\Big(-\int_{t_0}^{s} \alpha(\sigma)\, d\sigma\Big) ds \\ &\leq \int_{t}^{t_0} -\beta(s)\, ds = \int_{t_0}^{t} \beta(s)\, ds.\end{aligned}$$

Dalla 3) segue dunque 4).

• *Dimostrazione di 5)* L'ipotesi $|\varphi'| \leq A(t)\varphi + B(t)$ implica che $A(t)\varphi + B(t) \geq 0$ e che

$$-A(t)\varphi - B(t) \leq \varphi' \leq A(t)\varphi + B(t) \qquad \forall t \in I.$$

Il punto 2) con $a = A$, $b = B$ dà

$$\varphi(t) \leq \exp\Big(\int_{t_0}^{t} A(s)\, ds\Big)\Big(\varphi(t_0) + \int_{t_0}^{t} B(s)\, ds\Big) \qquad \forall t \in I_+,$$

che è la tesi per $t \in I_+$. Il punto 4) con $\alpha = -A$, $\beta = -B$ dà

$$\begin{aligned}\varphi(t) &\leq \exp\Big(\int_{t_0}^{t} -A(s)\, ds\Big)\Big(\varphi(t_0) + \int_{t_0}^{t} -B(s)\, ds\Big) \\ &= \exp\Big(\int_{t}^{t_0} A(s)\, ds\Big)\Big(\varphi(t_0) + \int_{t}^{t_0} B(s)\, ds\Big) \qquad \forall t \in I_-,\end{aligned}$$

che è la tesi per $t \in I_-$.

• *Dimostrazione di 6)* È un caso particolare della 5).

• *Dimostrazione di 7)* Sia $\varepsilon > 0$, e definiamo

$$\varphi(t) := \sqrt{\varepsilon + |u(t)|^2}, \qquad t \in I.$$

Si ha allora

$$|u(t)| < \varphi(t), \qquad \varphi(t) \geq \sqrt{\varepsilon} > 0 \qquad \forall t \in I$$

e

$$\begin{aligned}\varphi'(t) &= \frac{d}{dt}\sqrt{\varepsilon + u_1^2(t) + \ldots + u_N^2(t)} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon + |u(t)|^2}}(2u_1(t)u_1'(t) + \ldots + 2u_N(t)u_N'(t)) \\ &= \frac{1}{\varphi(t)} u(t) \cdot u'(t).\end{aligned}$$

Dalla disuguaglianza di Cauchy-Schwarz, ricordando che $|u(t)| \leq \varphi(t)$, si ha

$$\begin{aligned}|\varphi'(t)| &= \frac{1}{\varphi(t)}|u(t) \cdot u'(t)| \\ &\leq \frac{1}{\varphi(t)}|u(t)||u'(t)| \\ &\leq |u'(t)| \\ &\leq A(t)|u(t)| + B(t) \\ &\leq A(t)\varphi(t) + B(t).\end{aligned}$$

Dalla 5) si ha allora

$$\varphi(t) \leq \exp\Big(\int_{I(t_0,t)} A(s)\,ds\Big)\Big(\varphi(t_0) + \int_{I(t_0,t)} B(s)\,ds\Big) \quad \forall t \in I.$$

Poiché $|u(t)| \leq \varphi(t)$, si ha

$$|u(t)| \leq \exp\Big(\int_{I(t_0,t)} A(s)\,ds\Big)\Big(\sqrt{\varepsilon + |u(t_0)|^2} + \int_{I(t_0,t)} B(s)\,ds\Big) \quad \forall t \in I.$$

Questa disuguaglianza vale per ogni $\varepsilon > 0$; passando all'inf su $\varepsilon > 0$ otteniamo la tesi.

- *Dimostrazione di 8)* È un caso particolare di 7). □

Della disuguaglianza di Gronwall esiste anche una versione integrale (con le sue varianti, che non riportiamo).

