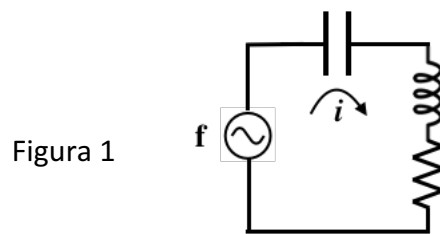


Circuiti oscillanti: impedenze complesse e legge di Ohm generalizzata

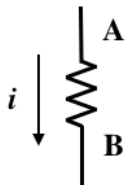
Quando in un circuito elettrico è presente un generatore che fornisce una forza elettromotrice oscillante in maniera sinusoidale, con frequenza ω , tutte le correnti che circolano nel circuito e le differenze di potenziale ai capi di ciascun elemento saranno grandezze oscillanti, caratterizzate dalla stessa frequenza del generatore. L'utilizzo del metodo delle impedenze complesse permette di risolvere con semplicità questo tipo di circuiti, utilizzando tutto quello che si è imparato nel caso dei circuiti in corrente continua.

Consideriamo un circuito RLC, alimentato da un generatore di tensione alternata che fornisce una forza elettromotrice sinusoidale, come mostrato in figura.



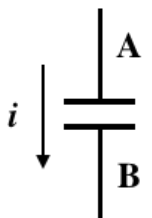
Nel circuito circola una corrente $i(t) = i_0 \cos(\omega t + \phi)$, dove i_0 è l'ampiezza della corrente e ϕ rappresenta una fase arbitraria. Ricordiamo che la fase totale della corrente è in questo caso l'argomento della funzione coseno e vale $\omega t + \phi$. Ci domandiamo quale sia la relazione che lega la corrente con la differenza di potenziale ai capi dei tre elementi del circuito, R, L e C. Analizziamo i tre casi separatamente.

Resistore.



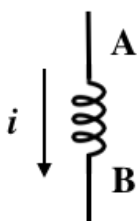
La legge di Ohm ci dice che ai capi del resistore $V_R = V_A - V_B = iR = i_0 \cos(\omega t + \phi)$.

Condensatore



Ai capi del condensatore, la differenza di potenziale vale $V_C = V_A - V_B = Q(t)/C$, dove $Q(t)$ è la carica sull'armatura superiore. E' immediato verificare che, poiché $\frac{dQ}{dt} = i(t)$, si ottiene $Q(t) = \frac{i_0}{\omega} \sin(\omega t + \phi) = \frac{i_0}{\omega} \cos\left(\omega t + \phi - \frac{\pi}{2}\right)$. Pertanto la differenza di potenziale ai capi del condensatore è $V_C = \frac{i_0}{\omega C} \cos\left(\omega t + \phi - \frac{\pi}{2}\right)$.

Induttore



Ai capi dell'induttore, la differenza di potenziale vale $V_L = V_A - V_B = L \frac{di}{dt}$. E' immediato verificare che, $V_L = -i_0 L \omega \sin(\omega t + \phi) = i_0 L \omega \cos\left(\omega t + \phi + \frac{\pi}{2}\right)$.

In tutti i casi abbiamo voluto scrivere la tensione attraverso la funzione coseno, per facilitare il confronto tra le oscillazioni della corrente e quelle delle tensioni ai capi di ciascun elemento. Nella tabella che segue riassumiamo quanto abbiamo trovato:

Resistore	Condensatore	Induttore
$V_R = i_0 R \cos(\omega t + \phi)$	$V_C = \frac{i_0}{\omega C} \cos\left(\omega t + \phi - \frac{\pi}{2}\right)$	$V_L = i_0 \omega L \cos\left(\omega t + \phi + \frac{\pi}{2}\right)$

Come ci aspettavamo, le tre tensioni oscillano con la stessa frequenza ω , ma hanno ampiezza e fase diverse tra loro. Nella tabella che segue, indichiamo la fase e l'ampiezza della tensione per ciascun elemento

	Resistore	Condensatore	Induttore
Ampiezza	$i_0 R$	$\frac{i_0}{\omega C}$	$i_0 \omega L$
Fase	$\omega t + \phi$	$\omega t + \phi - \frac{\pi}{2}$	$\omega t + \phi + \frac{\pi}{2}$

Risulta estremamente conveniente rappresentare queste grandezze oscillanti con dei numeri complessi:

$$\tilde{i} = i_0 e^{j(\omega t + \phi)}; \quad \tilde{V}_R = i_0 R e^{j(\omega t + \phi)}; \quad \tilde{V}_C = \frac{i_0}{\omega C} e^{j(\omega t + \phi - \frac{\pi}{2})}; \quad \tilde{V}_L = i_0 \omega L e^{j(\omega t + \phi + \frac{\pi}{2})}.$$

Dove stiamo indicando con j l'unità immaginaria (tipicamente viene usata la lettera i , che tuttavia in questi casi indica la corrente). Il simbolo tilde ($\sim$) indica che stiamo usando la rappresentazione complessa delle grandezze in gioco. Per ciascuna di esse, otteniamo la grandezza fisica considerando la parte reale della grandezza complessa. Ad esempio:

$$i(t) = \Re[\tilde{i}(t)]$$

Il simbolo $\Re[A]$ indica l'operazione matematica che consiste nel prendere la parte reale del numero complesso A .