Lemma 10.7. (Lemma di Gronwall, versione integrale). *Sia $I \subset \mathbb{R}$ intervallo, $t_0 \in I$. Sia $w : I \to \mathbb{R}$ integrabile, e sia*

$$w(t) \leq A \int_{t_0}^{t} w(s)\,ds + B \quad \forall t \in I,\ t \geq t_0,$$

con A, B costanti ≥ 0. Allora

$$w(t) \leq B\big(1 + Ae^{A(t-t_0)}(t - t_0)\big) \quad \forall t \geq t_0.$$

Dimostrazione. Definiamo

$$\varphi(t) := \int_{t_0}^{t} w(s)\,ds,$$

cosicché l'ipotesi si riscrive $w(t) \leq A\varphi(t) + B$. Si ha $\varphi(t_0) = 0$ e

$$\varphi'(t) = w(t) \leq A\varphi(t) + B.$$

Quindi, dal Lemma 10.6,

$$\varphi(t) \leq e^{A(t-t_0)}B(t - t_0),$$

e

$$w(t) \leq A\varphi(t) + B \leq Ae^{A(t-t_0)}B(t - t_0) + B = B\big(1 + Ae^{A(t-t_0)}(t - t_0)\big). \qquad \square$$

Esercizio 10.8. Dimostrare il Teorema 8.4 di esistenza globale usando Gronwall.

Svolgimento. Nel suo intervallo massimale (T_-, T_+), la soluzione u soddisfa

$$|u'| = |f(t,u)| \le A(t)|u| + B(t).$$

Supponiamo $T_+ < \beta$ (quindi T_+ è finito). Fissiamo un qualunque $t_0 \in (T_-, T_+)$. Per Gronwall (Lemma 10.6, punto 7)), per ogni $t \in [t_0, T_+)$ si ha

$$\begin{aligned} |u(t)| &\le \exp\Big(\int_{t_0}^t A(s)\,ds\Big)\Big(|u(t_0)| + \int_{t_0}^t B(s)\,ds\Big) \\ &\le \exp\Big(\int_{t_0}^{T_+} A(s)\,ds\Big)\Big(|u(t_0)| + \int_{t_0}^{T_+} B(s)\,ds\Big) =: K, \end{aligned} \tag{10.4}$$

e K è una costante indipendente da t. Dunque per ogni $t \in [t_0, T_+)$ la coppia $(t, u(t))$ rimane nel compatto $[t_0, T_+] \times \{|u| \le K\}$, contro il Teorema 7.3 di fuga dai compatti, assurdo. Perciò $T_+ = \beta$. In modo simile si prova che $T_- = \alpha$, e la dimostrazione è conclusa.

In alternativa, arrivati a (10.4), si può concludere come nell'altra dimostrazione, osservando che esiste una successione $(t_n) \subset [t_0, T_+)$ convergente a T_+ tale che $u(t_n)$ converge a un certo $v_0 \in \mathbb{R}^N$. Quindi $(T_+, v_0) \in \Omega = (\alpha, \beta) \times \mathbb{R}^N$, dunque u si prolunga a destra di T_+, assurdo. $\square$

11 Lezione 11

Svolgimento dell'esercizio 9.4. (*i*) Sia $v(t) := u(-t)$. Usando l'ipotesi $-f(-t,y) = f(t,y)$ e l'identità $u'(t) = f(t, u(t))$, calcoliamo

$$v'(t) = -u'(-t) = -f(-t, u(-t)) = -f(-t, v(t)) = f(t, v(t))$$

e $v(0) = u(0) = y_0$. Dunque u e v soddisfano

$$\begin{cases} u' = f(t,u), \\ u(0) = y_0, \end{cases} \qquad \begin{cases} v' = f(t,v), \\ v(0) = y_0, \end{cases}$$

sono entrambe soluzione dello stesso problema di Cauchy, e quindi, dove sono definite entrambe, coincidono (ricorda Corollario 3.10).

(*ii*) Sia $v(t) := -u(-t)$. Usando l'ipotesi $f(-t,-y) = f(t,y)$ e $u'(t) = f(t,u(t))$, calcoliamo

$$v'(t) = u'(-t) = f(-t, u(-t)) = f(-t, -v(t)) = f(t, v(t))$$

e $v(0) = -u(0) = 0$. Dunque u e v sono entrambe soluzione dello stesso problema di Cauchy, quindi coincidono. $\square$

Teorema 11.1. (Dipendenza continua dai dati iniziali). *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ un aperto, e sia $f : \Omega \to \mathbb{R}^N$ una funzione continua e localmente lipschitziana in y, uniformemente in t. Sia $(t_0, y_0) \in \Omega$, sia I un intervallo contenente t_0, e sia $u : I \to \mathbb{R}^N$ la soluzione del problema di Cauchy*

$$\begin{cases} u' = f(t,u), \\ u(t_0) = y_0. \end{cases} \tag{11.1}$$

Allora per ogni intervallo compatto $[\alpha, \beta] \subset I$, con $t_0 \in [\alpha, \beta]$, esistono $\varepsilon > 0$, $L \geq 0$, $M \geq 0$ tali che per ogni $(t_1, y_1) \in \Omega$ che soddisfa

$$|t_1 - t_0| \leq \varepsilon, \quad |y_1 - y_0| \leq \varepsilon, \quad t_1 \in [\alpha, \beta], \tag{11.2}$$

la soluzione v del problema di Cauchy

$$\begin{cases} v' = f(t, v), \\ v(t_1) = y_1 \end{cases} \tag{11.3}$$

è definita su $[\alpha, \beta]$ e soddisfa

$$|v(t) - u(t)| \leq e^{L|t-t_0|}(|y_1 - y_0| + M|t_1 - t_0|) \quad \forall t \in [\alpha, \beta]. \tag{11.4}$$

Di conseguenza $v \to u$ uniformemente in $[\alpha, \beta]$ per $(t_1, y_1) \to (t_0, y_0)$.

Dimostrazione. La prima parte della dimostrazione è dedicata alla costruzione di un intorno "tubolare" del grafico di u in cui f sia limitata, $|f| \leq M$, e lipschitziana in y con un'unica costante L. Nel caso in cui, per ipotesi, f soddisfi stime globali di limitatezza e lipschitzianità, si può saltare questa costruzione iniziale e andare direttamente al nocciolo della dimostrazione, cioè (passo 3) al confronto tra u e v tramite il Lemma di Gronwall.

Passo 1: definizione di M. Poiché u è continua, l'insieme

$$G := \{(t, u(t)) : t \in [\alpha, \beta]\}$$

è compatto. Inoltre $G \subset \Omega$ perché u è soluzione dell'equazione differenziale.

Per ogni $t \in [\alpha, \beta]$ il punto $(t, u(t))$ appartiene all'aperto Ω, quindi esiste $r(t) > 0$ tale che la palla in $\mathbb{R}^{1+N}$ di centro $(t, u(t))$ e raggio $r(t)$, che indichiamo $B_1(t)$, sia contenuta in Ω. Sia $B_0(t)$ la palla con lo stesso centro $(t, u(t))$ e raggio $r(t)/2$. Abbiamo dunque $(t, u(t)) \in B_0(t) \subset \overline{B_0(t)} \subset B_1(t) \subset \Omega$.

L'unione di tutti i $B_0(t)$ al variare di $t \in [\alpha, \beta]$ forma un ricoprimento di G. Quindi esiste un suo sottoricoprimento finito, cioè esistono $t_1, \ldots, t_n \in [\alpha, \beta]$ tali che

$$G \subset \bigcup_{k=1}^{n} B_0(t_k) =: A_0.$$

La chiusura dell'aperto A_0, che indichiamo K_0, soddisfa

$$K_0 := \overline{A_0} = \bigcup_{k=1}^{n} \overline{B_0(t_k)} \subset \bigcup_{k=1}^{n} B_1(t_k) \subset \Omega.$$

Dunque

$$G \subset A_0 \subset \overline{A_0} = K_0 \subset \Omega, \tag{11.5}$$

con G, K_0 compatti, e A_0, Ω aperti. Definiamo

$$M := \max\{|f(t, y)| : (t, y) \in K_0\}.$$

Si ha $M < \infty$ perché f è continua e K_0 è compatto.