Associamo ora ad ogni elemento una grandezza complessa che chiamiamo impedenza, che ha come unità di misura quella di una resistenza $[\Omega]$.

	Resistore	Condensatore	Induttore
Impedenza - Z	$Z_R = R$	$Z_C = -j \frac{1}{\omega C}$	$Z_L = j \omega L$
Ampiezza	$Z_{R,0} = R$	$Z_{C,0} = \frac{1}{\omega C}$	$Z_{L,0} = \omega L$
Fase	$\varphi_R = 0$	$\varphi_C = -\frac{\pi}{2}$	$\varphi_L = \frac{\pi}{2}$

Perché tutte queste operazioni? Perché mettere in campo i numeri complessi e queste strane grandezze?

Perché usando le impedenze e la rappresentazione complessa delle correnti e delle tensioni oscillanti, possiamo definire una legge di Ohm generalizzata, che vale non solo per i resistori, ma anche per condensatori e induttori. E' facile verificare infatti che, per ciascun elemento, abbiamo:

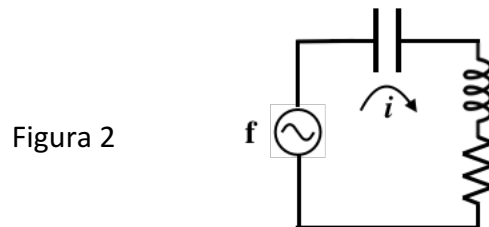
$$\tilde{V}_R = Z_R \tilde{i}; \quad \tilde{V}_C = Z_C \tilde{i}; \quad \tilde{V}_L = Z_L \tilde{i};$$

Usando i numeri complessi, possiamo usare la legge di Ohm con le impedenze al posto delle resistenze. Così facendo, possiamo usare anche per i circuiti oscillanti le leggi di Kirchhoff e tutto quello che abbiamo imparato per la risoluzione dei circuiti in regime stazionario. Quando due elementi sono collegati in serie e in parallelo, possiamo definire un'impedenza equivalente, il cui valore si ottiene con le stesse regole imparate per le resistenze.

Utilizziamo quanto discusso fino ad ora per risolvere un semplice esercizio.

ESERCIZIO

In un circuito un resistore ($R = 2 \Omega$), un condensatore ($C = 4 \mu F$) ed un induttore ($L = 3 mH$) sono collegati in serie ad un generatore di tensione che eroga una forza elettromotrice pari a $f(t) = f_0 \cos \omega t$, come mostrato in figura 2, dove $f_0 = 3 mV$ e $\omega = 10 kHz$. Si determini l'espressione della corrente, e quanto vale la differenza di fase tra la tensione ai capi dell'induttore e la forza elettromotrice f .



Si può rispondere facilmente alle domande poste usando il metodo delle impedenze complesse. Come prima cosa, rappresentiamo tutte grandezze in gioco con dei numeri complessi. Sappiamo che la tensione erogata dal generatore è

$$f = f_0 \cos \omega t$$

Qual è l'espressione complessa $\tilde{f}$ di questa quantità? Ricordando f deve essere la parte reale di $\tilde{f}$, potete verificare che $\tilde{f} = f_0 e^{j\omega t}$. E se l'espressione di f fosse stata $f = f_0 \sin \omega t$, quale sarebbe l'espressione della forza elettromotrice complessa (lascio a voi la risposta)?

Usando numeri complessi per rappresentare le correnti e le tensioni ai capi di ciascun elemento circuitale, risolviamo il circuito nella solita maniera, utilizzando il metodo delle maglie e associando delle impedenze a tutti gli elementi. Ai tre elementi collegati in serie possiamo associare una impedenza equivalente $Z_{eq} = Z_R + Z_C + Z_L = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$. Questo circuito è semplice, ha una sola maglia, e applicando a questa la seconda legge di Kirchhoff otteniamo che $\tilde{i} = \frac{\tilde{f}}{Z_{eq}}$. Notate bene che anche per la corrente stiamo usando la sua rappresentazione complessa. Riscriviamo l'impedenza equivalente nella notazione esponenziale

$$Z_{eq} = Z_0 e^{j\varphi_z}$$

dove Z_0 è l'ampiezza dell'impedenza e φ_z la sua fase, definite come:

$$Z_0 = \left(R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} = 5,38 \, \Omega; \quad \varphi_Z = \text{Arg}(Z_{eq}) = \tan^{-1} \frac{\left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)}{R} = 1,19.$$

L'espressione della corrente complessa è dunque

$$\tilde{i} = \frac{\tilde{f}}{Z_{eq}} = \frac{f_0}{Z_0} e^{j(\omega t - \varphi_Z)}$$

Prendendo la parte reale di questa espressione, otteniamo la relazione che ci dà la corrente:

$$i(t) = \frac{f_0}{Z_0} \cos(\omega t - \varphi_Z).$$

La tensione ai capi dell'induttore è data dalla legge di Ohm generalizzata:

$$\tilde{V}_L = \tilde{i} Z_L = \tilde{i} (j \omega L) = \frac{i_0}{\omega L} e^{j(\omega t - \varphi_Z + \frac{\pi}{2})};$$

Confrontando le espressioni complesse di $\tilde{f}$ e $\tilde{V}_L$ otteniamo la differenza di fase tra queste due grandezze, che è pari a

$$\varphi_{V_L} - \varphi_f = -\varphi_Z + \frac{\pi}{2} = 0,38$$