Passo 2: definizione di L. Per ipotesi, f è localmente lipschitziana in y, uniformemente in t, in Ω, quindi lo è anche nel suo sottoinsieme aperto A_0. Per ogni

$t \in [\alpha, \beta]$, il punto $(t, u(t))$ appartiene ad A_0, e dunque, per ipotesi, esistono $a(t) > 0$, $b(t) > 0$ e $L(t) \geq 0$ tali che

$$\begin{cases} [t - a(t), t + a(t)] \times \overline{B(u(t), b(t))} \subset A_0, \\ |f(s, y) - f(s, z)| \leq L(t)|y - z| \quad \forall s \in [t - a(t), t + a(t)],\ y, z \in \overline{B(u(t), b(t))}, \end{cases} \tag{11.6}$$

dove $B(u(t), b(t))$ è la palla in $\mathbb{R}^N$ di centro $u(t)$ e raggio $b(t)$. Inoltre, essendo $G \subset K_0$, si ha $|f(t, u(t))| \leq M$ per ogni $t \in [\alpha, \beta]$. Definiamo

$$\delta(t) := \min\left\{a(t), \frac{b(t)}{2M}\right\} \qquad (\delta(t) := a(t) \text{ se } M = 0),$$

cosicché per ogni $s \in [t - \delta(t), t + \delta(t)]$ si ha

$$\begin{aligned} |u(s) - u(t)| = \Big| \int_t^s u'(\sigma) d\sigma \Big| &= \Big| \int_t^s f(\sigma, u(\sigma))\, d\sigma \Big| \\ &\leq M|t - s| \leq M\delta(t) \leq \frac{b(t)}{2}. \end{aligned}$$

L'unione dei rettangoli aperti $(t - \delta(t), t + \delta(t)) \times B(u(t), b(t)/2)$ al variare di $t \in [\alpha, \beta]$ è un ricoprimento di G. Quindi esiste un suo sottoricoprimento finito, cioè esistono $\tau_1, \ldots, \tau_m \in [\alpha, \beta]$ tali che

$$G \subset \bigcup_{k=1}^{m} \big(\tau_k - \delta(\tau_k), \tau_k + \delta(\tau_k)\big) \times B\Big(u(\tau_k), \frac{b(\tau_k)}{2}\Big). \tag{11.7}$$

Definiamo

$$r := \min\left\{\frac{b(\tau_k)}{2} : k = 1, \ldots, m\right\}$$

e

$$K := \{(t, y) \in \mathbb{R}^{1+N} : t \in [\alpha, \beta],\ |y - u(t)| \leq r\}. \tag{11.8}$$

Siano $t \in [\alpha, \beta]$ e $y, z \in \mathbb{R}^N$ tali che $(t, y), (t, z) \in K$. Il punto $(t, u(t))$ appartiene a G, quindi, dalla (11.7), appartiene al rettangolo $(\tau_k - \delta(\tau_k), \tau_k + \delta(\tau_k)) \times B(u(\tau_k), b(\tau_k)/2)$ per un certo k. Allora

$$|y - u(\tau_k)| \leq |y - u(t)| + |u(t) - u(\tau_k)| \leq r + \frac{b(\tau_k)}{2} \leq b(\tau_k),$$

e similmente $|z - u(\tau_k)| \leq b(\tau_k)$. Dalla (11.6) si ha dunque

$$|f(t, y) - f(t, z)| \leq L(\tau_k)|y - z| \leq L|y - z|$$

dove

$$L := \max\{L(\tau_k) : k = 1, \ldots, m\}.$$

Conclusione del passo 2. Abbiamo dimostrato che esistono $r > 0$, $M \geq 0$ e $L \geq 0$ tali che

$$\begin{cases} K = \{(t, y) : t \in [\alpha, \beta],\ |y - u(t)| \leq r\} \subset \Omega, \\ |f(t, y)| \leq M \quad \forall (t, y) \in K, \\ |f(t, y) - f(t, z)| \leq L|y - z| \quad \forall t, y, z,\ (t, y), (t, z) \in K. \end{cases} \tag{11.9}$$

Passo 3: confronto tra u e v. Sia $\varepsilon > 0$, $(t_1, y_1) \in \Omega$, con $|t_1 - t_0| \leq \varepsilon$, $|y_1 - y_0| \leq \varepsilon$, $t_1 \in [\alpha, \beta]$. Essendo $u(t_0) = y_0$ e $|u'(t)| = |f(t, u(t))| \leq M$, si ha

$$\begin{aligned} |y_1 - u(t_1)| &\leq |y_1 - y_0| + |u(t_0) - u(t_1)| \\ &\leq \varepsilon + M|t_1 - t_0| \leq (1 + M)\varepsilon \leq \frac{r}{2} \end{aligned} \tag{11.10}$$

se $\varepsilon \leq r/(2 + 2M)$. Sia

$$E = \{p \in [t_1, \beta] : v \text{ è definita su } [t_1, p] \text{ e } |v(t) - u(t)| < r \ \forall t \in [t_1, p]\}.$$

L'insieme E è non vuoto perché $t_1 \in E$. Sia $c = \sup E$, e mostriamo che $c = \beta$.

Se $t_1 = \beta$, si ha banalmente $E = \{t_1\} = \{\beta\}$ e $c = \beta$. Sia dunque $t_1 \in [\alpha, \beta)$. Dal Teorema di esistenza locale e unicità, la soluzione v del problema di Cauchy (11.3) è definita in $[t_1 - \delta_1, t_1 + \delta_1]$ per un certo $\delta_1 > 0$. Sia $\delta_2 := \min\{\delta_1, \beta - t_1\}$, cosicché l'intervallo $[t_1, t_1 + \delta_2]$ è contenuto in $[\alpha, \beta]$ e anche in $[t_1 - \delta_1, t_1 + \delta_1]$, quindi u e v sono entrambe definite in $[t_1, t_1 + \delta_2]$. Notiamo che $\delta_2 > 0$. Poiché u e v sono continue, ed essendo $|v(t_1) - u(t_1)| \leq r/2 < r$, si ha $|v - u| < r$ in un intervallo $[t_1, t_1 + \delta_3]$ per un certo $\delta_3 \in (0, \delta_2]$. Questo implica che $t_1 + \delta_3 \in E$ e $c \geq t_1 + \delta_3 > t_1$.

Si ha dunque $t_1 < c \leq \beta$. Supponiamo $c < \beta$. Per definizione di $c = \sup E$, si ha $(t, v(t)) \in K$ per ogni $t \in [t_1, c)$. Quindi

$$|v'(t) - u'(t)| = |f(t, v(t)) - f(t, u(t))| \leq L|v(t) - u(t)| \quad \forall t \in [t_1, c),$$

cioè la differenza $w := v - u$ soddisfa $|w'| \leq L|w|$ in $[t_1, c)$. Di conseguenza, dal Lemma di Gronwall,

$$|v(t) - u(t)| \leq e^{L|t - t_1|}|v(t_1) - u(t_1)| \quad \forall t \in [t_1, c).$$

Poiché $|v(t_1) - u(t_1)| \leq (1 + M)\varepsilon$ (vedi (11.10)), si ha

$$e^{L|t - t_1|}|v(t_1) - u(t_1)| \leq e^{L(\beta - \alpha)}(1 + M)\varepsilon \leq \frac{r}{2}$$

se $\varepsilon \leq e^{-L(\beta - \alpha)} r/(2 + 2M)$. Dunque $|v(t) - u(t)| \leq r/2$ per ogni $t \in [t_1, c)$. Di conseguenza esiste una successione $t_n \to c$ tale che $v(t_n)$ converge a un certo limite v_0, con $|v_0 - u(c)| \leq r/2$, da cui $(c, v_0) \in K \subset \Omega$. Perciò v è prolungabile a destra di c, e, per continuità, $|v - u| < r$ in un intervallo a destra di c, quindi esistono punti di E a destra di c, contro la definizione di $c = \sup E$, assurdo. Questo dimostra che $c = \beta$, cioè v è definita in $[t_1, \beta)$, con $|v - u| \leq r/2$ in $[t_1, \beta)$. Quindi v è prolungabile a destra di β, e $|v - u| \leq r/2$ in $[t_1, \beta]$.

In modo simile si dimostra che v è definita in $[\alpha, t_1]$, con $|v - u| \leq r/2$ in $[\alpha, t_1]$. Dunque v è definita in tutto l'intervallo $[\alpha, \beta]$, e si ha

$$|v(t) - u(t)| \leq e^{L|t - t_1|}(|y_1 - y_0| + M|t_1 - t_0|) \quad \forall t \in [\alpha, \beta].$$

Per ottenere la stima con $L|t - t_0|$ all'esponente, osserviamo che $|(u - v)'| \leq L|u - v|$ in $[\alpha, \beta]$, da cui, per Gronwall,

$$|v(t) - u(t)| \leq e^{L|t - t_0|}|v(t_0) - u(t_0)| \quad \forall t \in [\alpha, \beta].$$

Poi

$$\begin{aligned} |v(t_0) - u(t_0)| &\leq |v(t_0) - v(t_1)| + |v(t_1) - u(t_0)| = \Big| \int_{t_0}^{t_1} f(t, v(t))\, dt \Big| + |y_1 - y_0| \\ &\leq M|t_1 - t_0| + |y_1 - y_0|, \end{aligned}$$

da cui $|v(t) - u(t)| \leq e^{L|t - t_0|}(M|t_1 - t_0| + |y_1 - y_0|)$ per ogni $t \in [\alpha, \beta]$. □

Osservazione 11.2. Il risultato del Teorema di dipendenza continua non può, in generale, essere migliorato.

Come primo esempio, consideriamo il caso $f(t,y) = y$, $t_0 = t_1 = 0$, $y_0 = 0$, $y_1 \neq 0$: i problemi di Cauchy (11.1) e (11.3) sono

$$\begin{cases} u' = u \\ u(0) = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} v' = v \\ v(0) = y_1, \end{cases}$$

e le rispettive soluzioni sono

$$u(t) = 0, \qquad v(t) = y_1 e^t,$$

entrambe definite su tutto $\mathbb{R}$. Si ha $v \to u = 0$ uniformemente su ogni intervallo $[\alpha, \beta]$ per $y_1 \to y_0 = 0$ (come dice il teorema), e inoltre la stima della differenza $|v(t) - u(t)|$ è proprio la (11.4) con $L = 1$. Tuttavia v non converge a u uniformemente su $\mathbb{R}$, e questo accade anche se $\mathbb{R}$ è dominio di entrambe.

Come secondo esempio, consideriamo il caso $f(t,y) = y^2$, $t_0 = t_1 = 0$, $y_0 = 0$, $y_1 > 0$: i problemi di Cauchy (11.1) e (11.3) sono

$$\begin{cases} u' = u^2 \\ u(0) = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} v' = v^2 \\ v(0) = y_1, \end{cases}$$

e le rispettive soluzioni sono

$$u(t) = 0, \qquad v(t) = \frac{y_1}{1 - t y_1},$$

u definita su $\mathbb{R}$ e v definita su $(-\infty, 1/y_1)$. Anche in questo caso, come dice il teorema, fissato un qualunque intervallo $[\alpha, \beta]$ si ha che v è definita su $[\alpha, \beta]$ per y_1 sufficientemente vicino a $y_0 = 0$, e $v \to u = 0$ uniformemente in $[\alpha, \beta]$ per $y_1 \to 0$. Ciononostante, v non converge a u uniformemente nel suo dominio $(-\infty, 1/y_1)$, e, per ogni $y_1 > 0$, v non è definita globalmente anche se u lo è.

Il teorema di dipendenza continua dai dati iniziali ci dice in particolare che la soluzione u del problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' = f(t,u) \\ u(t_0) = y_0 \end{cases} \tag{11.11}$$

vista come funzione dei dati iniziali $(t_0, y_0) \in \mathbb{R}^{1+N}$ a valori nello spazio $C^0([\alpha,\beta]) = C^0([\alpha,\beta], \mathbb{R}^N)$ delle funzioni continue su $[\alpha,\beta]$ a valori in $\mathbb{R}^N$ munito della norma del sup

$$\|u\|_{C^0([\alpha,\beta])} := \sup\{|u(t)| : t \in [\alpha,\beta]\}$$

è una funzione continua. Se, per evidenziare la dipendenza dai dati iniziali, indichiamo

$$\phi(t, t_0, y_0)$$

la soluzione di (11.11) valutata al tempo t, il teorema dice che

$$\|\phi(\cdot, t_1, y_1) \to \phi(\cdot, t_0, y_0)\|_{C^0([\alpha,\beta])} \to 0 \quad \text{per } (t_1, y_1) \to (t_0, y_0).$$

Vedremo tra alcune lezioni che, quando il campo f è di classe $C^1(\Omega)$, la dipendenza della soluzione dai dati iniziali è non solo continua, ma anche differenziabile.

Esercizio 11.3. Studiare l'esistenza globale dell'equazione

$$u' = \frac{u^4 + t^2}{1 + u^2 + t^2}.$$

Osservazione 11.4. (*Lipschitzianità sui compatti*). In alternativa alla costruzione dell'intorno tubolare K in (11.9), nella dimostrazione del Teorema di dipendenza continua dai dati iniziali si può considerare il compatto K_0 (vedi (11.5)) e poi usare il fatto che una funzione localmente lipschitziana è lipschitziana su ogni compatto, come osservato (e dimostrato) dallo studente Emanuele Cristoforoni.

Esercizio 11.5. Dimostrare che se $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ è un aperto, $f : \Omega \to \mathbb{R}^N$ è una funzione continua in Ω e localmente lipschitziana rispetto a y, uniformemente in t, in Ω, e $K \subset \Omega$ è un compatto, allora f è lipschitziana rispetto a y in K.

* * *

Gli appunti delle lezioni 12-25 sono in preparazione.

Riferimenti bibliografici

[1] E. Acerbi, L. Modica, S. Spagnolo, *Problemi scelti di Analisi Matematica II*, Liguori Editore.

[2] A. Ambrosetti, G. Prodi, *A primer of nonlinear analysis*, Cambridge University Press, 1993.

[3] P. Baldi, *Equazioni differenziali*, dispense per il corso di Analisi 2 a Ingegneria (disponibile nella mia pagina docenti nella cartella del materiale didattico di Sistemi Dinamici https://www.docenti.unina.it/pietro.baldi)

[4] G.C. Barozzi, *Matematica per l'Ingegneria dell'Informazione*, Zanichelli, 2001.

[5] M. Berti, *Note del corso di Sistemi Dinamici*, 16 Dicembre 2011 versione preliminare (disponibile nella mia pagina docenti nella cartella del materiale didattico di Sistemi Dinamici https://www.docenti.unina.it/pietro.baldi)

[6] V. Coti Zelati, dispense per il corso di Sistemi Dinamici, capitoli 1-2 (disponibile nella mia pagina docenti nella cartella del materiale didattico di Sistemi Dinamici https://www.docenti.unina.it/pietro.baldi)

[7] G. De Marco, *Analisi Due/2*, Zanichelli.

[8] B. Demidovič, *Esercizi e problemi di analisi matematica*, Editori Riuniti.

[9] N. Fusco, P. Marcellini, C. Sbordone, *Analisi Matematica due*, Liguori Editore.

[10] G. Gentile, *Introduzione ai Sistemi Dinamici*, http://www.mat.uniroma3.it/users/gentile/2014-2015/FM410/testo.html

[11] C.D. Pagani, S. Salsa, *Analisi matematica 2*, Zanichelli.

[12] E. Stein, R. Shakarchi, *Fourier Analysis: An Introduction*. Princeton Lectures in Analysis, volume I. Princeton University Press, 2003.